GRUNDLEHREN DER MATHEMATIK

FÜR STUDIERENDE UND LEHRER

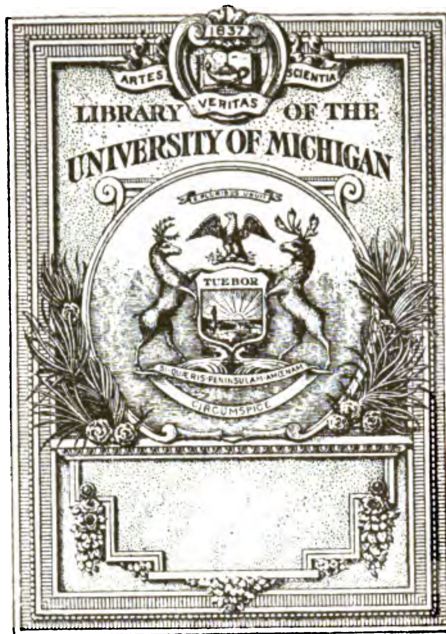
I. TEIL. I. BAND

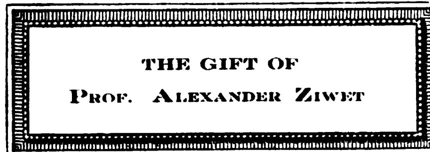
C. FÄRBER

ARITHMETIK



9





Berlin

2 Teilen.

nde.
1910.
g.]

eme. XII,

e der Ver-
bereitung.]

Bachmann,
, E. Czuber,
e, E. Netto,
rt, D. Seli-
digiert von
hematischen
–1904. geh.
–1904. geh.
nd postfrei.

e J. Molk,
E. Cahen,
. Kürschák,
'Ocagne, F.
ry, H. Vogt.
thématiques
nd postfrei.

, R. Fricke,
A. Krazer,
e, A. Prings-
ber, E. Zer-
. T.: Ency-
. Ausführ-

ce qui con-
l'étude des
fonctions sous celle de E. Borel, avec la collaboration de H. Andoyer, P. Boutroux, J. Chazy, E. Delassus, A. Denjoy, G. Eneström, E. Esclangon, P. Fatou, G. Floquet, M. Fréchet, E. Goursat, C. Jaccottet, A. Lambert, J. Le Roux, P. Montel, P. Painlevé, E. Picard, S. Pincherle, E. Vessiot, L. Zoretti. 6 vol. grand in-8°. A. u. d. T.: Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome II. Ausführlicher Prospekt umsonst und postfrei.

Biermann, O., Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. XII, 382 S. gr. 8. 1895. geh. n. *M.* 10.—, geb. n. *M.* 11.—

Borel, E., die Elemente der Mathematik. Deutsche Ausgabe, besorgt von P. Stäckel. 2 Bände. gr. 8. geb.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. XVI, 431 S. 1908. n. *M.* 8.60.

II. „ Geometrie. Mit 403 Figuren. XII, 324 S. 1909. n. *M.* 6.40.

Czuber, E., Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. X, 382 S. gr. 8. 1909. geb. n. *M.* 12.—

v. Dyck, W., und S. Finsterwalder, Vorlesungen über höhere Mathematik. In 4 Bänden zu je etwa 20 Bogen. gr. 8. geb. [Der I. Band erscheint Ostern 1911.]

Fricke, R., kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung d. Anwendungen. Analytisch-funktionentheoretischer Teil. Mit 102 Fig. IX, 520 S. gr. 8. 1900. geb. n. *M.* 14.— [Der II. (Schluß-) Teil über Algebra und Geometrie ist in Vorbereitung.]

GRUNDLEHREN DER MATHEMATIK

FÜR STUDIERENDE UND LEHRER

I.

DIE GRUNDLEHREN DER ARITHMETIK UND ALGEBRA

BEARBEITET VON

E. NETTO UND C. FÄRBER

II.

DIE GRUNDLEHREN DER GEOMETRIE

BEARBEITET VON

W. FR. MEYER UND H. THIEME

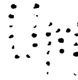
ERSTER TEIL ERSTER BAND



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Alexander Ziwet

ARITHMETIK



BEARBEITET VON

DR. CARL FÄRBER

PROFESSOR AN DER LUISENSTÄDTISCHEN OBERREALSCHULE
IN BERLIN

MIT 9 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

Zur Einführung[1]).

Die „Grundlehren der Mathematik“ sind als eine dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechende Erneuerung und Weiterführung von R. Baltzers „Elementen der Mathematik“ gedacht.

Die Fortschritte, die die mathematische Wissenschaft im letzten Jahrhundert zu verzeichnen hat, sind auch den Elementen der Mathematik in hervorragendem Maße zugute gekommen.

Den schärferen Methoden der neueren Wissenschaft gemäß ist auch den Lehren der Elementarmathematik eine schärfere Begründung gegeben worden. Zusammenhänge, die zwischen den Elementen und tiefer gehenden sowie weiterführenden Fragen der Wissenschaft bestehen, sind aufgedeckt und zur Klärung der in den Elementen zu behandelnden Begriffe und Methoden verwendet worden; überdies haben einzelne Gebiete der Elementarmathematik wertvolle Erweiterungen ihres Besitzstandes erfahren.

Für jemanden, der sich mit dem heutigen Stande der Elementarmathematik bekannt machen wollte, wäre es nicht leicht, sich die einschlägige, in vielen einzelnen Abhandlungen und Werken zerstreute Literatur zu verschaffen und auf Grund des Studiums dieser zahlreichen und meist schwierigen Schriften in einigermaßen ausreichender Weise zu einer tieferen Auffassung der Elemente zu gelangen.

Es fehlte bisher an einem Werke, in dem die auf die Elemente bezüglichen Ergebnisse der Wissenschaft in einiger Vollständigkeit zusammengefaßt wären.

Der Rahmen eines solchen Werkes würde indessen ein zu enger sein, wenn es sich lediglich auf die Elemente der Arithmetik, Algebra und Geometrie beschränken wollte; es erschien zweckmäßig, im Anschluß an die Elemente und auf ihnen fußend wenigstens die Grundzüge weiterer Entwickelungsreihen zu bearbeiten, die rückwärts wiederum ein neues Licht auf die Elemente zu werfen geeignet sind.

---

1) Abdruck aus dem 1909 erschienenen ersten Bande des zweiten Teiles: H. Thieme, Die Elemente der Geometrie.

So haben sich denn die Unterzeichneten[1]) zu dem Versuche entschlossen, gemeinsam die bezeichnete Lücke in der Literatur ausfüllen zu helfen.

Die „Grundlehren“ sind auf vier Bände berechnet, von denen zwei der Geometrie und je einer der Arithmetik und der Algebra gewidmet werden.

Der Band über Arithmetik und der erste Band über Geometrie sollen sich wesentlich auf eine Darstellung der Elemente beschränken, die dem heutigen Stande der Wissenschaft entspricht, während die beiden anderen Bände auch darüber hinaus in dem oben bezeichneten Sinne Ergänzungen und Erweiterungen bieten werden als eine Einführung in die Forschungen, die ein tieferes Verständnis der Lehren der Elementarmathematik ermöglichen.

Für Leser, die irgend eine der behandelten Fragen weiter verfolgen wollen, sind in allen Teilen des Werkes geeignete Literaturnachweise und historische Bemerkungen hinzugefügt worden.

Vorkenntnisse werden nur in möglichst geringem Umfange — in der Arithmetik und dem ersten Bande der Geometrie gar nicht — vorausgesetzt, wohl aber eine gewisse Fähigkeit und Neigung zum abstrakten Denken.

Der vorliegende erste Band des ersten Teils „Arithmetik“ stellt sich das Ziel, wissenschaftliche Strenge mit Verwendbarkeit für den Schulunterricht zu vereinigen.

Einzeln sind diese beiden Forderungen in mancher Darstellung der Arithmetik mehr oder minder vollkommen erfüllt. Der Verfasser erblickt seine Aufgabe darin, die in der Verbindung beider liegende Schwierigkeit zu überwinden.

Das Buch ist dazu bestimmt, dem Lehrer zur Vorbereitung auf den Unterricht zu dienen, ohne indes den Stoff unmittelbar in der für den Schüler der Mittelklassen geeigneten Form bringen zu wollen.

Wie der erste Band der Geometrie beschränkt sich auch dieser Band nicht auf die Lehren, die im Unterricht unbedingt gebraucht werden, sondern geht vielfach weiter bzw. tiefer, als es im Unterrichte möglich ist.

---

1) Nach einleitenden Vorverhandlungen der Verlagsbuchhandlung mit H. Thieme und W. Fr. Meyer lag es dem letzteren ob, für eine Erweiterung der Redaktion nach der arithmetisch-algebraischen Seite hin Sorge zu tragen. In der amtlichen Stellung der Unterzeichneten sollte auf Wunsch des Verlages bereits das Prinzip zum Ausdrucke kommen, sowohl dem Standpunkte der höheren Schulen wie dem akademischen Standpunkte Rechnung zu tragen.

W. Fr. Meyer hat auch, auf Grund eines Entwurfes von H. Thieme sowie weiterer Zusätze und Bemerkungen von E. Netto, C. Färber und ihm selbst, das vorliegende Einführungswort im Oktober 1908 anläßlich der Ausgabe des von H. Thieme bearbeiteten ersten Bandes: „Die Elemente der Geometrie“ zusammengestellt, für das er die Verantwortung übernimmt.

In den Punkten, wo mehrere Anschauungsweisen möglich sind, hat sich der Verfasser unter Begründung seiner Meinung für eine bestimmte entschieden, in Anmerkungen jedoch auf andere Meinungen und deren Hauptvertreter hingewiesen.

Der rote Faden, der sich durch die Arithmetik zieht, ist die Entwickelung des Zahlbegriffs. Mit den natürlichen Zahlen beginnend, hat der Verfasser die gebrochenen, negativen, irrationalen und komplexen Zahlen in einer Weise einzuführen gesucht, die einerseits einer strengeren Prüfung standhält, andererseits aber für den Schulunterricht auch wirklich zu verwerten ist.

Die „Arithmetik" wird in der Form, in der sie hier geboten wird, bei der zur Zeit für Prima vorgeschriebenen wiederholenden Zusammenfassung vielleicht gute Dienste leisten können.

Bei der Bearbeitung des Bandes über Algebra, die E. Netto obliegt, geht der Verfasser davon aus, daß die Grundlehren der Arithmetik sowohl den Boden für die algebraischen Forschungen liefern als auch die Mittel für seine Bearbeitung.

Von den Hauptgegenständen der Algebra seien hervorgehoben die Theorie der algebraischen Gleichungen, insbesondere das Fundamentaltheorem über die Existenz der Wurzeln, sodann die Theorie der Gleichungssysteme und der Elimination. Aus praktischen Gründen ist auch die Lehre von den Determinanten in ihren Hauptzügen der Algebra angegliedert worden. Dagegen war die Theorie der algebraischen Zahlen, als dem Charakter des Gesamtwerkes nicht entsprechend, auszuschließen.

Des zweiten Teiles erster Band[1]) enthält die Elemente der Geometrie. Der Begriff der „Elemente" ist verhältnismäßig weit gefaßt. Es sind die einzelnen Lehren eingehender behandelt worden, als es in Schulbüchern üblich ist; es sind auch die einfachsten Lehren der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades sowie der darstellenden Geometrie aufgenommen; auch sind in gewissem Umfange die verschiedenen Methoden für die Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben nebst der neueren Geometrie des Dreiecks und des Tetraeders berücksichtigt.

Der zweite, von W. Fr. Meyer herauszugebende Band der Geometrie wird die geometrischen Gebilde vom Standpunkte der Verwandtschaften aus behandeln, unter besonderer Berücksichtigung der Begriffe von Gruppe und Invariante.

Das ganze Werk ist, wie bereits aus Vorstehendem hervorgeht, nicht unmittelbar für den Unterricht bestimmt, will aber doch auch

---

1) II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. 2 Bände. 1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von H. Thieme. XII, 394 S. 1909.

an seinem Teile zur Förderung des mathematischen Unterrichts beitragen.

Die Frage der zukünftigen Gestaltung des mathematischen Unterrichts ist im Flusse.

Ist diese Frage auch mehr eine solche der Unterrichtsmethodik als der Wissenschaft, so können doch die Ergebnisse der zu lehrenden Wissenschaft nicht als etwas Nebensächliches angesehen werden.

Diese Ergebnisse müssen vielmehr bei der Umgestaltung des Unterrichtes auch voll zur Geltung gelangen, wenn derselbe wirklich zur geistigen Förderung der Jugend dienen soll.

Dazu ist aber erforderlich, daß die Lehrer der Mathematik, die den Unterricht in der neuen Gestalt ins praktische Schulleben überführen sollen, nach jeder Richtung mit dem heutigen Stande der bezüglichen Gebiete der Wissenschaft vertraut sind.

W. Fr. Meyer. **E. Netto.**
H. Thieme. **C. Färber.**

Vorwort.

Wie schon in dem vorausgeschickten Einführungswort gesagt ist, bildet den wesentlichen Inhalt der „Arithmetik“ die systematische Entwicklung des Zahlbegriffs und die Erörterung der sieben Rechenoperationen für jede der eingeführten Zahlarten.

Indem ich wegen aller Einzelheiten auf das ziemlich eingehende Inhaltsverzeichnis verweise, möchte ich von dem im vorliegenden Buche behandelten Stoffe hier nur das Folgende hervorheben. Im ersten Kapitel („Die natürlichen Zahlen“) wird nachdrücklich die große Bedeutung betont, die den systematischen Zahlen für die Beherrschung des Zahlbereiches durch unseren Intellekt und für die Ausführbarkeit der Rechenoperationen zukommt (vgl. S. 26, Anm. 1). Das dritte Kapitel („Die systematischen Brüche“) enthält eine ausführliche Theorie der periodischen systematischen Brüche und des Rechnens mit ungenauen Zahlen. Nachdem das Rechnen mit den natürlichen, den gebrochenen und den relativen Zahlen in den vier ersten Kapiteln begründet ist, folgen im fünften alle die Abschnitte der Arithmetik, in denen man mit diesen (den rationalen) Zahlen ausreicht. Wie bereits im zweiten Kapitel (siehe z. B. S. 94) auseinandergesetzt ist, in welchem Sinne man von der Quadrat- oder Kubikwurzel aus einer beliebigen positiven Zahl im rationalen Zahlenbereiche zu sprechen hat, so wird Kap. V, § 5 für dieses Gebiet auch der Begriff des Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl für irgend eine positive Basis festgestellt (vgl. S. 233, Anm. 1 u. S. 238—241). In dem die arithmetischen Reihen beliebiger Ordnung behandelnden Paragraphen findet sich auch eine Herleitung für die independente Darstellung der Potenzsummen der natürlichen Zahlen (S. 211 u. 212). Das sechste Kapitel ist eine Umarbeitung einer im Jahre 1900 veröffentlichten Programmabhandlung über die irrationalen Zahlen, das siebente Kapitel endlich bringt eine eingehende Theorie der aus zwei Einheiten zusammengesetzten, insbesondere der gemeinen komplexen Zahlen (vgl. den ersten Absatz auf S. 338).

Durchgehends ist möglichste Vollständigkeit und gleichmäßige Berücksichtigung aller für die Schule günstigstenfalls in Betracht kommenden Teile der Arithmetik erstrebt, um den Leser in den Stand zu setzen, bei seinem Unterricht überall aus dem Vollen schöpfen zu können. Da zwar eine gewisse Fähigkeit und Neigung zu abstraktem Denken,

aber nicht spezielle Vorkenntnisse (mit Ausnahme einer Stelle im VII. Kap., S. 392) vorausgesetzt werden, dürfte auch solchen Elementarlehrern, welche an höheren Lehranstalten Rechenunterricht zu erteilen haben, das Studium der betreffenden Abschnitte die Möglichkeit bieten, diesen auf eine wissenschaftliche Grundlage zu stellen und so die Schüler für den späteren Unterricht in der Arithmetik zweckentsprechend vorzubereiten. Aufgaben sind nur insoweit aufgenommen (namentlich in Kap. V, § 7, „Wahrscheinlichkeitsrechnung"), als sie zur Erläuterung der Theorie erforderlich schienen.

Wert gelegt wird in allen Teilen des Buches auf exakte Darstellung, auf scharfe Unterscheidung zwischen willkürlichen Festsetzungen und sich mit Notwendigkeit ergebenden Konsequenzen; bei allen Aussagen, Sätzen und Formeln ist angegeben, für welchen Zahlbereich sie gültig sind. Die Definitionen sollen dem Leser nicht unvermittelt, wie aus der Pistole geschossen, gegenübertreten; ich habe mich vielmehr bemüht zu zeigen, aus welchen Gründen man gerade auf diese oder jene Begriffsbestimmung gekommen ist.

Besondere Beachtung ist solchen Punkten gewidmet worden, die auch noch in so manchen neueren Veröffentlichungen der nötigen Klarheit ermangeln (ich denke z. B. an die Multiplikation relativer Zahlen, S. 167—169, den Unterschied zwischen vollkommenen und unvollkommenen Gleichungen, S. 172—173, S. 386—388 und S. 402—406, die Logarithmen negativer Zahlen, S. 396—397 und S. 399—402, usw.).

Der in den meisten neueren wissenschaftlichen Darstellungen der Arithmetik üblichen rein formalen Definition der verschiedenen Zahlarten habe ich mich nicht anzuschließen vermocht (siehe z. B. S. 76). H. Hankel (Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 7) und G. Cantor (Mathematische Annalen, Bd. 21, S. 562) haben es klar und deutlich ausgesprochen, daß man von der Realität irgend welcher Zahlbegriffe in zweierlei Sinne reden könne. Cantor legt einem Zahlbegriffe „immanente" Realität bei, wenn dieser auf Grund von Definitionen in unserem Verstande einen ganz bestimmten Platz einnimmt, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens sich deutlich unterscheidet und zu ihnen in bestimmter Beziehung steht. Läßt sich aber von Zahlbegriffen außerdem noch zeigen, daß sie Abbilder von Objekten oder Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt sind, so kommt ihnen nach Cantor „transiente" Realität zu. Und wenn nun auch die reine Wissenschaft (die Cantor an der zitierten Stelle deshalb die „freie" Mathematik nennt) bei ihren Spekulationen sich mit der immanenten Realität eines Zahlbegriffs begnügen kann, so ist nach meiner Ansicht für die Schule doch der Nachweis seiner transienten Realität unbedingt erforderlich. Es sind deshalb in dem vorliegenden Buche alle Zahlen aus Mengen hergeleitet, unter deren

Elementen die einen oder die anderen Beziehungen bestehen (vgl. Kap. I, § 1, Kap. II, § 1, Kap. IV, § 1 und Kap. VII, § 2). Für die irrationalen Zahlen wird der Nachweis ihrer transienten Realität mittels der Größenverhältnisse (Kap. VI, § 8), für die gemeinen komplexen Zahlen mittels der ebenen Vektoren (Kap. VII, § 3) geführt. Diese Beziehung der Arithmetik auf die Wirklichkeit scheint mir der wesentliche Kern der modernen Reformbestrebungen, soweit sie die Arithmetik betreffen, zu sein.

Dagegen ist von der in den meisten neueren Lehrbüchern so ausgiebig behandelten und eine so große Rolle spielenden graphischen Darstellung irgend welcher Abhängigkeitsverhältnisse nicht gerade häufig Gebrauch gemacht (abgesehen von dem Abschnitt über die Vektoren der Ebene nur bei der Diskussion der Exponentialfunktion, S. 392), weil die vorliegende „Arithmetik" ja nicht ein methodisches, sondern ein systematisches Buch sein soll, und weil es jedem Lehrer der Mathematik, der die Elemente der analytischen Geometrie beherrscht, ein Leichtes ist, auch bei seinem arithmetischen Unterricht, soweit es ihm zweckdienlich erscheint, graphische Methoden zur Erläuterung heranzuziehen.

Zum Schlusse sei darauf hingewiesen, daß die historischen Angaben zum großen Teil M. Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" und J. Tropfkes „Geschichte der Elementar-Mathematik" entstammen.

Berlin, Ende September 1910.

C. Färber.

Inhaltsverzeichnis.

II. Kapitel.

Die gebrochenen Zahlen, insbesondere die gemeinen Brüche.

III. Kapitel.

Die systematischen Brüche.

IV. Kapitel.

Die relativen Zahlen.

Seite

VII. Kapitel.

Die komplexen Zahlen.

I. Kapitel.

Die natürlichen Zahlen.

§ 1. Der Begriff der natürlichen Zahl.

Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Zahlen und ihren Verknüpfungen. Ihre erste Aufgabe besteht in einer Beantwortung der Frage: Was ist die Zahl, welches ist der Ursprung des Zahlbegriffs? Unsere innere Erfahrung sagt uns, daß der Inhalt unseres Bewußtseins nicht ein unteilbares Ganze bildet, daß wir vielmehr imstande sind, Vorstellungen gegeneinander abzugrenzen. Von diesen stehen fast immer gewisse im Vordergrunde unseres Interesses, ohne daß die übrigen deshalb aus dem Bewußtsein zu verschwinden brauchen. Fassen wir jede der uns in einem bestimmten Moment interessierenden Vorstellungen für sich auf und verbinden dann alle ohne Rücksicht auf ihre Gruppierung durch einen Denkakt zu einem Ganzen, so gelangen wir zu dem Begriff der „Vielheit“ oder „Mehrheit“ oder „Menge“ oder des „Inbegriffs“ oder „Aggregats“ von Dingen, das Wort „Ding“ dabei im allgemeinsten Sinne genommen, es darf alles bezeichnen, was Gegenstand des Vorstellens sein kann. Zu einem Inbegriff lassen sich die heterogensten Dinge vereinigen. Bei der Bildung des Vielheitsbegriffes ist unser Interesse eben nicht auf den Inhalt der einzelnen Vorstellungen, sondern nur auf ihre durch einen besonderen psychischen Akt vollzogene „kollektive“[1]) Verbindung gerichtet.

Jede Vorstellung nun, auf deren besonderen Inhalt es uns für den augenblicklichen Zweck gar nicht ankommt, können wir als „irgend etwas“ oder „eins“ bezeichnen, und da die kollektive Verbindung ihren sprachlichen Ausdruck in der Kopula „und“ findet, so bedeutet Vielheit nichts anderes als „etwas und etwas und etwas usw.“ oder „eins und eins und eins usw.“ Die einzelnen Begriffe „eins und eins“, „eins und eins und eins“, „eins und eins und eins und eins usw.“ sind schon auf der primitivsten Kulturstufe von praktischer Wichtig-

---

1) Diese Bezeichnung wendet E. Husserl in seiner „Philosophie der Arithmetik“ (Halle 1891) an, welche die in diesem Paragraphen gegebene Entwicklung des Zahlbegriffs stark beeinflußt hat. Eine ganz ähnliche Auffassung desselben findet sich auch in dem Aufsatze von G. Cantor: „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“. Mathem. Annal. Bd. 46, S. 481.

keit gewesen und deshalb bereits in frühen Zeiten von allen Völkern mit besonderen Namen „zwei“, „drei“, „vier“ usw. belegt worden. Der gemeinsame Name für alle auf diese Weise entstandenen Begriffe ist „Anzahl“ oder „natürliche Zahl“ oder (im Gegensatze zu anderen, später einzuführenden Zahlen) „positive ganze Zahl“.

Das Zählen irgend einer Menge von Dingen wird nun, wenigstens ursprünglich, vollzogen, indem man von der besonderen Beschaffenheit jedes Dinges gänzlich abstrahiert, es eben nur als „Eins“ auffaßt, alle diese „Einsen“ ohne Rücksicht auf ihre Anordnung im Bewußtsein zu einem Ganzen verbindet und der so entstehenden Vielheit den für den betreffenden Fall zukommenden Namen „zwei“ oder „drei“ oder „vier“ usw. gibt. Sind insbesondere die gezählten Dinge sämtlich von gleicher Art, d. h. stimmen sie in denjenigen Merkmalen überein, auf die für den vorliegenden Zweck unser Interesse gerade gerichtet ist, und tragen sie dementsprechend einen gemeinsamen Namen, so können wir nachträglich, d. h. nach der Zählung, diesen Namen hinzusetzen und erhalten alsdann eine „benannte Zahl“.

Unter die soeben gegebene Definition des Zahlbegriffs fällt streng genommen nicht der Begriff „Eins“ und noch weniger der Begriff „Null“, der das Nichtvorhandensein eines Dinges von bestimmter Art in einer Menge bezeichnet; denn Eins und Null sind nicht die Ergebnisse kollektiver Verbindung.[1]) Weil aber zwischen Eins und Null und den eigentlichen Zahlen ganz ähnliche Relationen[2]) bestehen wie unter den letzteren allein, erweitern wir unseren Zahlbereich, indem wir die Begriffe Eins und Null hinzunehmen.

In der angegebenen Weise können wir aber tatsächlich nur wenige Zahlbegriffe wirklich herstellen; denn mehr als höchstens zehn bis zwölf Objekte einzeln aufzufassen und gleichzeitig zu einem Ganzen in unserem Bewußtsein zu vereinigen, ist uns im allgemeinen nicht möglich. Wären wir auf die eigentliche Mengenvorstellung angewiesen, so würde die Zahlenreihe günstigstenfalls etwa mit der Zwölf endigen, und wir hätten auch nicht den Begriff einer Fortsetzung. Bei größeren Mengen, z. B. der Menge der Zuschauer in einem Theater oder der Sterne am Himmel, wäre vielleicht noch die sukzessive Auffassung der einzelnen Objekte möglich, aber nicht mehr ihre zusammenfassende

1) Die Pythagoreer sagen (vgl. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik I, 2. Aufl., S. 147): „Die Einheit ist Ursprung und Anfang aller Zahlen, aber nicht selbst Zahl“, eine Ansicht, die sich auch bei den arabischen und christlichen Mathematikern des Mittelalters wiederfindet. Die Auffassung der Null als Zahl ist erst den Indern zu verdanken, und das Vorkommen eines Zeichens für sie ist nach Cantor (Vorlesungen I, S. 569) erst etwa seit 400 n. Chr. gesichert.

2) Der besondere Charakter von Eins und Null zeigt sich aber immerhin in den mannigfachen Ausnahmen, die das Rechnen mit diesen Zahlen bietet.

Kollektion. Zu erklären, in welchem Sinne wir trotzdem berechtigt sind, auch in solchen Fällen von einer „Vielheit“ zu sprechen, ist eine Aufgabe der Psychologie. In der schon zitierten „Philosophie der Arithmetik“ hat Husserl diesem Problem eine ausführliche Auseinandersetzung gewidmet, deren Ergebnis ist, daß wir in den erwähnten Fällen zwar nicht eine eigentliche Vorstellung der Menge oder Vielheit haben, wohl aber eine symbolische, d. h. durch Zeichen vermittelte und eindeutig charakterisierte. Jeder Menge von Objekten, sei sie eigentlich oder symbolisch vorgestellt, entspricht nun aber eine bestimmte Vielheit von Einheiten, eine Anzahl. Denn der Begriff der Kollektion aller Glieder der Menge ist ein vollkommen bestimmter, wenn wir auch die Kollektion zu vollziehen nicht imstande sind.[1]) Wie aber kennzeichnen wir die einer nur symbolisch vorzustellenden Menge zugehörige Zahl, falls wir sie im eigentlichen Sinne nicht mehr bilden können? Es bleibt uns zunächst das Mittel, die gegebene Menge in Gruppen zu teilen, denen noch eigentlich vorstellbare Zahlen, z. B. fünf, sechs, acht, entsprechen. Können wir uns nun auch die sämtlichen in diesen Zahlen enthaltenen Einheiten nicht mehr gleichzeitig gesondert vorstellen, so halten wir uns an die Zusammenstellung der Zahlnamen fünf, sechs, acht (bezüglich ihrer Zeichen), und diese vertritt die für uns nicht eigentlich vorstellbare Zahl, ist ein Symbol derselben. Wenn die Zahl der Gruppen einer Menge aber nicht zu groß werden soll, sind als Vermittler der Zahlenbildung nicht bloß die eigentlich vorstellbaren Zahlen, sondern auch die bereits symbolisch gebildeten zuzulassen. Um dem ganzen Aufbau einen festen Halt zu geben, müßten dann aber auch alle diese Zusammenstellungen von Zahlnamen wieder besondere Bezeichnungen erhalten, und man würde bald so viele verschiedene Namen bekommen, daß das Gedächtnis sie unmöglich beherrschen könnte. Es tritt noch ein anderer erheblicher Übelstand hinzu. Weil nämlich dieselbe Menge verschiedene Gliederungen zuläßt, würden ihr verschiedene Zahlformen entsprechen können, während ihr doch nur eine einzige wirkliche Zahl zukommt. Für die Vergleichung wären derartige Zahlformen also recht unzweckmäßig.

Um diese Mängel zu vermeiden, ist es einerseits erforderlich, ein festes Prinzip für die Bildung der symbolischen Zahlformen einzuführen, damit man eben nur dieses und nicht alle die zu bildenden Formen dem Gedächtnisse einzuprägen hat. Andrerseits ist dafür zu

1) Es hat nichts Widersinniges an sich, uns unsere geistigen Fähigkeiten so erweitert vorzustellen, daß auch bei großen Mengen die gleichzeitige Auffassung aller Glieder noch möglich ist. Tatsächlich besitzen manche Menschen diese Fähigkeit in weit höherem Grade, als sie dem Durchschnitt zukommt. So soll der bekannte Rechenkünstler Dahse, wenn er irgendwo 30 bis 40 Bücher sah, die Zahl derselben momentan richtig angegeben haben.

sorgen, daß jeder Menge nur eine nach diesem Prinzip zu bildende Zahlform entspricht, um aus der Verschiedenheit der Zahlformen unmittelbar auf die Verschiedenheit der wirklichen Zahlen schließen zu können. Als einfachster Weg, um diesen Anforderungen zu genügen, bietet sich zunächst die Methode dar, neue Zahlformen zu erzeugen, indem man zu den bereits gebildeten je eine Einheit hinzufügt. Betrachtet man etwa zehn als die letzte eigentlich gegebene, wirklich vorstellbare Zahl, so kann man die Zusammenstellung „zehn und eins" als nächste Zahl einführen und mit einem besonderen Namen, elf, bezeichnen, alsdann ebenso die Zusammenstellung „elf und eins" und ihr den Namen zwölf geben usw. Es ist klar, daß man mit den nach diesem Prinzip erhaltenen Zahlformen jede beliebige Menge abzählen kann, und es ist auch leicht ersichtlich, daß jeder Menge nur eine derartige Zahlform entsprechen kann. Aber dennoch erweist sich auch diese Methode zur Bildung symbolischer Zahlformen als unbrauchbar, weil jeder neue Schritt der Zahlbildung auch einen neuen Namen erfordern würde. Wählte man lauter independente Namen, so ließe uns das Gedächtnis bald im Stich. Bildete man aber die Namen durch Wiederholung etwa des Wortes „Eins", so wäre bei einigermaßen großen Zahlen eine solche Bezeichnungsweise noch ungeschickter und für den Gebrauch ungeeigneter. Wie schwerfällig sich das Rechnen mit diesen Zahlformen gestalten würde, darauf werden wir noch in § 10 dieses Kapitels verweisen. Wir müssen uns also nach einer anderen Methode zur Konstruktion symbolischer Zahlformen umsehen.

Da tritt uns die merkwürdige Erscheinung entgegen, daß dasjenige, was wir auf Grund theoretischer Überlegungen fordern, schon auf früher Kulturstufe von fast allen Völkern, durch die Bedürfnisse des praktischen Lebens veranlaßt, in mehr oder minder vollkommener Weise geleistet worden ist. War man beim Abzählen einer Menge bis zu einer gewissen Zahl, meistens der Zahl zehn, gelangt, so sonderte man diese Gruppe von zehn Dingen ab und fing beim Weiterzählen wieder mit der Zahl eins an, bis man abermals eine Gruppe von zehn beisammen hatte usw., und gab schließlich die Anzahl der Gruppen und die der noch übrig bleibenden einzelnen Dinge an. Wenn man zehn solcher Gruppen gebildet hatte, faßte man sie zu einem Haufen zusammen usw. und nannte dann die Anzahl der Haufen, der Gruppen und der einzelnen Dinge.[1]) Durch weitere Anwendung dieses selben

1) Daß auch in unserer Zeit bei wenig kultivierten Völkern diese ursprüngliche Art des Zählens noch zu finden ist, dafür ein paar Belege. Nach Schrumpf (Zeitschr. d. Deutschen Morgenländischen Gesellsch. XVI, 463) „müssen bei Völkern des südlichen Afrika, wenn über hundert gezählt werden soll, immer drei Mann die schwere Arbeit verrichten. Einer zählt dann an den Fingern, welche er einen nach dem andern erhebt und damit den zu zählenden Gegenstand andeutet und

einfachen Prinzips gelangte man dazu, die irgend einer im praktischen Leben vorkommenden Menge entsprechende Zahl durch den Komplex von verhältnismäßig wenigen, kleinen (also noch im eigentlichen Sinne vorstellbaren) Zahlen zu symbolisieren.

Die Gesamtheit der so entstehenden Zahlformen nennt man ein Zahlensystem und insbesondere das auf der Zahl zehn aufgebaute das dekadische System.[1])

Der Bildung dieser systematischen Zahlbegriffe folgte überall auch die Sprache, indem sie schon auf niedriger Kulturstufe für die Begriffe eins, zwei, ... neun und die der Gruppen der verschiedenen Ordnungen (soweit es das jeweilige praktische Bedürfnis oder das theoretische Interesse an den Zahlen erforderlich machte) Wörter schuf und aus diesen die Namen für die übrigen Zahlen zusammensetzte. Die schriftliche Darstellung der Zahlen durch Zeichen entstammt erst späteren Zeiten und weist zunächst bei allen Völkern, selbst geistig so hochstehenden wie den alten Griechen und Römern, mannigfache Unvollkommenheiten auf, bis es schließlich den Indern in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung gelang, in ihrem genialen „Positionssystem" das Ideal einer Darstellung beliebiger Zahlen des Systems durch Zeichen zu verwirklichen.

Zur gründlichen Einsicht in den Aufbau des Zahlensystems und

---

womöglich berührt, die Einheiten. Der zweite hebt seine Finger auf (immer mit dem kleinen Finger der linken Hand beginnend und fortlaufend bis zum kleinen Finger der rechten) für die Zehner, sowie sie voll werden. Der dritte figuriert für die Hunderte." Nach Tylor (Einleitung in die Anthropologie, Übersetzung von Siebert, S. 376) „benutzen die Eingeborenen der Südseeinseln beim Zählen der Einer Steinchen; sind zehn Stück beisammen, so wird statt deren ein kleines Stückchen von einem Kokosnußstiel beiseite gelegt; sind solcher zehn beisammen, so wird ein größeres Stück eines Kokosnußstiels genommen usw."

1) Es ist Husserls Verdienst, hervorgehoben zu haben, daß das dekadische System nicht etwa nur eine Methode ist, schon irgendwie vorhandene Zahlen zu bezeichnen, daß es vielmehr dazu dient, für die uns nicht direkt zugänglichen Zahlen die symbolischen Zahlenformen erst zu schaffen. Die vorher besprochene sogenannte natürliche Zahlreihe, in welcher jede neue Zahl durch Hinzufügung einer Einheit zu der zuletzt gebildeten entsteht, und die an sich auch nicht natürlicher ist als das dekadische System, besitzen wir tatsächlich auch nur so weit, wie ihre Glieder mit Namen versehen sind. — Die Zahl zehn ist von den meisten Völkern als Grundzahl des Systems gewählt worden in Anlehnung an die Zahl unserer Finger; es finden sich als Grundzahlen aber auch fünf, zwanzig, sechzig, sogar elf. Näheres siehe bei Cantor, Vorlesungen I, Einleitung, S. 8, wo auch weitere Literatur über diesen Gegenstand angegeben ist, namentlich Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile, Halle 1847, und Pott, Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode, Halle 1868. Wir werden in § 12D dieses Kapitels sehen, daß für das Rechnen ein System mit der Grundzahl zwölf dem dekadischen System noch vorzuziehen wäre.

zum vollen Verständnis der indischen Schreibweise ist aber schon eine gewisse Kenntnis arithmetischer Operationen erforderlich. Der Wunsch, die aus praktischen Bedürfnissen hervorgehenden Rechnungen mit den dekadischen Zahlen möglichst einfach und vorteilhaft auszuführen, hat wohl den ersten Anstoß zur Aufsuchung arithmetischer Regeln geliefert.[1]) Wir werden deshalb zunächst die einfachsten Rechenoperationen und ihre Gesetze für die eigentlich vorstellbaren Zahlen[2]) entwickeln und erst dann (in § 10) genauer auf die systematischen, insbesondere die dekadischen, Zahlen eingehen.

Will man in einer Aussage den Wert einer Zahl unbestimmt lassen, sei es, daß die Aussage für jede beliebige Zahl gilt, sei es, daß man die Zahl noch nicht kennt, für welche sie richtig ist, so benutzt man als Zahlzeichen einen Buchstaben, wobei aber während einer Rechnung derselbe Buchstabe immer dieselbe Zahl bedeuten soll.[3]) Im ersten Kapitel wird unter einer Zahl im allgemeinen nur eine natürliche Zahl verstanden; die hier verwendeten Buchstaben sollen also, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist, auch nur solche symbolisieren.

§ 2. Vergleichung der Zahlen.

Jeder Vielheit A, d. h. jeder Menge von Objekten, von deren besonderer Natur wir gänzlich absehen, entspricht eine, aber auch nur eine bestimmte Zahl a. Zwei solche Vielheiten A und B, deren Anzahlen a und b sind, nennen wir gleichzahlig oder kürzer auch gleich, und wir schreiben $a = b$[4]), falls beiden dieselbe Zahl zukommt, a und b

---

1) M. Cantor (Vorlesungen I, S. 6) drückt diese Tatsache mit den Worten aus, „daß zur Zeit, als die meisten Zahlwörter erfunden wurden, der Mensch von dem einfachsten Zählen bereits zum Rechnen fortgeschritten war".

2) Die Eins eingeschlossen; das Rechnen mit Null soll erst in § 10, wo wir die Null notwendig gebrauchen, erörtert werden.

3) Einzelne Spuren einer Bezeichnung unbestimmter Zahlen durch Buchstaben finden sich bereits bei den Griechen (Aristoteles, Pappus, Diophantus) und bei den Indern. Durchgehend hat aber zuerst der Dominikaner-General Jordanus Nemorarius († 1237) in seiner Arithmetik mit Buchstaben gerechnet. Es fehlen ihm aber noch Zeichen für die Rechenoperationen und auch das Gleichheitszeichen, so daß seine Entwicklungen der Durchsichtigkeit ermangeln; man könnte ihn sonst, sagt Cantor (Vorlesungen II, S. 62), den unmittelbaren Vater der späteren Buchstabenrechnung nennen, als welchen man gewöhnlich den französischen Algebraiker François Viète (In artem analyticam isagoge 1591) bezeichnet.

4) Das Zeichen „=" findet sich zuerst bei R. Recorde („The whetstone of witte", London 1557), welcher es gewählt hat, „weil nichts einander gleich sein kann als zwei kleine parallele Striche". Diophant benutzte den Anfangsbuchstaben, arabische Mathematiker den Endbuchstaben des „gleich" bedeutenden Wortes, Viète bediente sich des lateinischen Zeitworts „aequare", aus dessen

also nur verschiedene Zeichen für dieselbe Zahl sind. Die Aussage $a = b$ heißt eine Gleichung. Von gleichen natürlichen Zahlen kann man überhaupt nur reden, insofern als man sich jede Zahl wie auch jeden andern Begriff beliebig oft vorstellen kann. Es ist deshalb selbstverständlich, daß man, wenn a und b natürliche Zahlen sind, und wenn $a = b$, in jeder Aussage a durch b und umgekehrt auch b durch a ersetzen kann; also folgt von selbst aus $a = b$ und $b = c$ auch $a = c$. Man erkennt ferner leicht[1]), daß dann und nur dann, wenn $a = b$, sich jedem Objekte der Menge A ein Objekt der Menge B zuordnen läßt und umgekehrt jedem Objekte von B auch eins von A.[2])

Sind A und B nicht gleichzahlig, so läßt sich eine dieser beiden Vielheiten, z. B. A, in zwei Gruppen zerlegen, deren eine B gleich-

---

beiden ersten Buchstaben Descartes das Zeichen ∞ gebildet hat. Erst allmählich (während des 17. Jahrhunderts) hat das Zeichen $=$ die übrigen verdrängt. Die Zeichen $>$ und $<$ für „größer" bezüglich „kleiner" kommen zuerst bei Th. Harriot (Artis analyticae praxis, London 1631) vor.

1) Vgl. auch G. Cantor, Mathem. Annal. Bd. 46, S. 482 u. 483.

2) Dieses hinreichende und notwendige Kriterium für die Gleichzahligkeit zweier Vielheiten wird in fast allen neueren Darstellungen der Arithmetik als Definition der Gleichzahligkeit verwendet. Wir sind von diesem Gebrauche abgewichen und auch hier dem Vorgange Husserls (und auch G. Cantors) gefolgt, weil einerseits rein begrifflich die Möglichkeit der gegenseitigen eindeutigen Zuordnung doch nicht genau dasselbe ist wie die Gleichzahligkeit (beides sind, um in der Sprache der Logik zu reden, Begriffe von gleichem Umfange, aber nicht von gleichem Inhalt), und weil andrerseits praktisch das Kriterium seine Verwendung nur auf einer Kulturstufe finden dürfte, auf welcher die Unterscheidung und Benennung der Zahlen noch wenig entwickelt ist und die Ermittlung einer größeren Zahl deshalb Schwierigkeiten bietet. Aus gleichen Gründen haben wir auch nicht (wie es z. B. in den Lehrbüchern von E. Schröder, O. Stolz, H. Weber geschieht) die Definition der Zahl selbst auf dieses Kriterium für die Gleichzahligkeit gegründet. Die genannten Mathematiker fassen alle Mengen, deren Glieder sich gegenseitig eindeutig zuordnen lassen, zu einer Klasse zusammen und definieren dann die Zahl als das allen Mengen einer Klasse Gemeinsame, gewissermaßen als die Invariante der Klasse. Dies ist aber, wie nach unsrer Ansicht Husserl mit Recht bemerkt, gar nicht der wirkliche Sinn einer Zahlenaussage. „Nennen wir eine Menge vor uns liegender Nüsse darum vier, weil sie einer gewissen Klasse von unendlich vielen Mengen angehört, die sich wechselseitig in eindeutige Korrespondenz setzen lassen? Wohl niemand hat hierbei jemals solche Gedanken, und kaum fänden wir überhaupt praktische Anlässe, uns für dergleichen zu interessieren. Was uns in Wahrheit interessiert, das ist der Umstand, daß eine Nuß und eine Nuß und eine Nuß und eine Nuß da ist. Diese ungeschickte und umständliche Vorstellung gestalten wir sofort für Denken und Sprechen bequemer, indem wir sie unter Vermittlung der allgemeinen Mengenform eins und eins und eins und eins, welche den Namen vier hat, denken. Hierbei erhält das unbestimmte eins seine Determination durch den zum Zahlnamen gefügten Gattungsnamen Nuß." Auch G. Cantor (Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschr. f. Philosophie u. philosoph. Kritik, Bd. 91, S. 55, Anm.) sagt ausdrücklich: „Zur Bildung des Allgemeinbegriffs ‚fünf' bedarf es nur einer Menge, welcher diese Kardinalzahl zukommt."

zahlig ist. In diesem Falle sagt man, a sei größer als b, in Zeichen $a > b$, oder auch, b sei kleiner als a, in Zeichen $b < a$. Eine solche Aussage heißt Ungleichung. Um auszudrücken, daß a entweder größer oder kleiner als b, jedenfalls nicht gleich b ist, schreiben wir $a \gtrless b$.

§ 3. Addition.

A. Begriff der Summe.

Liegen irgendwelche Mengen $A, B, C, \ldots N$ von beliebigen Objekten vor, so können wir uns dieselben zu einer Menge S vereinigt denken, welche die sämtlichen Objekte der einzelnen Mengen, aber keine andern enthält. Wenn es uns nur auf die den Mengen $A, B, C, \ldots N$ entsprechenden Zahlen $a, b, c, \ldots n$ ankommt, so abstrahieren wir vollkommen von der Natur der einzelnen Objekte, betrachten jedes nur als ein „etwas" oder „eins" und finden die der resultierenden Menge S zukommende Anzahl, indem wir die Einheiten von $a, b, c, \ldots n$ zu einer Zahl s vereinigen. Diese Operation bezeichnet man als Addition, die gegebenen Zahlen als Summanden, das Resultat als Summe. Das Zeichen für die Addition ist $+$[1]), die Summe der Zahlen $a, b, c, \ldots n$ wird also $a + b + c + \cdots + n$ geschrieben. Das Urteil, daß die so gebildete Zahl s ist, wird durch die Gleichung $a + b + c + \cdots + n = s$ ausgedrückt. Zu einer Summe können beliebig viele Zahlen vereinigt werden.

B. Unabhängigkeit des Wertes einer Summe von der Anordnung der Summanden.

Statt durch einen einzigen Denkakt die Einheiten der Zahlen $a, b, c, \ldots n$ gleichzeitig zu einer Zahl zu vereinigen, können wir in mannigfacher Art auch schrittweise vorgehen, indem wir irgendwelche Summanden für sich addieren und dann die erhaltenen Teilsummen vereinigen, wenn nur bei diesem Verfahren jeder Summand einmal, aber auch nur einmal berücksichtigt wird. In der Schrift unterscheiden wir diese verschiedenen Möglichkeiten der Summenbildung durch die Anwendung von Klammern.[2]) Wir schließen die durch Addition einiger der gegebenen Zahlen entstandenen Teilsummen in runde Klammern ein, die durch Addition solcher Teilsummen entstandenen Teilsummen

1) Es ist nachweisbar seit dem Ende des 15. Jahrhunderts und vielleicht aus dem t des Wörtchens et entstanden. Näheres siehe Cantor, Vorlesungen II, S. 230.

2) Eckige und geschweifte Klammern hat zuerst François Viète (1593), runde Albert Girard (1629) verwendet. Vgl. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. I, S. 139.

zweiter Ordnung in eckige Klammern, die durch Addition der Teilsummen zweiter Ordnung entstandenen weiteren Summen in geschweifte Klammern. Mit diesen Klammern reicht man im allgemeinen aus, in besonderen Fällen führt man noch andere, sich von ihnen irgendwie unterscheidende Klammern ein. Unter Benutzung dieser Zeichen kann man einige der Möglichkeiten, die Summe von etwa fünf Zahlen a, b, c, d, e zu bilden, folgendermaßen andeuten:

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e \quad \text{oder} \quad [(a+b)+(c+d)]+e$$
$$\text{oder} \quad [c+(a+e)]+(b+d) \quad \text{usw.}$$

Um ein Übermaß von Klammern zu vermeiden, hat man das Übereinkommen[1]) getroffen, in dem Falle die Klammern gänzlich fortzulassen, wenn zur Summe der beiden zuerst hingeschriebenen Zahlen die dritte addiert, zu der so erhaltenen Summe die vierte hinzugefügt und in dieser selben Weise fortschreitend verfahren werden soll, so daß also $a+b+c+d+e$ stets dasselbe bedeutet wie $\{[(a+b)+c]+d\}+e$.

Da bei all diesen verschiedenen Methoden, gegebene Zahlen $a, b, c, \ldots n$ zu addieren, die resultierende Zahl immer wieder die kollektive Vereinigung der Einer aller Summanden ist und wir bei der Bildung des Anzahlbegriffes (in § 1) von der Gruppierung der Einer ausdrücklich abstrahiert haben, so liefern die verschiedenen Verfahren der Summenbildung stets dasselbe Ergebnis, in anderen Worten: die aus denselben Zahlen gebildeten, sich nur durch die Reihenfolge der Summanden und die Stellung der Klammern unterscheidenden Summen sind einander gleich. Von den so entstehenden Gleichungen heben wir die beiden folgenden hervor:

(I) $$a+b=b+a,$$

(II) $$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Gleichung (I) bezeichnet man als das kommutative, Gleichung (II) als das assoziative Gesetz der Addition.[2]) Die Wichtigkeit dieser Gleichungen beruht darauf, daß bei der Addition (und auch bei analogen Operationen) anderer als der natürlichen Zahlen, wo die Unabhängigkeit des Summenwertes von der Art der Summenbildung nicht unmittelbar einleuchtet, diese Unabhängigkeit für beliebig viele

1) Ausführlicheres über den Gebrauch der Klammern siehe Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra (Leipzig 1873), S. 214 ff.

2) Diese Namen sind in Deutschland von Hankel in seiner „Theorie der komplexen Zahlensysteme", S. 3, eingeführt worden. Die Wörter „kommutativ" und (das § 5 zu erklärende) „distributiv" stammen (nach Hankel) von Servois (Gergonnes Ann., Bd. V, 1814, S. 93), „assoziativ" wahrscheinlich von Hamilton.

Summanden sofort erschlossen werden kann, sobald nur die Richtigkeit der Gleichungen (I) und (II) feststeht. Um in den verschiedenen Fällen später darauf verweisen zu können, wollen wir diesen Satz schon jetzt begründen, wenn er auch für die Addition der natürlichen Zahlen nach dem Vorhergehenden überflüssig ist.

Zum Beweise bedienen wir uns eines oft anzuwendenden Schlußverfahrens, welches man als den Schluß von n auf $n+1$ oder die Methode der vollständigen Induktion bezeichnet.[1]) Wenn man erstens weiß, daß eine Aussage, in welcher eine unbestimmte Zahl x vorkommt, für $x = n + 1$ sicher richtig ist, sobald ihre Gültigkeit nur für $x = n$ feststeht, wo n irgend eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, und wenn man zweitens weiß, daß die Aussage wahr ist für $x = a$, wo a eine bestimmte natürliche Zahl bezeichnet, so schließt man, daß der Satz auch richtig bleibt, wenn man für x irgend eine natürliche Zahl einsetzt, die größer als a ist. Die Bündigkeit dieser Schlußmethode beruht auf der Tatsache, daß jede Zahl, die größer als a ist, durch wiederholte Addition von 1 zu a erhalten werden kann.[2])

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ mögen Elemente eines Systems von Größen sein (an dieser Stelle bezeichnen also die Buchstaben nicht nur natürliche Zahlen), für welche die Summe zweier als bestimmte Größe desselben Systems definiert ist, und für welche der Satz gilt: „Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich." Wir zeigen zunächst, daß, wenn für irgend drei Größen dieses Systems das assoziative Gesetz gilt, es auch für beliebig viele von ihnen richtig ist. Angenommen, das Gesetz stehe schon fest für $3, 4, 5, \ldots n$ Summanden, d. h. wir setzen voraus, daß, wenn wir in einer Reihe von höchstens n Größen, ohne jemals ihre Reihenfolge zu verändern, beliebig viele Paare aufeinanderfolgender summieren, sodann zwei solche aufeinanderfolgenden Summen, resp. eine solche Summe und eine benachbarte einzelne Größe, resp. zwei benachbarte einzelne Größen durch Addition verbinden und so fortfahren, bis endlich die beiden zuletzt erhaltenen Teilsummen (bezüglich eine Summe und ein einzelnes

1) Diese Methode ist zuerst von Maurolycus aus Messina in seiner Arithmetik (1575) angewendet worden. Von ihm hat Pascal (1662), der eine Zeit lang als Erfinder dieses Schlußverfahrens galt, es erst kennen gelernt. Vgl. Zeitschr. f. mathemat.-naturwissenschaftl. Unterricht, Bd. 33 (1902), S. 536.

2) Da jede Zahl, die größer als a ist, sich aus a durch Hinzufügung irgend einer natürlichen Zahl z herleiten läßt und da $a + z = a + (\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{z \text{ Summanden}})$, so setzen wir hier schon (und nach dem Vorhergesagten sind wir dazu berechtigt) das assoziative Gesetz für den speziellen Fall $a + (1 + 1 + \cdots + 1) = a + 1 + 1 + \cdots + 1$ voraus.

Glied) durch Addition zu einer Größe vereinigt werden, das Endergebnis bei allen zulässigen Arten der Summenbildung dasselbe ist. Wir dürfen alsdann jede nach einer der erlaubten Methoden gebildete Summe der r Größen $a_1, a_2, \ldots a_r$ (r bedeutet irgend eine der Zahlen $3, 4, \ldots n$) durch das gleiche Symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ bezeichnen. Unter allen in der angegebenen Art aus $(n+1)$ Größen $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ zu bildenden Summen könnten dann nur noch die folgenden voneinander verschieden sein:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}), \\ s_2 &= (a_1 + a_2) + (a_3 + \cdots + a_{n+1}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_\nu &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu) + (a_{\nu+1} + \cdots + a_{n+1}), \\ s_{\nu+1} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + a_{\nu+1}) + (a_{\nu+2} + \cdots + a_{n+1}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Daß aber tatsächlich je zwei aufeinanderfolgende, also (nach der für das Größensystem gemachten Voraussetzung) alle untereinander gleich sind, erkennt man leicht folgendermaßen:

Man setze zur Abkürzung

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu = A_\nu \quad \text{und} \quad a_{\nu+2} + \cdots + a_{n+1} = B_{\nu+2};$$

alsdann ist

$$s_\nu = A_\nu + (a_{\nu+1} + B_{\nu+2}).$$

Nach der für drei Größen gemachten Voraussetzung folgt hieraus

$$s_\nu = (A_\nu + a_{\nu+1}) + B_{\nu+2} = s_{\nu+1}.$$

Nach dem Satze von der vollständigen Induktion ergibt sich also jetzt die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes für beliebig viele Größen des Systems $a_1, a_2, \ldots$.

Wir beweisen nunmehr, daß, wenn für drei (also auch für beliebig viele) Größen unseres Systems das assoziative und für zwei das kommutative Gesetz gilt, das letztere auch für beliebig viele richtig ist. Da, wie leicht ersichtlich, die Vertauschung zweier beliebigen Summanden auf wiederholte Vertauschungen zweier benachbarten zurückgeführt werden kann, so brauchen wir nur zu zeigen, daß die beiden Summen

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} + a_\nu + a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \cdots + a_n$$

und

$$s' = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} + a_{\nu+1} + a_\nu + a_{\nu+2} + \cdots + a_n$$

einander gleich sind.

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} = A_{\nu-1} \quad \text{und} \quad a_{\nu+2} + \cdots + a_n = B_{\nu+2},$$

so ist

$$s' = A_{\nu-1} + (a_{\nu+1} + a_\nu) + B_{\nu+2},$$

oder, da nach der Voraussetzung

$$a_{\nu+1} + a_\nu = a_\nu + a_{\nu+1},$$

$$s' = A_{\nu-1} + (a_\nu + a_{\nu+1}) + B_{\nu+2},$$

also $$s' = s.$$[1]

Damit ist also für unser Größensystem $(a_1, a_2, \ldots)$ unter den gemachten Voraussetzungen der Satz bewiesen:

„Wenn man aus einer Reihe von beliebig vielen Größen des Systems irgend eine Anzahl herausgreift und in beliebiger Reihenfolge zu einer Summe vereinigt und diese Summe statt der herausgegriffenen Glieder in die Reihe einfügt, so erhält man eine Reihe von weniger Gliedern als vorher, auf welche sich das nämliche Verfahren anwenden läßt. Fährt man so lange fort, bis man statt der ursprünglichen Reihe nur noch eine einzige Größe hat, so ist diese die Summe der gegebenen Größen und ihr Wert vollkommen unabhängig von der Art der Summenbildung."[2]

C. Sätze über Ungleichungen.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergeben sich eine Reihe von Folgerungen in bezug auf Ungleichungen.

I. Wenn

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} + a_\nu + a_{\nu+1} + \cdots + a_n,$$[3]

so kann s auch in der Form

$$s = a_\nu + A_\nu$$

geschrieben werden, wenn A_ν die Zahl

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} + a_{\nu+1} + \cdots + a_n$$

bezeichnet, d. h. aber (nach der am Schlusse des § 2 gegebenen Definition)

$$s > a_\nu,$$

1) Der Beweis, daß man auch das erste, bezüglich das letzte mit dem benachbarten Gliede vertauschen darf, ist im wesentlichen derselbe.

2) Der Satz findet sich in ähnlicher Fassung bei E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra, S. 60. Über die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, eine Summe aus beliebig vielen Gliedern zu bilden, vgl. Kap. V, § 1 D.

3) Die Buchstaben bezeichnen jetzt wieder natürliche Zahlen.

in Worten: **Eine Summe ist stets größer als irgend einer ihrer Summanden.**

II. Wenn

$$a_1 > a_2, \quad \text{also} \quad a_1 = a_2 + z_1,$$
$$a_2 > a_3, \quad \text{also} \quad a_2 = a_3 + z_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} > a_n, \quad \text{also} \quad a_{n-1} = a_n + z_{n-1},$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ irgend welche natürliche Zahlen bedeuten, so folgt leicht:

$$a_1 = \{[(a_n + z_{n-1}) + z_{n-2}] + \cdots\} + z_1,$$

oder $a_1 = a_n + Z_{n-1}$, wo $Z_{n-1} = z_{n-1} + z_{n-2} + \cdots + z_1$, also $a_1 > a_n$.

Zu einem entsprechenden Resultat gelangt man, wenn man in allen Ungleichungen das Zeichen $>$ durch das Zeichen $<$ ersetzt.

III. Da

$$a + (b + z) = (a + b) + z > a + b$$

und

$$(a + z) + b = (a + b) + z > a + b,$$

so **vergrößert** (**bezüglich verkleinert**) **sich der Wert einer Summe, wenn einer der Summanden zunimmt** (**bezüglich abnimmt**). Für eine mehrgliedrige Summe ergibt sich derselbe Satz, indem man die sich nicht ändernden Summanden zu einer Teilsumme zusammenfaßt. Aus dem Satze können wir den wichtigen Schluß ziehen, daß, wenn

$$a + b = a + b',$$

notwendig

$$b = b'$$

sein muß; denn wäre

$$b \gtrless b',$$

so ergäbe sich

$$a + b \gtrless a + b'.$$

IV. Wenn

$$a > b, \quad \text{also} \quad a = b + z$$

und

$$a' > b', \quad \text{also} \quad a' = b' + z',$$

so folgt

$$a + a' = b + b' + (z + z'),$$

d. h.

$$a + a' > b + b'.$$

Ebenso ergibt sich aus $a < b$ und $a' < b'$ auch

$$a + a' < b + b'.$$

In Worten: Ungleichungen mit übereinstimmenden Ungleichheitszeichen können addiert werden, indem man ihre linken Seiten und ihre rechten Seiten addiert und die erste Summe mit der zweiten durch dasselbe Ungleichheitszeichen verbindet.[1])

§ 4. Subtraktion.

A. Definition der Subtraktion.

Wenn die Zahl a größer ist als die Zahl b, so läßt sich (s. § 2) a stets als eine Summe auffassen, deren einer Summand b und deren anderer Summand eine durch a und b vollkommen bestimmte Zahl c ist. Daß nicht mehr als eine solche Zahl c existieren kann, ergibt sich aus dem Satze, daß, wenn $b + c' = b + c$, notwendig $c' = c$ sein muß (§ 3, C III). Diese Zahl c nennt man den Unterschied oder die Differenz der Zahlen a und b, und man schreibt, um ihre Beziehung zu a und b in Zeichen auszudrücken, $c = a - b$[2]), in Worten: a weniger b oder a minus b; a heißt der Minuend, b der Subtrahend, und die Operation der Aufsuchung von c heißt Subtraktion. $a - b$ bedeutet also diejenige Zahl, welche, mit b zu einer Summe vereinigt, a ergibt, in Zeichen

$$b + (a - b) = a$$

oder

$$(a - b) + b = a.$$

Aus der Definition der Subtraktion folgt unmittelbar $(a + b) - b = a$. Die beiden letzten Gleichungen lehren, daß, wenn man von einer Zahl a erst eine Zahl b subtrahiert und dann dieselbe Zahl b addiert, oder wenn man zuerst b addiert und dann b subtrahiert, die ursprüngliche Zahl a ungeändert bleibt; Subtraktion und Addition derselben Zahl heben sich also gegenseitig auf. Die Subtraktion heißt deshalb die zur Addition inverse (umgekehrte) Rechenoperation. Sie ist stets dann, und zwar nur auf eine Art, ausführbar, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend.

---

1) Selbstverständlich ist nach der in § 2 gegebenen Definition der Gleichheit zweier natürlichen Zahlen, daß wenn $a = a'$ und $b = b'$, auch $a + b = a' + b'$ sein muß.

2) Das Zeichen „—" findet sich (gleichzeitig mit dem Zeichen +) zuerst am Ende des 15. Jahrhunderts (bei Joh. Widmann in Deutschland, bei Lionardo da Vinci in Italien). Aber noch 100 Jahre später gebraucht Viète (und nach ihm noch Girard) auch das Zeichen $=$, welches zwischen zwei Zahlen gesetzt, den absoluten Wert der Differenz angab, gleichgültig welche der beiden Zahlen die größere war.

B. Beziehungen zwischen Summen und Differenzen.

(I) $$(a + b) - c = a + (b - c).$$

(II) $$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

(III) $$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

(IV) $$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

(V) $$(a - c) - (b - c) = a - b.$$

(VI) $$(a - c) + (b - d) = (a + b) - (c + d).$$

Diese Gleichungen gelten, wenn a, b, c, d irgend welche natürliche Zahlen bedeuten und in jeder vorkommenden Differenz der Minuend größer ist als der Subtrahend. Die Beweise ergeben sich sehr einfach aus der Definition der Differenz, dem Assoziationsgesetz für eine Summe und für (III) und (V) aus der vorher bewiesenen Gleichung (I).

Um z. B. die Richtigkeit von (I) nachzuweisen, haben wir nur zu zeigen, daß die Summe aus dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung und der Zahl c gleich $a + b$ ist. Nun hat man aber

$$[a + (b - c)] + c = a + [(b - c) + c] = a + b.$$

Um (III) nachzuweisen, bilden wir die Summe

$$\begin{aligned}[(a - b) + c] + (b - c) &= [(a - b) + c + b] - c \qquad \text{(nach (I))}\\ &= [(a - b) + b + c] - c\\ &= [a + c] - c\\ &= a.\end{aligned}$$

Die übrigen Gleichungen werden ganz ähnlich bewiesen.

Um möglichst wenig Klammern zu gebrauchen, erweitern wir das § 3 B angegebene Übereinkommen auch auf den Fall, daß Subtraktionen und Additionen abwechseln, so daß $a + b - c$ dasselbe bedeuten soll wie $(a + b) - c$, $a - b + c$ dasselbe wie $(a - b) + c$ usw.

§ 5. Multiplikation.

A. Begriff des Produktes.

$A_1, A_2, \ldots A_b$ mögen Mengen von je a untereinander gleichartigen Objekten bedeuten, d. h. von Dingen, welche in den im Mittelpunkte des Interesses stehenden Eigenschaften übereinstimmen. Insofern als wir von den sonstigen Unterschieden dieser Mengen abstrahieren, können wir sie als gleich ansehen, jede mit ein- und demselben

Buchstaben A bezeichnen und ihre Summe $\overbrace{A + A + \cdots + A}^{(b \text{ Summanden})}$ schreiben. Da derartige Summen, in welchen die sämtlichen Summanden einander gleich sind, häufig vorkommen, hat man für sie eine abgekürzte Schreibweise, nämlich $A \times b$ oder $A \cdot b$ oder auch Ab und auch einen besonderen Namen, Produkt, eingeführt.[1]) Den wiederholt zu setzenden Summanden A nennt man Multiplikand, die Anzahl b der Glieder der Summe Multiplikator[2]), und die Rechenoperation, durch welche aus beiden das Produkt gebildet wird, heißt Multiplikation.[3]) Die der Menge $A \cdot b$ zukommende Zahl ist $\overbrace{a + a + \cdots + a}^{(b \text{ Summanden})}$, wofür man in gleicher Weise $a \times b$ oder $a \cdot b$ setzt. Sind Multiplikand und Multiplikator bestimmte Zahlen, so ist ein Zeichen für die Multiplikation (entweder $\times$ oder $\cdot$) nicht zu entbehren, weil man der bloßen Nebeneinanderstellung zweier bestimmten Zahlen eine andere Bedeutung (siehe § 10) gegeben hat.

Der Multiplikand kann irgend eine Menge von Objekten, d. h. eine benannte Zahl, oder auch eine unbenannte Zahl sein; der Multiplikator ist seiner Natur nach stets ein Aggregat von lauter Einsen, also eine unbenannte Zahl. Wir beschäftigen uns nunmehr mit Produkten, in welchen sowohl der Multiplikand wie der Multiplikator unbenannte Zahlen sind.[4])

1) Das Multiplikationskreuz stammt von Oughtred (Clavis mathematica, 1631). Der Punkt wurde zuerst von Leibniz (1693) verwendet und ist dann durch die Lehrbücher Chr. v. Wolffs das häufigste Multiplikationszeichen geworden. Vgl. Cantor, Vorlesungen II, S. 721 und J. Tropfke, Gesch. d. Elementarmathematik I, S. 135—137.

2) Man setzt auch den Multiplikator vor den Multiplikand; ein allgemein gültiges Übereinkommen über die Stellung beider gibt es nicht.

3) Solange wir im Gebiete der eigentlich vorstellbaren Zahlen bleiben, handelt es sich hier nur um eine abgekürzte Bezeichnung, aber nicht um eine Abkürzung der Rechnung. Die in diesem und den folgenden Paragraphen abzuleitenden arithmetischen Gesetze werden uns erst gestatten, die eigentlich auszuführende Summation für symbolisch vorgestellte Zahlen, z. B. die dekadischen, durch eine viel kürzere Rechnung zu ersetzen. (Vgl. § 10.)

4) In neuerer Zeit hat Capelli (Sull' ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell' Aritmetica, Napoli 1900, und Elementi di aritmetica ragionata e di algebra, Napoli 1902) das Produkt zweier Zahlen a, b als die Anzahl definiert, welche derjenigen Menge zukommt, die man erhält, wenn man jedes Objekt einer Menge von der Anzahl a mit jedem Objekt einer Menge von der Anzahl b kombiniert. Capelli geht von dieser Definition aus, um aus gewissen, mir aber nicht triftig erscheinenden Gründen die Multiplikation unabhängig von der Addition und vor derselben behandeln zu können. Vorher (1895) hatte schon G. Cantor in der bereits zitierten Abhandlung „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“ (Math. Ann. Bd. 46, S. 485) ganz ebenso die Multiplikation der Mächtigkeiten zweier Mengen definiert.

B. Kommutatives und assoziatives Gesetz.

Nach der Definition des Produktes ist

$$a \cdot b = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{(b \text{ Summanden})}$$

$$= \overbrace{(\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{(a \text{ Summanden})}) + (\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{(a \text{ Summanden})}) + \cdots + (\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{(a \text{ Summanden})})}^{(b \text{ Teilsummen})}.$$

Da der Wert einer Summe von der Anordnung der Summanden unabhängig ist, kann man die Summe auch in der Art bilden, daß man aus jeder Teilsumme zunächst eine Eins herausgreift und diese Einsen zusammenzählt, sodann aus jeder Teilsumme eine zweite Eins nimmt und diese Einsen addiert und so fortfährt, bis die sämtlichen Einsen berücksichtigt sind. Man erhält auf diese Weise:

$$a \cdot b = \overbrace{(\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(b \text{ Summanden})}) + (\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(b \text{ Summanden})}) + (\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(b \text{ Summanden})}) + \cdots + (\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(b \text{ Summanden})})}^{(a \text{ Teilsummen})},$$

$$a \cdot b = \overbrace{b + b + b + \cdots + b}^{(a \text{ Summanden})},$$

(I) $$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}.$$

Die hiermit bewiesene Formel heißt das kommutative Gesetz für die Multiplikation.

Es besagt, daß Multiplikand und Multiplikator miteinander vertauscht werden dürfen; man hat deshalb für beide einen gemeinsamen Namen, nämlich Faktor, eingeführt. Häufig nennt man auch einen der beiden Faktoren, gewöhnlich denjenigen, welchem in der betreffenden Rechnung das geringere Interesse zugewendet ist, den Koeffizienten des andern, namentlich die bestimmte Zahl in einem Produkte aus einer bestimmten und einer unbestimmten Zahl. So heißt 5 der Koeffizient von a in dem Produkte $5a$.

Das Produkt $1 \cdot a$ ist nach der Definition gleich $\overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{(a \text{ Summanden})}$, hat also den Wert a. Das Zeichen $a \cdot 1$ hat zunächst gar keine Bedeutung, weil der Begriff der Summe wenigstens zwei Summanden voraussetzt. Wollen wir $a \cdot 1$ auch als ein Produkt betrachten, so dürfen wir, damit auch für dieses Produkt das kommutative Gesetz gelte, darunter nichts anderes verstehen als a. Wir setzen also fest, daß durch Multiplikation mit 1 sich der Wert einer Zahl nicht ändern soll.

Die durch Multiplikation zweier Zahlen gefundene Zahl können wir natürlich wieder mit einer dritten Zahl multiplizieren, aus den drei Zahlen a, b, c beispielsweise die Produkte bilden:

$$(ab)c \quad \text{oder} \quad a(bc) \quad \text{oder} \quad (ac)b \quad \text{oder} \quad a(bc) \text{ usw.}$$

Es ist

$$(a\cdot b)\cdot c = \overbrace{\overbrace{(a+a+\cdots+a)}^{(b\ \text{Summanden})} + \cdots + \overbrace{(a+a+\cdots+a)}^{(b\ \text{Summanden})}}^{(c\ \text{Teilsummen})}$$

Die Summe auf der rechten Seite hat $\overbrace{b+\cdots+b}^{(c\ \text{Summanden})} = bc$ Summanden. Da jeder Summand gleich a ist, kann sie $a(bc)$ geschrieben werden. Damit ist also die Gleichung

(II) $$(ab)c = a(bc),$$

das Assoziationsgesetz für die Multiplikation, bewiesen.

Die wiederholte Anwendung der beiden Formeln

$$a\cdot b = b\cdot a \quad \text{und} \quad (ab)\cdot c = a\cdot(bc)$$

ergibt zunächst die Gleichheit aller Produkte, die man aus drei Zahlen a, b, c bilden kann. Durch dasselbe Beweisverfahren aber, mit Hilfe dessen wir in § 3 B aus der Gültigkeit des Assoziationsgesetzes für drei Summanden die für beliebig viele und aus der Gültigkeit des Assoziationsgesetzes und der des Kommutationsgesetzes für zwei Summanden die Richtigkeit des letzteren für beliebig viele gefolgert haben, können wir jetzt die Gültigkeit beider Gesetze auch für ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren erschließen. In dem § 3 B gegebenen Beweise braucht man nur die Wörter „addieren", „Summand", „Summe" überall durch „multiplizieren" bezüglich „Faktor" bezüglich „Produkt" und das Additions- durch das Multiplikationszeichen zu ersetzen, während sonst der Text wörtlich derselbe bleibt. Die Anwendung beider Gesetze führt zu folgendem allgemeinen, dem § 3 B für die Addition ausgesprochenen ganz analogen Satze:

„Wenn man aus einer Reihe von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ irgend zwei zu einem Produkte vereinigt und dieses Produkt statt der beiden Zahlen in die Reihe einsetzt, so entsteht eine Reihe von $(n-1)$ Zahlen. Faßt man auch aus dieser irgend zwei zu einem Produkte zusammen, so bleiben $n-2$ übrig. Wenn man nun in gleicher Weise fortfährt, bis man statt der ursprünglichen Reihe nur noch eine einzelne Zahl hat, so ist diese unabhängig von der Auswahl, die man bei den einzelnen Schritten getroffen hat; sie kann

kurz als das Produkt der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ bezeichnet und $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ geschrieben werden."

Von diesem Satze macht man z. B. Gebrauch, wenn die Faktoren eines Produktes zum Teil bestimmte, zum Teil unbestimmte Zahlen sind. Man pflegt alsdann die bestimmten Zahlen zunächst zu einem Produkte zu vereinigen und die erhaltene Zahl als Faktor (Koeffizient) vor das Produkt der unbestimmten Faktoren zu setzen, z. B.

$$2a \cdot 3b = 6ab.$$

C. Distributives Gesetz.

Die Verknüpfung mehrerer Zahlen durch Addition und Multiplikation führt zu neuen Beziehungen und Sätzen. Da aber bei derartigen zusammengesetzten Operationen das Resultat von der Reihenfolge der Rechnungen nicht mehr unabhängig ist, muß man zur Verhütung von Mißverständnissen die zuerst zu verknüpfenden Zahlen für sich in Klammern schließen, die so erhaltenen Ergebnisse und die mit diesen zu verknüpfenden Zahlen wieder in größere Klammern usw. Um aber eine Häufung von Klammern möglichst zu vermeiden, erweitert man das in den §§ 3 B und 4 B angegebene Übereinkommen über die Fortlassung von Klammern in folgender Weise. Indem man die Addition und Subtraktion als Operationen erster Stufe, die Multiplikation sowie die (§ 6 einzuführende) Division als Operationen zweiter Stufe bezeichnet, setzt man fest, daß die Klammern in zwei Fällen fortgelassen werden dürfen:

1. wenn ein Rechnungsausdruck nur Operationen derselben Stufe enthält und die Verknüpfungen in der hingeschriebenen Reihenfolge fortschreitend vorgenommen, d. h. die erste Zahl mit der zweiten, das Ergebnis mit der dritten usw. verknüpft werden soll;
2. wenn beim Zusammentreffen von Operationen verschiedener Stufen die Operation der höheren Stufe zuerst ausgeführt werden soll. Z. B. bedeutet $a \cdot b + c$ dasselbe wie $(a \cdot b) + c$. Soll zuerst die Summe $b + c$ gebildet werden, so hat man $a(b + c)$ zu schreiben.[1])

1) Die Fälle, in denen Klammern zu setzen sind, bezüglich fortgelassen werden dürfen, hat gründlich und ausführlich unterschieden E. Schröder, Lehrb. d. Arithm. u. Algebra, S. 214 u. ff. Zu bemerken ist allerdings, daß man sich nicht ganz ausnahmslos nach diesen Festsetzungen richtet. $a : bc$ müßte nach der ersten Konvention dasselbe sein wie $(a : b) \cdot c$, und Schröder verlangt das auch. Unzweifelhaft werden aber die meisten Mathematiker $a : bc$ verstehen als $a : (bc)$.

Nach der Definition des Produktes ist

$$(a+b)\cdot c = \overbrace{(a+b)+\cdots+(a+b)}^{(c \text{ Teilsummen})}$$

$$(a+b)\cdot c = \overbrace{(a+\cdots+a)}^{(c \text{ Summanden})}+\overbrace{(b+\cdots+b)}^{(c \text{ Summanden})}$$

(I) $$(a+b)\cdot c = ac + bc.$$

Die Gleichung $(a+b)c = ac + bc$ enthält das distributive[1]) Gesetz der Multiplikation. Sein Beweis ist unabhängig von den beiden anderen Gesetzen.[2]) Ist das kommutative Gesetz nicht schon vorher bewiesen, so folgert man auch direkt aus der Definition des Produktes die Formel

$$c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b.$$

Ferner läßt sich in ganz ähnlicher Weise (oder wenn man will, auch durch Anwendung des Schlusses von n auf $n+1$) die allgemeinere Formel herleiten:

(II) $$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\cdot c = a_1c + a_2c + \cdots + a_nc.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel können wir auch das Produkt zweier Summen als eine Summe darstellen.

Wenn vorgelegt ist das Produkt

$$P = (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_m),$$

so setze man zunächst

$$b_1+b_2+\cdots+b_m = B,$$

so daß

$$P = (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\cdot B.$$

Nach (II) folgt hieraus:

$$\begin{aligned} P &= a_1B + a_2B + a_3B + \cdots + a_nB \\ &= a_1(b_1+b_2+\cdots+b_m)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_m)+a_3(b_1+b_2+\cdots+b_m)+\cdots \\ &\quad + a_n(b_1+b_2+\cdots+b_m), \end{aligned}$$

also:

(III) $$\begin{aligned} P = {} & a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_m \\ & + a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_m \\ & + a_3b_1 + a_3b_2 + \cdots + a_3b_m \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + a_nb_1 + a_nb_2 + \cdots + a_nb_m, \end{aligned}$$

---

1) In bezug auf den Namen vgl. § 3 B, S. 9, Anm. 2.

2) Aus dem distributiven Gesetz kann man leicht auch das assoziative und das kommutative herleiten. Vgl. Schröder, Lehrb. d. Arithm. u. Algebra, S. 91.

d. h. man multipliziert zwei Summen miteinander, indem man jeden Summanden der ersten mit jedem der zweiten multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Ähnliche Formeln erhält man für die Multiplikation einer Differenz mit einer Zahl, mit einer Summe oder mit einer Differenz. Die Gleichung

(IV) $$(a - b) \cdot c = ac - bc$$

läßt sich beweisen, indem man zeigt, daß, wenn zur linken Seite der Subtrahend der rechten addiert wird, sich der Minuend der rechten Seite ergibt. In der Tat ist

$$\begin{aligned}(a - b) \cdot c + bc &= [(a - b) + b]c \quad \text{(nach (I))}\\ &= ac.\end{aligned}$$

Mittels (IV) und der Formeln (II) und (III) des § 4 B beweist man sofort die Gleichungen

(V) $$(a - b) \cdot (c + d) = ac + ad - bc - bd$$

und

(VI) $$(a - b) \cdot (c - d) = ac + bd - ad - bc.$$

Bei (IV), (V), (VI) ist natürlich vorausgesetzt, daß in jeder vorkommenden Differenz der Minuend größer ist als der Subtrahend.

D. Sätze über Ungleichungen.

Wenn

$$b > b', \quad \text{also} \quad b = b' + z,$$

so ist

(I) $$ab = a(b' + z) = ab' + az > ab'.$$

Ändert sich also in einem Produkte aus zwei Faktoren der Wert des einen Faktors, so ändert sich im selben Sinne auch der Wert des Produktes, woraus sich sofort der Satz ergibt: Wenn zwei Produkte aus je zwei Faktoren denselben Wert haben und ein Faktor des einen gleich einem Faktor des andern ist, so muß auch der zweite Faktor des ersten Produkts gleich dem zweiten Faktor des zweiten Produkts sein.

Wenn

$$a > a', \quad \text{also} \quad a = a' + u,$$

und

$$b > b', \quad \text{also} \quad b = b' + z,$$

so folgt:

$$a \cdot b = (a' + u) \cdot (b' + z) = a'b' + a'z + b'u + uz,$$

also:

(II) $$a \cdot b > a' \cdot b'.$$

E. Zusatz. Arithmetische Reihen.

Bisweilen hat man es mit Mengen gleichartiger Objekte zu tun, denen nicht sämtlich dieselbe Anzahl zukommt, deren Anzahlen aber in gewisser einfacher Beziehung zueinander stehen; wir wollen hier von Mengen sprechen, die sich in eine solche Reihenfolge bringen lassen, daß die Anzahl jeder folgenden um den gleichen Betrag, etwa d, größer ist als die der unmittelbar vorhergehenden, so daß, wenn wir die den einzelnen Mengen in dieser Reihenfolge zukommenden Anzahlen mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ bezeichnen,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

ist. Eine Folge derartiger Zahlen bezeichnet man als „arithmetische Reihe“, die einzelnen Zahlen als „Glieder“ dieser Reihe. Unter Anwendung des Hauptgesetzes der Addition, daß der Wert einer Summe unabhängig ist von der Reihenfolge der Summanden (Kap. I, § 3 B), gelingt es sofort, die der Gesamtheit der einzelnen Mengen zukommende Anzahl, also die Summe der Glieder der arithmetischen Reihe, durch ein Produkt (d. h. durch eine Summe aus lauter gleichen Summanden) darzustellen. Ist nämlich

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

so ist auch

$$s = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n+1-\nu} + \cdots + a_2 + a_1,$$

folglich

$$2s = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_\nu + a_{n+1-\nu}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Da allgemein

$$a_\nu = a + (\nu - 1)d$$

und

$$a_{n+1-\nu} = a + (n - \nu)d, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

so ist $a_\nu + a_{n+1-\nu} = 2a + (n-1)\cdot d$, also unabhängig von ν. $2s$ ist demnach durch eine Summe dargestellt, deren sämtliche Summanden denselben Wert $2a + (n-1)d$ haben, während die Anzahl der Summanden n beträgt; wir können also schreiben

$$\mathbf{2s = [2a + (n-1)d] \cdot n.}$$

Beispielsweise ist für $a_1 = 1$ und $d = 1$

$$2s = 2(1 + 2 + \cdots + n) = [2 + (n - 1)] \cdot n = (n + 1) \cdot n$$

und für $a = 1$, $d = 2$

$$2s = 2[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] = [2 + (n - 1)2]n = 2n^2.$$ [1]

§ 6. Division.

A. Definition der Division.

Sind a, b zwei natürliche Zahlen, so kann es eine dritte Zahl c geben, so daß die Gleichung $a = b \cdot c$ erfüllt ist. In diesem Falle sagt man, a sei ein Vielfaches von b, oder b sei ein Teiler von a.

Aus § 5 D (I) folgt, daß jedenfalls nicht mehr als eine solche Zahl c existieren kann. Um die Aufgabe, aus a und b die Zahl c so zu bestimmen, daß $a = bc$, anzudeuten, schreibt man $c = a : b$ [2]), und man nennt a den Dividenden, b den Divisor, c den Quotienten und die Rechnung, durch welche, wenn a und b gegeben sind, c gefunden wird, Division. Die Aufgabe, aus dem Produkte a und dem zweiten Faktor c den ersten Faktor b zu bestimmen, ist wegen des für unbenannte Faktoren gültigen Kommutationsgesetzes dieselbe. Sind dagegen A und B benannte Zahlen, also Mengen gleichartiger Objekte, und bedeutet c eine unbenannte Zahl, so kann man einerseits, wenn A und c gegeben sind, nach der Menge B fragen, die der Gleichung $A = B \cdot c$ genügt, und die man den c^{ten} Teil von A nennt, andrerseits auch, wenn A und B gegeben sind, nach der Zahl c, welche angibt, das Wievielfache von B die Menge A ist oder, wie man sich auch ausdrückt, wie oft B in A enthalten ist. Im ersten Falle nennt man die Division auch Teilung, im zweiten Messung. Im Gebiete der eigentlich vorstellbaren Zahlen dividiert man eine Zahl a durch eine Zahl b, indem man b von den Einheiten der Zahl a zu einer Gruppe zusammenfaßt, von den übrigbleibenden wieder b zu einer Gruppe vereinigt usw. Lassen sich die sämtlichen Einheiten von a zu Gruppen von je b zusammenstellen, ohne daß Einheiten übrig bleiben, so ist die Division $a : b$ ausführbar, und die Anzahl der erhaltenen Gruppen ist der gewünschte Quotient. Für symbolische Zahlen, insbesondere die dekadischen, werden wir später (§ 10) ein viel kürzeres, auf den

1) Aufgaben, in denen nach arithmetischer Reihe geordnete Zahlen vorkommen, finden sich bereits bei den alten Ägyptern und Babyloniern, die Summe der n ersten natürlichen und die der n ersten ungeraden Zahlen in der pythagoreischen Schule. Vgl. Cantor I, S. 40 u. S. 149.

2) Der Doppelpunkt ist von Leibniz (1684) als Zeichen der Division eingeführt worden.

inzwischen abgeleiteten arithmetischen Gesetzen beruhendes Divisionsverfahren kennen lernen.

B. Formeln für die Division.

Nach der Definition des Quotienten ist $a:b$ diejenige Zahl (und zwar, falls es überhaupt eine solche gibt, die einzige), für welche

$$(a:b)\cdot b = a\,^{1)} \quad \text{oder} \quad b\cdot(a:b) = a.$$

Eine Division ist also dann und nur dann richtig ausgeführt, wenn das Produkt aus Quotient und Divisor gleich dem Dividenden ist. Mittels dieses Kriteriums lassen sich leicht die folgenden Gleichungen beweisen:

(I) $$(ab):c = a\cdot(b:c);$$

$$\text{denn} \quad [a\cdot(b:c)]\cdot c = a\cdot[(b:c)\cdot c] = ab.$$

(II) $$a:(bc) = (a:b):c;$$

$$\text{denn} \quad [(a:b):c]\cdot(bc) = \{[(a:b):c]\cdot c\}\cdot b = (a:b)\cdot b = a.$$

(III) $$a:(b:c) = (a:b)\cdot c;$$

$$\text{denn} \quad [(a:b)\cdot c]\cdot(b:c) = [(a:b)\cdot c\cdot b]:c \quad \text{(nach (I))} = [(a:b)\cdot b\cdot c]:c = [a\cdot c]:c = a.$$

(IV) $$(a\cdot c):(b\cdot c) = a:b;$$

$$\text{denn} \quad (a:b)\cdot(bc) = [(a:b)\cdot b]\cdot c = a\cdot c.$$

(V) $$(a:c):(b:c) = a:b;$$

$$\text{denn} \quad (a:b)\cdot(b:c) = [(a:b)\cdot b]:c \quad \text{(nach (I))} = a:c.$$

(VI) $$(a:c)\cdot(b:d) = (a\cdot b):(c\cdot d);$$

$$\text{denn} \quad (a:c)\cdot(b:d)\cdot(c\cdot d) = ab.$$

Die Formeln (I) bis (VI) sind vollkommen analog den Formeln (I) bis (VI) des § 4 B, ebenso ihre Beweise den dort gegebenen.[2])

1) Eine Zahl *a* bleibt also ungeändert, wenn man sie erst durch irgend eine Zahl *b* dividiert und nachher mit derselben Zahl *b* multipliziert. Division und Multiplikation heben sich also gegenseitig auf; man nennt deshalb die Division die zur Multiplikation inverse Operation.

2) Man kann tatsächlich die Gesetze der Addition und Multiplikation einerseits, die der Subtraktion und Division andrerseits rein formal (d. h. ohne auf die Bedeutung der Begriffe Summe, Produkt, Differenz, Quotient einzugehen) gleichzeitig entwickeln. In allgemeiner Weise hat dies zuerst Hankel in seiner

Aus der Definition des Quotienten und den Formeln (II) und (IV) des § 5 C ergeben sich sofort noch zwei diesen Formeln entsprechende Gleichungen:

$$\text{(VII)} \qquad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) : c = (a_1 : c) + (a_2 : c) + \cdots + (a_n : c)$$

und

$$\text{(VIII)} \qquad (a - b) : c = (a : c) - (b : c).$$

Die sämtlichen Formeln dieses Paragraphen haben im Gebiete der natürlichen Zahlen nur dann einen Sinn, wenn bei jeder vorkommenden Division der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist.

§ 7. Potenzieren.

A. Begriff der Potenz.

Wie man für eine Summe aus lauter gleichen Summanden eine abgekürzte Bezeichnung eingeführt hat (§ 5), so schreibt man auch ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, $\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(b \text{ Faktoren})}$, abgekürzt a^b und nennt es eine Potenz[1]), den wiederholt gesetzten Faktor a die

„Theorie der komplexen Zahlensysteme“, Leipzig 1867 (vgl. auch O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. Teil, 3. Abschn.) durchgeführt. Er bezeichnet, wenn ein System von Größen irgend welcher Art vorliegt, eine Verknüpfung unter diesen Größen als eine thetische, wenn sie zu irgend zwei Größen des Systems stets eine, aber auch nur eine dritte liefert, und als zugehörige lytische eine solche Verknüpfung, die aus dem Resultat der Thesis und dem einen Bestandteil den andern ergibt. Die Formeln der §§ 3 und 5 sind richtig für jede thetische Verknüpfung, für welche das assoziative Gesetz bei drei und das kommutative bei zwei beliebigen Größen gelten, und die Formeln der §§ 4 und 6 für jede zugehörige lytische Verknüpfung, vorausgesetzt nur, daß sie eindeutig ist, d. h. daß nicht zwei oder mehr verschiedene Größen das Ergebnis derselben Lysis sein können. Für die Beweise der Formeln in den §§ 3—6 haben wir nämlich keine andern als die hier angegebenen Voraussetzungen gebraucht.

1) Das dem lateinischen potentia entsprechende griechische Wort *δύναμις* (als Kunstausdruck zuerst nachweisbar bei Hippokrates von Chios in der zweiten Hälfte des fünften Jahrhunderts v. Chr.) bedeutet zunächst nur die zweite Potenz; die dritte Potenz heißt *κύβος*. Diophantos (der möglicherweise schon im zweiten Jahrhundert v. Chr., wahrscheinlich aber erst im dritten oder im Anfang des vierten Jahrhunderts n. Chr. gelebt hat) bildete durch Zusammensetzung aus diesen beiden Wörtern Namen für die vierte, fünfte und sechste Potenz. Vgl. Cantor, Vorlesungen I, S. 196 u. 439. Das Wort Exponent findet sich zuerst in Michael Stiefels Arithmetica integra, 1544. (Cantor, Vorlesungen II, S. 432.) Die jetzt übliche Bezeichnung der Potenz stammt von Descartes, bei welchem aber der Exponent stets eine bestimmte Zahl ist. Potenzen mit unbestimmt gelassenen Exponenten hat erst Newton eingeführt.

Grundzahl oder Basis, die Anzahl b der Faktoren den Exponenten.[1]) Das Zeichen a^1, welches an sich keine Bedeutung hat, weil zu einem Produkte wenigstens zwei Faktoren gehören, soll die Zahl a selbst bedeuten. Nur bei dieser Festsetzung bleiben die Formeln dieses Paragraphen auch für den Exponenten 1 richtig.

B. Formeln für das Potenzieren.

Im Gegensatze zur Addition und zur Multiplikation gilt für beliebige Werte der Basis und des Exponenten weder das kommutative (a^b nicht $= b^a$) noch das assoziative ($(a^b)^c$ nicht $= a^{(bc)}$) Gesetz. Dagegen ergeben sich aus der Definition der Potenz und den Formeln der §§ 5 und 6 sehr leicht die folgenden Formeln:

(I) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

(II) $$a^m : a^n = a^{m-n},$$

vorausgesetzt, daß $m > n$.

(III) $$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

(IV) $$a^m : b^m = (a : b)^m,$$

vorausgesetzt, daß a ein Vielfaches von b ist.

(V) $$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}.$$

In bezug auf das Setzen und Fortlassen von Klammern wollen wir noch bemerken, daß man unter Bezeichnung des Potenzierens und der (im nächsten Paragraphen zu besprechenden) inversen Rechnungen als Operationen dritter Stufe die § 5 C angegebene Konvention auch auf diese letzteren ausdehnt mit der einen Ausnahme, daß a^{b^c} nicht bedeuten soll $(a^b)^c$ $(= a^{bc})$, sondern $a^{(b^c)}$.

---

1) Auch hier ist (analog wie in § 5) zu bemerken, daß mit der abgekürzten Bezeichnung noch keine Abkürzung der Rechnung gegeben ist. Um den Wert einer Potenz, z. B. 3^4, wirklich zu berechnen, besitzt man vorläufig kein anderes Mittel, als zunächst auf die Bedeutung von 3^4 als das Produkt 3. 3. 3. 3. zurückzugehen, von dem Produkt auf die Summe

$$[(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)]+[(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)] \\ +[(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)].$$

In dieser hat man dann noch jede 3 durch $1+1+1$ zu ersetzen und die sämtlichen Einsen kollektiv zu einer Zahl zu vereinigen, eine Arbeit, die nur bei starker Idealisierung unserer geistigen Fähigkeiten wirklich ausführbar wäre. Wie sich die Rechnung für die symbolischen Zahlen leichter und kürzer gestaltet, werden wir § 10 sehen.

C. Sätze über Ungleichungen.

I. Wenn

$$a > a', \quad \text{also} \quad a = a' + z,$$

so ist auch

$$a^n > a'^n.$$

Diese Ungleichung ist sicher richtig für $n = 1$. Ihre Allgemeingültigkeit wird also bewiesen sein (vgl. § 3 B), falls es gelingt zu zeigen, daß wenn sie für $n = \nu$ gilt, sie auch für $n = \nu + 1$ erfüllt ist. Nun ist aber

$$a^{\nu+1} = (a' + z)^{\nu+1} = (a' + z)^{\nu} \cdot (a' + z).$$

Und da nach unserer Voraussetzung

$$(a' + z)^{\nu} > a'^{\nu},$$

so folgt weiter (§ 5 D, (I))

$$a^{\nu+1} > a'^{\nu} \cdot (a' + z),$$

$$a^{\nu+1} > a'^{\nu+1} + a'^{\nu} \cdot z,$$

folglich

$$a^{\nu+1} > a'^{\nu+1}.$$

Wächst also die Basis, während der Exponent ungeändert bleibt, so nimmt auch der Wert der Potenz zu.[1])

II. Wenn

$$n > m, \quad \text{also} \quad n = m + u,$$

so ist auch

$$a^n > a^m,$$

vorausgesetzt nur, daß $a > 1$; denn

$$a^n = a^{m+u} = a^m \cdot a^u.$$

Nun ist aber, wenn

$$a > 1, \quad \text{auch} \quad a^u > 1,$$

also

$$a^n > a^m.$$

Wächst also der Exponent, während die (von 1 verschiedene) Basis dieselbe bleibt, so nimmt auch der Wert der Potenz zu.

III. Um die Abhängigkeit des Potenzwertes von dem Exponenten noch genauer zu untersuchen, setzen wir

$$a = 1 + z;$$

1) Dieser Satz ergibt sich natürlich auch sofort aus dem binomischen Lehrsatze, den wir an dieser Stelle aber noch nicht benutzen können.

dann ist

$$a^2 = 1 + 2z + z^2,$$

also

$$a^2 > 1 + 2z.$$

Wir wollen zeigen, daß allgemein

$$(1 + z)^n > 1 + nz,$$

wo n eine beliebige Zahl bedeutet, und bedienen uns zu diesem Zwecke der vollständigen Induktion (§ 3 B, S. 10). Wenn schon bewiesen ist, daß

$$(1 + z)^\nu > 1 + \nu z,$$

so folgt durch Multiplikation mit $1 + z$ nach § 5 D, (I)

$$\begin{aligned}(1 + z)^{\nu+1} &> (1 + \nu z)(1 + z)\\ &> 1 + (\nu + 1)z + \nu z^2\\ &> 1 + (\nu + 1)z.\end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt also, sobald sie für den Exponenten ν bewiesen ist, auch für den Exponenten $\nu + 1$, demnach, weil sie für den Exponenten 2 gültig ist, allgemein.

D. Zusatz. Geometrische Reihen.

Unter einer geometrischen Reihe versteht man eine in bestimmter Reihenfolge geordnete Menge von Zahlen, die in der Beziehung zueinander stehen, daß jede folgende aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer und derselben Zahl e entsteht. Wenn also bei der gewählten Anordnung das erste Glied a_1 ist, so hat das folgende a_2 den Wert $a_1 \cdot e$, das nächste a_3 den Wert $a_2 \cdot e = a_1 \cdot e^2$ usw., endlich das n^{te} den Wert $a_n = a_{n-1} \cdot e = a_1 \cdot e^{n-1}$. Um die Summe

$$s = a_1 + a_1 e + a_1 e^2 + \cdots + a_1 e^{n-2} + a_1 e^{n-1}$$

der n Glieder der geometrischen Reihe in geschlossener Form darzustellen, bilde man

$$s \cdot e = a_1 e + a_1 e^2 + \cdots + a_1 e^{n-2} + a_1 e^{n-1} + a_1 e^n.$$

Durch Subtraktion ergibt sich

$$s \cdot (e - 1) = a_1 \cdot (e^n - 1),$$

also

$$s = a_1 \cdot (e^n - 1) : (e - 1).$$

Z. B. erhält man für $a_1 = 1$, $e = 2$

$$\begin{aligned}s = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} &= (2^n - 1) : (2 - 1)\\ &= 2^n - 1.\end{aligned}$$

§ 8. Radizieren und Logarithmieren.

A. Definition des Radizierens und Logarithmierens.

Wie man aus der Summe und dem einen Summanden den andern Summanden, aus dem Produkte und dem einen Faktor den andern Faktor berechnen kann, so auch aus der Potenz und dem Exponenten die Basis und aus der Potenz und der Basis den Exponenten. Diese beiden neuen Aufgaben sind voneinander wesentlich verschieden, was darauf beruht, daß beim Potenzieren Basis und Exponent nicht vertauscht werden dürfen. Sind der Wert der Potenz p und der Exponent n gegeben und wird die Basis a gesucht, so bezeichnet man die letztere als die n^{te} Wurzel aus der Zahl p, n als den Wurzelexponenten, p als den Radikanden und schreibt $a = \sqrt[n]{p}$.[1]) Die Rechnung, durch welche a aus p und n gefunden wird, heißt Wurzelausziehen oder Radizieren. Sind der Potenzwert p und die Basis a gegeben und wird der Exponent n gesucht, so bezeichnet man den letzteren als den Logarithmus des Numerus p in bezug auf die Basis a und schreibt $n = {}^{(a)}\log p$.[2]) Die Rechnung, durch welche n aus p und a gefunden wird, heißt Logarithmieren.[3]) Die beiden Gleichungen $a = \sqrt[n]{p}$ und $n = {}^{(a)}\log p$ drücken also genau denselben Zusammenhang unter den drei Zahlen a, p, n aus wie die Gleichung $a^n = p$. Die verschiedene Schreibweise soll nur die verschiedene Verteilung der gegebenen und der gesuchten Zahlen kenn-

---

1) Als Zeichen für die Wurzelausziehung finden sich in einer Handschrift des 15. Jahrhunderts Pünktchen, die vor den Radikanden gesetzt sind. Ein Pünktchen bedeutete die Quadratwurzel, zwei die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel, drei die Kubikwurzel, vier die Kubikwurzel aus der Kubikwurzel. Chr. Rudolff (1525) hat die Pünktchen zu Strichen verlängert und die Zeichen $\surd$, $\surd\surd$, $\surd\surd\surd$ für die zweite, bezüglich vierte, bezüglich dritte Wurzel benutzt. Bei Mich. Stifel (1553) ist $\surd$ Symbol der Quadratwurzel, während die übrigen Wurzeln durch diesem Symbol beigefügte Zeichen charakterisiert sind. Schon vorher hatte Chuquet (1484) die Bezeichnung R^2, R^3, R^4 usw., sogar R^1 für die zweite, dritte, vierte, bezüglich erste Wurzel. Die jetzt übliche Schreibweise ist wohl zuerst von A. Girard (1629) vorgeschlagen, aber allgemein in Gebrauch gekommen erst seit M. Rolle (Traité d'Algèbre 1690). Die Umwandlung des Zeichens $\surd$ in $\sqrt{}$ rührt wahrscheinlich von der Benutzung des Striches her, dessen sich Descartes (statt unserer Klammern) zur Zusammenfassung mehrerer Glieder bediente. Vgl. Cantor, Vorlesungen II, S. 243, 352, 399, 446 und Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. I, S. 214—223.

2) Die Basis a setzen manche Autoren auch über, andere unter das Zeichen log.

3) Erfinder des Rechnens mit Logarithmen sind Jobst Bürgi und John Neper (von welchem auch das Wort Logarithmus stammt). Neper veröffentlichte seine Descriptio mirifici logarithmorum canonis 1614, Bürgi seine Progreß Tabulen erst 1620, hatte sie aber schon zwischen 1603 und 1611 ausgearbeitet. Vgl. Cantor, Vorlesungen II, 725 ff. Wir kommen auf Bürgis und Nepers Logarithmen ausführlicher zurück Kap. V, § 5 A.

zeichnen. Wählt man für p und n beliebige natürliche Zahlen, so gibt es im allgemeinen keine Zahl a, die der Gleichung $a^n = p$ genügt, keinesfalls aber gibt es mehr als eine solche Zahl, was unmittelbar aus § 7 C, I folgt, in andern Worten, die Aufgabe, aus einer Zahl p die n^{te} Wurzel zu ziehen, hat (im Gebiete der natürlichen Zahlen) entweder keine oder doch nur eine Lösung. Ebenso existiert bei beliebig gegebenen Werten p, a entweder gar keine oder doch nur eine Zahl, welche $= {}^{(a)}\log p$ ist (§ 7 C, II). Eine Ausnahme tritt nur in dem (§ 7 C, II ausgeschlossenen) Falle $a = 1$ ein. Wenn $a = 1$, $p > 1$, so gibt es keine Zahl n, für welche $a^n = p$; wenn aber $a = 1$, $p = 1$, so kann für n jede beliebige Zahl gesetzt werden. Wir werden deshalb den Wert $a = 1$ als Basis eines Logarithmus immer ausschließen.

B. Formeln für das Radizieren.

Formeln, die den Gleichungen I—VI in § 4 B und § 6 B entsprechen, gibt es für die zum Potenzieren inversen Operationen des Radizierens und Logarithmierens nicht. Die Beweise dieser Gleichungen erforderten nämlich die Anwendung des Assoziations- und des Kommutationsgesetzes für die Addition bezüglich die Multiplikation, und diese Gesetze gelten ja für das Potenzieren nicht.

Aus den Gleichungen III—V des § 7 B und der Definition von $\sqrt[n]{p}$ als der einzigen Zahl (falls überhaupt eine existiert), für welche $(\sqrt[n]{p})^n = p$, ergeben sich dagegen sofort die folgenden Formeln:

(I) $$\sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{p \cdot q};$$
denn
$$(\sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[n]{q})^n = (\sqrt[n]{p})^n \cdot (\sqrt[n]{q})^n = p \cdot q.$$

Die linke Seite hat also die Eigenschaft, in die n^{te} Potenz erhoben, den Wert pq zu liefern. Da es nur eine derartige Zahl geben kann und diese durch $\sqrt[n]{pq}$ bezeichnet wird, ist I bewiesen.

(II) $$\sqrt[n]{p} : \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{p : q};$$
Beweis wie bei I.

Durch wiederholte Anwendung von I findet man

$$\sqrt[n]{p_1} \cdot \sqrt[n]{p_2} \cdots \sqrt[n]{p_m} = \sqrt[n]{p_1 \cdot p_2 \cdots p_m}$$

und für $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = p$

(III) $$(\sqrt[n]{p})^m = \sqrt[n]{p^m}.$$

(IV) $$\sqrt[n \cdot r]{p^{m \cdot r}} = \sqrt[n]{p^m};$$

denn

$$\left(\sqrt[n]{p^m}\right)^{n \cdot r} = \left[\left(\sqrt[n]{p^m}\right)^n\right]^r = (p^m)^r = p^{m \cdot r}.$$

(V)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} = \sqrt[n \cdot m]{p};$$

denn

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}\right)^{n \cdot m} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{p}\right)^m = p.$$

Ebenso:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[m \cdot n]{p},$$

also auch:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{p}}.$$

Einen Sinn haben natürlich diese Formeln nur, wenn alle in ihnen vorkommenden Wurzeln ausziehbar sind.

C. Formeln für das Logarithmieren.

Unter Benutzung der Gleichungen (I) und (II) des § 7 B findet man:

(I)

$$^{(a)}\log(p \cdot q) = {}^{(a)}\log p + {}^{(a)}\log q.$$

Denn durch Multiplikation der Gleichungen

$$a^n = p$$

und

$$a^m = q$$

ergibt sich mittels § 7 B, I:

$$a^{n+m} = p \cdot q,$$

also:

$$^{(a)}\log(p \cdot q) = n + m = {}^{(a)}\log p + {}^{(a)}\log q.$$

(II)

$$^{(a)}\log(p : q) = {}^{(a)}\log p - {}^{(a)}\log q.$$

Beweis ähnlich wie für (I).

Durch wiederholte Anwendung von (I) erhält man:

$$^{(a)}\log(p_1 \cdot p_2 \cdots p_r) = {}^{(a)}\log p_1 + {}^{(a)}\log p_2 + \cdots + {}^{(a)}\log p_r$$

und für $p_1 = p_2 = \cdots = p_r = p$:

(III)

$$^{(a)}\log(p^r) = r \cdot {}^{(a)}\log p.$$

Die Formeln (I)—(III) haben vorläufig nur dann eine Bedeutung, wenn alle auftretenden Logarithmen natürliche Zahlen sind.

§ 9. Zusammenfassender Überblick über die Rechenoperationen.

Von der Summe zweier Zahlen gelangt man zum Produkte und vom Produkte zweier Zahlen zur Potenz, indem man für einen der beiden Summanden (bezüglich Faktoren) wieder eine Summe (bezüglich Produkt) substituiert, für einen der beiden Summanden (bezüglich Faktoren) dieser Summe (bezüglich dieses Produktes) abermals eine Summe (bezüglich Produkt) wählt, in dieser Weise beliebig weit fortfährt und dann die sämtlichen verwendeten Zahlen einander gleichsetzt. Ob man beständig den ersten Summanden (bezüglich Faktor) oder beständig den zweiten Summanden (bezüglich Faktor) durch eine Summe (bezüglich Produkt) ersetzt, kommt auf dasselbe hinaus, weil für das Addieren und das Multiplizieren das kommutative Gesetz gilt. Es erhebt sich jetzt die Frage, kann man auch vom Potenzieren in ähnlicher Weise zu neuen Rechenoperationen fortschreiten? Verwendet man für die Rechnung von vornherein nur eine Zahl a und ersetzt man immer wieder die Basis durch eine Potenz, so gelangt man sukzessive zu den Zahlen a^a, $(a^a)^a$, $[(a^a)^a]^a$ usw.; ersetzt man aber immer wieder den Exponenten durch eine Potenz, so wird man auf die Zahlen geführt: $a^a, a^{(a^a)}, a^{\left[a^{(a^a)}\right]}$ usw. Alle diese Größen sind offenbar vollkommen bestimmt, wenn man den Wert von a und die Zahl n kennt, welche angibt, wie oft a hingeschrieben ist. Wir wollen deshalb, zur Abkürzung für den Augenblick, die Potenzformen der ersten Art durch $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 4) \ldots (a, n)$, die der zweiten durch $[a, 2]$, $[a, 3]$, $[a, 4], \ldots [a, n]$ bezeichnen. Aus § 7 B, V ergibt sich unmittelbar, daß

$$(a, n) = a^{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(n-1)\ \text{Faktoren}}} = a^{(a^{n-1})},$$

also auf eine gewöhnliche Potenz zurückführbar ist. Das Symbol $[a, n]$ definiert dagegen eine neue Rechenoperation, die man als Operation vierter Stufe bezeichnet hat. In der mathematischen Literatur finden sich verhältnismäßig nur wenige Arbeiten, die dem Studium derselben und der zu ihr inversen Operationen gewidmet sind.[1]) Weil die Entwicklungen recht kompliziert sind, und ein wirkliches Bedürfnis zur Verwendung dieser Operation sich bisher nicht herausgestellt hat, wollen auch wir nicht näher darauf eingehen und noch weniger auf die Rechenoperationen fünfter, sechster usw. Stufe, zu denen man bei weiterem Fortschreiten in analoger Weise gelangen könnte. Wir werden vielmehr bei den in den §§ 3—8 be-

1) Eisenstein, Journ. f. Math., Bd. 28, S. 49; Woepcke, Journ. f. Math., Bd. 42, S. 83; Gerlach, Zeitschrift f. math. u. naturwissensch. Unterricht, 13. Jahrg., S. 423; Schulze, Archiv f. Math. u. Phys. (2), III, S. 302.

reits definierten sieben Rechenoperationen stehen bleiben. Die drei direkten, nämlich das Addieren, das Multiplizieren und das Potenzieren, kommen schließlich auf Additionen, in letzter Linie also auf die kollektive Zusammenfassung von Einheiten zu einer Zahl hinaus. Theoretisch, bezüglich wenn wir uns unser Zahlenvorstellungsvermögen hinreichend verstärkt denken, sind sie immer ausführbar. Tatsächlich würden wir aber bei Beschränkung auf die eigentlich vorstellbaren Zahlen bald auf unüberwindliche Schranken stoßen, die erst fallen, wenn wir zu den symbolischen Zahlbildungen unsere Zuflucht nehmen. Die vier inversen Operationen, das Subtrahieren, das Dividieren, das Radizieren und das Logarithmieren, sind nicht immer ausführbar; sind sie es aber, dann nur auf e i n e Art (mit alleiniger Ausnahme von $^{(1)}\log 1$). Systematische Methoden, um die Resultate dieser inversen Operationen zu finden, werden wir erst im folgenden Paragraphen für die symbolischen Zahlen kennen lernen.

Will man andeuten, daß beliebig viele Zahlen durch mehrere Rechenoperationen verknüpft werden sollen, so verbindet man die Zahlzeichen durch die entsprechenden Operationszeichen und bedient sich zur Angabe einer bestimmten Reihenfolge der Operationen der Klammern, indem man festsetzt, daß zuerst diejenigen Operationen auszuführen sind, welche innerhalb einer innersten Klammer stehen, d. h. einer solchen, die keine andere umschließt. Um die Häufung der Klammern zu vermeiden, hat man die in § 5 C und § 7 B bereits mitgeteilten Konventionen getroffen.

Das aus den Zahl- und Operationszeichen zusammengesetzte Symbol heißt allgemein ein „Ausdruck“; seinen besonderen Namen bekommt derselbe nach derjenigen Operation, die zuletzt ausgeführt werden soll. Ist dies eine Addition oder Subtraktion, so nennt man den Ausdruck auch „Aggregat“, und zwar je nach der Anzahl der Glieder, die er durch Addition oder Subtraktion verbindet, Binom (zwei Glieder), Trinom (drei Glieder), Polynom (unbestimmt viele Glieder). Wenn die letzte Rechenoperation von höherer als der ersten Stufe ist oder der Ausdruck aus einer einfachen Zahl besteht, so heißt er im Gegensatze dazu ein Monom.

§ 10. Die systematischen Zahlen, insbesondere das dekadische Zahlensystem.

A. Aufbau des Zahlensystems und schriftliche Darstellung der systematischen Zahlen.

Nachdem wir in den §§ 3—9 die fundamentalen Rechenoperationen und ihre Gesetze kennen gelernt haben, sind wir nunmehr im stande, in Fortsetzung der Entwicklungen des § 1, genauer auf die Konstruk-

tion der systematisch gebildeten symbolischen Zahlformen einzugehen, welche die uns im eigentlichen Sinne nicht mehr vorstellbaren Zahlen vertreten, und das Rechnen mit ihnen zu erörtern. Da es nicht notwendig ist, als Grundzahl des Systems gerade die Zahl 10 zu wählen (vgl. S. 5, Anm. 1), lassen wir dieselbe zunächst unbestimmt und bezeichnen sie durch den Buchstaben g. Zur Abzählung irgend einer Menge von Dingen dienen uns alsdann die folgenden Zahlen:

(I) $1,\ 2,\ 3, \ldots (g-1),$

(II) $g,\ 2g,\ 3g, \ldots (g-1)g,$

(III) $g^2,\ 2g^2,\ 3g^2, \ldots (g-1)g^2,$

. . . .

$(n+1)$ $g^n,\ 2g^n,\ 3g^n, \ldots (g-1)g^n.$

Wenn es uns also bei der Beschränktheit unseres Vorstellungsvermögens tatsächlich nicht mehr möglich ist, die sämtlichen als „Einsen“ aufgefaßten Dinge einer Menge in unserem Bewußtsein zu einem Ganzen kollektivisch zu vereinigen, wie es der Begriff der Zahl eigentlich verlangt, so können wir doch die fragliche Zahl als Summe einer Zahl der Reihe I, einer Zahl der Reihe II usw. charakterisieren, wobei uns die eigentliche Bedeutung dieser Hilfszahlen nicht zum Bewußtsein zu kommen braucht, wir uns vielmehr häufig nur an die Zusammenstellung der Zeichen resp. Namen halten. Eine beliebige Zahl wird also repräsentiert durch eine Summe von der Form

$$a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0,$$

d. h. eine Summe von Produkten, in denen der eine Faktor höchstens gleich $(g-1)$, der andere eine Potenz von g ist, und diese Darstellung einer Zahl ist der exakte Ausdruck des Prinzips, nach welchem schon auf primitiver Kulturstufe die symbolischen Zahlen gebildet wurden.[1] Um alle Zahlen darstellen zu können, braucht man also nur Zeichen für die Zahlen von 1 bis $(g-1)$ (im dekadischen System für die Zahlen eins bis neun); ein Zeichen für die Grundzahl des Systems selbst ist zu entbehren, wenn man die Zahlen auf ein Rechenbrett („Abakus“)[2] einträgt, d. h. eine Tafel, welche in irgend

1) Diese systematische Darstellung einer beliebigen Zahl ist die einfachste und natürlichste, aber allerdings nicht die einzig mögliche. G. Cantor hat in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 14 (1869), S. 121 gezeigt, daß sich jede Zahl in der Form $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_\nu a_\nu + \alpha_{\nu+1} a_{\nu+1} + \cdots$, und zwar nur auf eine Art darstellen läßt, wenn $a_1, a_2, \cdots a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots$ irgend welche Zahlen sind, von denen jede durch die vorhergehende teilbar ist, und wenn α_ν (für alle vorkommenden ν) die Werte $0, 1, 2, \cdots, \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} - 1$ annehmen darf.

2) Das Wort stammt von dem griechischen ἄβαξ, dessen Ursprung nicht völlig aufgeklärt ist.

einer Weise, z. B. durch senkrechte, zueinander parallele Striche in Kolumnen geteilt ist, deren jede eine bestimmte der Zahlen a_ν aufnimmt. Solche Rechenbretter finden sich schon bei allen Völkern des Altertums und waren im christlichen Europa bis in die zweite Hälfte des Mittelalters verbreitet. Während ursprünglich, z. B. bei den Griechen[1]) und Römern[2]), die Zahlen a_ν durch Steinchen auf dem Rechenbrett markiert wurden, benutzten die Inder für die Zahlen von eins bis neun eigene Zeichen (vielleicht die Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter), welche wahrscheinlich schon im zweiten Jahrhundert n. Chr. nach Alexandria und von dort weiter in das westliche Europa drangen und für das Abakus-Rechnen benutzt wurden. Die höchste Vereinfachung des Zahlenschreibens erreichten aber die Inder, vermutlich erst in einer etwas späteren Zeit[3]), durch Erfindung der Null, d. h. eines besonderen Zeichens für das Nichtvorhandensein einer der Stufenzahlen g^ν in einer Zahl. Denn erst jetzt war es möglich, die Kolumnenstriche ganz fortzulassen und beim Festhalten an der bestimmten Reihenfolge der Stufenzahlen den fortgelassenen Faktor g^ν durch die bloße Stellung der Zahl a_ν und irgend eine Zahl durch die einfache Nebeneinandersetzung $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$[4]) zu charakterisieren. Dieses indische „Positionssystem“ mit der Null (und den inzwischen veränderten Zeichen für die Zahlen eins bis neun) gelangte im 8. Jahrhundert zu den Arabern[5]), von welchen es etwa seit 1100 die romanischen und die germanischen Völker kennen lernten. Während des 12. Jahrhunderts standen sich im Abendlande die Abakisten, d. h. die Vertreter des Rechnens mit dem Abakus, und die sogenannten Algorithmiker[6]) gegenüber, die das Positions-

1) Diese Steinchen hießen ψῆφοι, und das daraus gebildete Wort ψηφίζειν, mit Steinchen hantieren, wird allgemein für „rechnen“ gebraucht. M. Cantor, Vorlesungen I, S. 120.

2) Auch das lateinische Wort calculus (Rechnung) stammt von dem Namen calculi dieser Steinchen. M. Cantor, Vorlesungen I, S. 493.

3) Vgl. S. 2, Anm. 1.

4) Der Strich ist hier über die Buchstaben gesetzt, weil sonst der Ausdruck das Produkt der Zahlen a_n, $a_{n-1}, \ldots a_1$, a_0 bedeuten könnte. Eine derartige Verwechslung ist ausgeschlossen, wenn für die a_ν bestimmte Zahlen substituiert werden. Vgl. § 5 A.

5) Bei den Arabern heißt die Null as-sifr, das Leere, und ist die Übersetzung des indischen, dasselbe bedeutenden Wortes sunya. Aus as-sifr ist unser „Ziffer“ und das französische „zéro“ entstanden.

6) Das Wort „Algorithmus“, das jetzt ein zur festen Regel gewordenes Rechenverfahren bedeutet, stammt von dem Namen Muhammed ibn Mûrâ Alchwarizmi eines ostarabischen Schriftstellers aus dem Anfange des 9. Jahrhunderts, welcher eine Algebra und ein Rechenbuch geschrieben hat, in welch letzterem er das Rechnen mit den nach indischer Weise geschriebenen Zahlen auseinander setzt.

system benutzten, bis allmählich die ersteren verdrängt wurden, und das indische System im 13. Jahrhundert wenigstens bei den Gelehrten den Sieg davon trug, während seine Verbreitung in Laienkreisen erst mit der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts beginnt.[1])

Ohne weiteres leuchtet ein, daß in jeder der Zeilen I, II usw. auf S. 34 die Zahlen sämtlich nach der Größe geordnet sind, in der ersten Zeile insbesondere jede Zahl um 1 größer ist als die vorhergehende. Schieben wir hinter jede Zahl der zweiten Zeile alle Zahlen ein, die aus ihr durch sukzessive Addition der Zahlen der Zeile I entstehen, so ist auch in dieser Zeile jede Zahl um 1 größer als die vorhergehende und die erste um 1 größer als die letzte von I. Schieben wir ebenso hinter jede Zahl von III alle Zahlen ein, die aus ihr durch sukzessive Addition der Zahlen von I und der vervollständigten Zeile II entstehen, so gilt von ihr das Entsprechende.

Wenn wir in derselben Weise beliebig weit fortfahren, so enthält die Gesamtheit der so konstruierten Zeilen bei der angegebenen Reihenfolge eine Serie von Zahlen, die mit 1 beginnt, und von denen jede um 1 größer ist als die vorhergehende. Unser systematisches Bildungsprinzip liefert uns also genau dieselben Zahlen, zu denen man gelangt, wenn man, von der Zahl 1 ausgehend, neue durch fortgesetzte Hinzufügung von 1 bildet, so daß also unsere systematischen Zahlen auch als Bezeichnungen für die Zahlen der sogenannten natürlichen Zahlenreihe angesehen werden können.[2])

Wie der Begriff einer beliebigen Zahl mittelst der Operationen des Addierens, Multiplizierens und Potenzierens aus den Begriffen der Zahlen $1, 2, \ldots g$ entsteht, so setzt in derselben Weise auch die Sprache den Namen irgend einer Zahl aus den Namen für die Zahlen $1, 2, \ldots g$ und für die Potenzen von g (bei den meisten Völkern insbesondere für $g =$ zehn) zusammen.[3]) Durch häufigen Gebrauch sind uns aber die fertigen Namen, und zwar in der den Zeilen (I), (II), (III), ... auf S. 34 entsprechenden Reihenfolge wenigstens innerhalb der praktisch vorkommenden Grenzen so geläufig geworden, daß wir uns zum Abzählen einer Menge eines bequemeren Verfahrens bedienen, als zur Konstruktion des Zahlbegriffs eigentlich erforderlich wäre. Anstatt zu einem Dinge der Menge ein anderes hinzuzunehmen und zu sagen,

---

1) Vgl. J. Tropfke, Gesch. d. Elementarmathem. I, S. 9—16.

2) Vgl. Anm. 1, S. 5.

3) Während bei allen Völkern, wie zuerst Hankel (Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, S. 32) hervorgehoben hat, in der geschriebenen additiv zusammengesetzten Zahl der größere Bestandteil stets dem kleineren (in der einmal üblichen Richtung der Schrift) vorangeht, werden in dem gesprochenen Zahlwort gerade bei uns im Deutschen (und auch im Sanskrit und im Arabischen) die Einer vor den Zehnern genannt.

eins und eins ist zwei, dann ein weiteres ins Auge zu fassen und fortzufahren, zwei und eins ist drei usw., dann wenn wir zu zehn Dingen (um für den Augenblick bei $g =$ zehn stehen zu bleiben) gelangt sind, diese zu einer Gruppe zu vereinigen usw., kürzen wir rein mechanisch die genannten Sätze ab, indem wir beim Herausgreifen der einzelnen Dinge nur die Wörter eins, zwei, drei usw. in der uns durch lange Übung geläufigen Reihenfolge aussprechen.[1]) Nur wenn wir auf Zahlen stoßen, welche die uns gewohnten Grenzen überschreiten, bleibt uns nichts anderes übrig, als uns wieder des Prinzips bewußt zu werden, nach dem die Zahlbegriffe zu konstruieren und ihre Namen zu bilden sind.

Wegen des vollständigen Parallelismus, der zwischen den systematisch gebildeten Zahlbegriffen einerseits und ihren Zeichen im indischen Positionssysteme andrerseits herrscht, können wir auch alle Rechnungen statt an den Zahlbegriffen selbst nach bestimmten Verknüpfungs- und Umsetzungsregeln an den Zahlzeichen vornehmen, und wir brauchen erst dann, wenn wir zum Resultate gelangt sind, auf den dem gefundenen Zeichen entsprechenden Begriff zurückzugehen. Wir werden uns nunmehr überzeugen, daß wir auf diese Weise mit Leichtigkeit Rechnungen vollziehen können, die wir früher (vgl. Anmerkung 3 auf S. 16 und Anmerkung 1 auf S. 26) als tatsächlich unausführbar bezeichnen mußten. Alles Zahlenrechnen läuft darauf hinaus, einen beliebig gegebenen Ausdruck, der ja auch selbst als Symbol einer eigentlichen Zahl aufgefaßt werden könnte, in die Form einer systematischen Zahl zu bringen. Erst wenn dies gelungen ist, haben wir, weil die sämtlichen systematischen Zahlen nach ihrer Größe geordnet sind, eine bestimmte Vorstellung von der Größe der durch den

1) In diesem rein mechanischen Verfahren, zu welchem lange Übung die eigentliche Zählmethode abgekürzt hat, sucht Helmholtz in seiner Abhandlung „Zählen und Messen" (Philosoph. Aufsätze zu Zellers Doktorjubiläum) das wahre Wesen des Zahlbegriffs. Er betrachtet die Zahlen als willkürliche Zeichen (bezüglich Wörter), unter denen von vornherein keine Größenbeziehung existiert, deren Reihenfolge vielmehr einst von unseren Voreltern, als sie die Sprache schufen, willkürlich festgesetzt worden ist. Das Zählen einer Menge geht nach ihm in der Weise vor sich, daß jedem ihrer Objekte sukzessive ein Glied der Zahlenreihe in ihrer bestimmten Folge zugeordnet wird; die bei diesem Verfahren zuletzt verwendete Zahl heißt dann die Anzahl der betreffenden Menge. Es ist klar, daß der so definierte Zahlbegriff nicht mit dem übereinstimmt, was man bei allen Anwendungen der Arithmetik unter Anzahl zu verstehen pflegt. Infolgedessen ist auch das Rechnen mit diesen „Zahlen", mag es in sich noch so konsequent ausgebildet sein, nur ein Operieren mit leeren Zeichen, deren eigentliche Bedeutung unklar bleibt. Einen ähnlichen Standpunkt wie Helmholtz nimmt auch L. Kronecker ein in seinem Aufsatze „Über den Zahlbegriff" (Philosoph. Aufsätze zu Zellers Doktorjubiläum u. Journ. f. Math., Bd. 101). Vgl. Husserl, Philosophie der Arithmetik, Anhang zum ersten Teil.

Ausdruck charakterisierten Zahl, und wir sind ohne weiteres im stande, sie mit irgend einer andern Zahl zu vergleichen. Bevor wir aber das Rechnen mit den systematischen Zahlen beginnen können, müssen wir noch kurz die Rechenoperationen für die in diesem Paragraphen als Zahl eingeführte Null definieren.

B. Definition der Rechenoperationen für die Zahl Null.

Wenn in einer Menge A sich a Dinge von bestimmter Art befinden, in einer andern Menge N dagegen kein Ding derselben Art, so enthält die durch Vereinigung von A und N entstandene Menge auch genau a Dinge dieser Art, daher $a + 0 = 0 + a = a$. Nach der Erklärung der Subtraktion (§ 4 A) folgt hieraus sofort $a - 0 = a$ und $a - a = 0$. Weiter ist $0 \cdot a = \overbrace{0 + 0 + \cdots + 0}^{a \text{ Summanden}} = 0$. $a \cdot 0$ hat zunächst keine Bedeutung. Um auch dieses Symbol als Produkt auffassen zu können, für welches das kommutative Gesetz gilt, definieren wir $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. Daraus ergibt sich (nach der Definition des Quotienten § 6 A) $0 : a = 0$, $0 : 0 = a$, während die Aufgabe $b : 0$, wo b irgendeine von Null verschiedene Zahl bezeichnet, durch keine Zahl unseres Zahlenbereiches gelöst wird. Da also die Division durch Null entweder unausführbar ist oder (wenn der Dividend auch gleich Null) der Quotient jede beliebige Zahl sein kann, schließen wir Null als Divisor aus. $0^a = \overbrace{0 \cdot 0 \cdots 0}^{(a \text{ Faktoren})} = 0$. Unter dem Zeichen a^0, das an sich keinen Sinn hat, verstehen wir, damit die Formel $a^m : a^n = a^{m-n}$ (§ 7 B, (II)) auch noch für $m = n$ gelte, die Zahl 1. Es ist ferner $\sqrt[a]{0} = 0$, $\sqrt[0]{1} =$ jeder beliebigen Zahl a; die durch das Symbol $\sqrt[0]{b}$ ausgesprochene Forderung wird, falls b von 1 verschieden ist, von keiner Zahl erfüllt, so daß wir 0 auch als Wurzelexponenten ausschließen. Aus $a^0 = 1$ folgt, daß $\log 1$ für jede beliebige Basis a gleich 0 ist. Weil a^m, falls $a > 0$, stets von 0 verschieden ist, besitzt die Zahl 0 für keine von Null verschiedene Basis a einen Logarithmus. Da für die Basis 0 der Logarithmus von 0 gleich jeder beliebigen Zahl sein kann, der Logarithmus einer von Null verschiedenen Zahl aber nicht existiert, werden wir Null auch nicht als Basis von Logarithmen wählen. Nach den hier gegebenen Definitionen der Rechenoperationen für die Zahl Null bleiben alle in den §§ 3—8 entwickelten Formeln auch richtig, wenn für einen oder mehrere der in ihnen vorkommenden Buchstaben 0 gesetzt wird, vorausgesetzt nur, daß sie dann in dem Bereiche der natürlichen Zahlen überhaupt noch eine Bedeutung besitzen.

C. Addition der systematischen Zahlen.

Die Addition verlangt ursprünglich die Auflösung der einzelnen Summanden in ihre Einheiten und die kollektivische Zusammenfassung der letzteren zu einem Ganzen, eine Operation, deren wirkliche Ausführung bei einigermaßen großen Zahlen unsere Kräfte überschreitet. Hätten wir als Vertreter der eigentlichen, uns nicht mehr zugänglichen Zahlbegriffe die natürliche Zahlenreihe gewählt[1]), d. h. von irgend einer schon bekannten Zahl ausgehend eine neue als Summe dieser und der Einheit definiert und ebenso eine weitere als Summe der neu definierten und der Einheit erklärt usw., so bliebe uns für die Addition kein anderer Weg, als von dem einen Summanden um so viel Einheiten schrittweise weiter zu zählen, wie der andere enthält, eine zwar stets ausführbare, aber bei großen Zahlen recht langwierige Rechnung. Sind aber A und B zwei Zahlen unseres Systems mit der Grundzahl g, etwa

$$A = \overline{a_n \ldots a_m \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n g^n + \cdots + a_m g^m + \cdots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$$

und

$$B = \overline{b_m \ldots b_2 b_1 b_0} = b_m g^m + \cdots + b_2 g^2 + b_1 g + b_0 \quad (n \geqq m),$$

so ergibt sich unter Benutzung der in den §§ 3 u. 5 entwickelten Formeln

$$A + B = a_n g^n + \cdots + (a_m + b_m) g^m + \cdots + (a_2 + b_2) g^2 + (a_1 + b_1) g + (a_0 + b_0).$$

Die rechte Seite hat schon die Form einer systematischen Zahl, falls für alle vorkommenden Werte von μ

$$a_\mu + b_\mu < g.$$

Ist aber für einen der Werte μ

$$a_\mu + b_\mu \geqq g,$$

so setze man

$$a_\mu + b_\mu = g + c_\mu,$$

wo

$$c_\mu < g$$

und

$$(a_{\mu+1} + b_{\mu+1}) g^{\mu+1} + (a_\mu + b_\mu) g^\mu = (a_{\mu+1} + b_{\mu+1} + 1) g^{\mu+1} + c_\mu g^\mu.$$

Sollte etwa jetzt $a_{\mu+1} + b_{\mu+1} + 1 \geqq g$ sein, so übertrage man in gleicher Weise den Überschuß auf den Koeffizienten von $g^{\mu+2}$ usw. Wegen dieser Umsetzungen ist es zweckmäßig, die Summation bei der niedrigsten Stelle zu beginnen.

---

1) Vgl. § 1, S. 4.

Die Addition zweier beliebigen systematischen Zahlen kommt also auf eine (in allen wirklich vorkommenden Fällen kleine) Anzahl von Additionen solcher Zahlen hinaus, die kleiner als g sind, und die Arbeit wird noch dadurch erheblich erleichtert, daß man vom ersten Rechenunterricht an die Ergebnisse dieser beschränkten Anzahl von Additionen dem Gedächtnisse ein- für allemal eingeprägt hat. Ohne wesentliche Änderung der Rechnung kann man nun auch die Summe beliebig vieler systematischen Zahlen bilden.

D. Subtraktion der systematischen Zahlen.

Unter Benutzung der Formeln § 4 B, (VI) und § 5 C, (IV) folgt

$$A - B = a_n g^n + \cdots + (a_m - b_m) g^m + \cdots + (a_2 - b_2) g^2 \\ + (a_1 - b_1) g + (a_0 - b_0).$$

Falls $a_\mu \geqq b_\mu$ für alle vorkommenden Werte von μ, so ist die rechte Seite schon eine Zahl unseres Systems. Wenn aber für irgendeinen Wert von μ $a_\mu < b_\mu$, so setze man

$$a_{\mu+1} g^{\mu+1} + a_\mu g^\mu = (a_{\mu+1} - 1) g^{\mu+1} + (g + a_\mu) g^\mu .$$

Sollte etwa $a_{\mu+1} = 0$ sein, d. h. ein Glied mit $g^{\mu+1}$ in A gar nicht vorkommen, so muß man $a_{\mu+2} g^{\mu+2}$ zu Hilfe nehmen und schreiben

$$a_{\mu+2} g^{\mu+2} + a_\mu g^\mu = (a_{\mu+2} - 1) g^{\mu+2} + (g - 1) g^{\mu+1} + (g + a_\mu) g^\mu$$

usw. Auch die Werte der Differenzen $a_\mu - b_\mu$ bezüglich $g + a_\mu - b_\mu$ lernt jedes Kind im ersten Rechenunterrichte auswendig.

E. Multiplikation der systematischen Zahlen.

Das Produkt zweier eigentlich vorstellbaren, nicht durch Zusammensetzung gebildeten Zahlen kann auf keine andere Weise gefunden werden als durch wirkliche Addition, nämlich durch Zurückgehen auf die Summe, für die es nur eine abgekürzte Bezeichnung ist (vgl. S. 16, Anm. 3). Für die Multiplikation zweier systematischen Zahlen ergibt sich dagegen aus den in den §§ 5 u. 7 hergeleiteten Formeln ein besonderes, viel schneller zum Ziele führendes Verfahren.

Nach § 5 C, (III) und § 7 B, (I) ist

$$\begin{aligned} A \cdot B = a_n b_m g^{m+n} &+ a_{n-1} b_m g^{m+n-1} + a_{n-2} b_m \cdot g^{m+n-2} + \cdots \\ &+ a_n b_{m-1} g^{m+n-1} + a_{n-1} b_{m-1} \cdot g^{m+n-2} + \cdots \\ &+ a_n b_{m-2} \cdot g^{m+n-2} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots + a_0 b_2 g^2 \\ &\cdots + a_1 b_1 g^2 + a_0 b_1 g \\ &\cdots + a_2 b_0 g^2 + a_1 b_0 g + a_0 b_0 . \end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier beliebigen Zahlen ist damit auf die Berechnung einer Anzahl von Produkten zweier Faktoren zurückgeführt, die beide kleiner als g sind. Die sämtlichen Produkte dieser Art hat man durch wirkliche Addition ein- für allemal berechnet und in einer Tabelle, dem „Einmaleins“, zusammengestellt, die gleichfalls im ersten Rechenunterricht dem Gedächtnisse eingeprägt wird.[1])

Wenn ein derartiges Produkt, etwa $a_\nu \cdot b_\mu$, größer als $g-1$ ist, erscheint es in der Form $cg+d$, wo c und d beide kleiner als g sind. In solchem Falle setzt man

$$a_{\nu+1} b_\mu g^{\mu+\nu+1} + a_\nu b_\mu g^{\mu+\nu} = (a_{\nu+1} b_\mu + c) g^{\mu+\nu+1} + d\, g^{\mu+\nu}$$

und verfährt, wenn jetzt $a_{\nu+1} b_\mu + c > g - 1$, ähnlich mit diesem Koeffizienten. Da jeder Rechner bei einiger Übung die kleinen Umformungen im Kopfe ausführt, kann in der auf voriger Seite stehenden, das Produkt $A \cdot B$ darstellenden Summe jede Zeile unmittelbar in Form einer systematischen Zahl geschrieben werden. Dieser Umformungen wegen ist es zweckmäßig, jede Zeile mit der niedrigsten Potenz von g, d. h. das Multiplizieren mit der am weitesten rechts stehenden Stelle des Multiplikanden zu beginnen. Da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge zum Schluß die $(m+1)$ Zeilen addiert werden, darf man die Rechnung ebensowohl mit der höchsten wie mit der niedrigsten Stelle des Multiplikators anfangen.

Anstatt zuerst die einzelnen Zeilen aufzuschreiben, kann man auch, wenn man geübt ist, mehrere zweistellige Zahlen im Kopfe zu addieren, die senkrecht untereinander stehenden Produkte im Kopfe ausrechnen und addieren und dabei jede der Teilsummen

$$a_0 b_0, \quad a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \text{ usw.}$$

sogleich auf die Form

$$c \cdot g + d, \quad \text{wo} \quad d \leqq g - 1,$$

bringen. Die so erhaltenen Zahlen d sind die Ziffern des gesuchten Produktes, das man also ohne jede schriftliche Zwischenrechnung von rechts beginnend niederschreibt.

Erleichtert wird die Arbeit, wenn man die Ziffern des Multiplikators in umgekehrter Reihenfolge $b_0, b_1, \ldots b_m$ auf einen Papierstreifen setzt und diesen so über dem Multiplikanden verschiebt, daß zuerst b_0 über a_0, dann b_0 über a_1, dann b_0 über a_2 usw. zu stehen kommt, und bei jeder Lage des Streifens je zwei senkrecht überein-

1) Bei uns und allen kultivierten Völkern der Jetztzeit für $g =$ zehn. Will man in einem anderen Systeme rechnen, so hat man sich zunächst eine analoge Tabelle für die betreffende Grundzahl anzufertigen.

ander stehende Ziffern miteinander multipliziert und die Produkte im Kopfe addiert. So erhält man in der bequemsten Weise die Werte von

$$a_0 b_0, \quad a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \text{ usw.}$$

Genaueres über die zweckmäßige Anordnung dieser Rechnung auch bei vielstelligen Faktoren findet man in Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, § 7.

F. Division der systematischen Zahlen.

Würden bei der Produktbildung die Koeffizienten der Potenzen von g in der Form, in welcher sie zunächst auftreten, ohne Umformung stehen geblieben sein, so könnte man aus dem Produkte $C = A \cdot B$ und dem einen Faktor A den andern Faktor B in der Weise bestimmen, daß aus dem Koeffizienten von g^{m+n} zunächst b_m, aus dem von g^{m+n-1} dann b_{m-1} berechnet wird usw. Da dieses Verfahren aber versagt, wenn C als systematische Zahl geschrieben ist, weil ja nach der Umformung die ursprünglichen Werte der Koeffizienten nicht mehr zu erkennen sind, müssen wir einen andern Weg einschlagen. Wir suchen zunächst

$$C = c_r g^r + c_{r-1} g^{r-1} + \cdots + c_1 g + c_0$$

so umzugestalten, daß der Koeffizient jeder Potenz von g das Produkt aus dem Divisor A und einer Zahl unter g wird. In der Reihe der Zahlen

$$c_r, \quad c_r g + c_{r-1}, \quad c_r g^2 + c_{r-1} g + c_{r-2}, \ldots$$

sei

$$c_r g^\varrho + c_{r-1} g^{\varrho-1} + \cdots + c_{r-\varrho+1} \cdot g + c_{r-\varrho}\ ^{1)}$$

die erste, welche größer als A oder gleich A ist. Auf eine solche muß man notwendig stoßen (ev. erst für $\varrho = r$), weil, wenn die Division ausführbar sein soll, $C \geqq A$ sein muß. Es sei also

$$c_r g^{\varrho-1} + c_{r-1} g^{\varrho-2} + \cdots + c_{r-\varrho+2} g + c_{r-\varrho+1} < A \leqq c_r g^\varrho + c_{r-1} g^{\varrho-1} + \cdots + c_{r-\varrho+1} g + c_{r-\varrho}.$$

Aus

$$A \geqq c_r g^{\varrho-1} + c_{r-1} g^{\varrho-2} + \cdots + c_{r-\varrho+2} g + c_{r-\varrho+1} + 1$$

folgt

$$gA \geqq c_r g^\varrho + c_{r-1} g^{\varrho-1} + \cdots + c_{r-\varrho+2} g^2 + c_{r-\varrho+1} g + g,$$

deshalb wegen $c_{r-\varrho} < g$:

$$A \leqq c_r g^\varrho + c_{r-1} g^{\varrho-1} + \cdots + c_{r-\varrho+1} g + c_{r-\varrho} < gA.$$

---

1) Oder kürzer geschrieben: $\overline{c_r c_{r-1} \cdots c_{r-\varrho+1} c_{r-\varrho}}$.

Durch Probieren, das durch die Kenntnis des Einmaleins unterstützt wird, hat man jetzt festzustellen, ob die in der Ungleichung eingeschlossene Summe ein Vielfaches von A ist, bezüglich zwischen welchen Vielfachen von A sie liegt. Es sei ermittelt

$$c_r g^\varrho + c_{r-1} g^{\varrho-1} + \cdots + c_{r-\varrho+1} g + c_{r-\varrho} = b_0 A + A_0,$$

wo b_0 eine der Zahlen 1, 2, ... $g-1$ bedeutet und

$$0 \leqq A_0 < A.$$

Dann läßt sich C in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} C &= (b_0 A + A_0) g^{r-\varrho} + c_{r-\varrho-1} \cdot g^{r-\varrho-1} + \cdots + c_1 g + c_0 \\ &= b_0 A g^{r-\varrho} + (g A_0 + c_{r-\varrho-1}) g^{r-\varrho-1} + \cdots + c_1 g + c_0. \end{aligned}$$

Aus

$$A_0 \leqq A - 1$$

folgt

$$g A_0 \leqq g A - g,$$

also:

$$g A_0 + c_{r-\varrho-1} < g A.$$

Bringt man jetzt $g A_0 + c_{r-\varrho-1}$ wieder auf die Form

$$b_1 A + A_1, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq b_1 < g, \quad 0 \leqq A_1 < A,$$

so kann man setzen:

$$C = b_0 A g^{r-\varrho} + b_1 A g^{r-\varrho-1} + (g A_1 + c_{r-\varrho-2}) g^{r-\varrho-2} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

In derselben Weise fortfahrend, erhält man schließlich

$$\begin{aligned} C = b_0 A g^{r-\varrho} + b_1 A g^{r-\varrho-1} + b_2 A g^{r-\varrho-2} + \cdots \\ + b_{r-\varrho-1} A g + (g A_{r-\varrho-1} + c_0), \end{aligned}$$

wo

$$1 \leqq b_0 < g,$$
$$0 \leqq b_\mu < g,$$

für $\mu = 1, 2, \ldots (r - \varrho - 1)$, und

$$0 \leqq g A_{r-\varrho-1} + c_0 < g A.$$

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g A_{r-\varrho-1} + c_0$ ist ein Vielfaches von A oder Null, kann also auf die Form $b_{r-\varrho} A$ gebracht werden, wo $b_{r-\varrho}$ eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $(g-1)$ bedeutet. In diesem Falle ist

$$C = A \cdot (b_0 g^{r-\varrho} + b_1 g^{r-\varrho-1} + \cdots + b_{r-\varrho-1} g + b_{r-\varrho}).$$

Die Klammer stellt alsdann den gewünschten Quotienten, und zwar in der Form einer systematischen Zahl $\overline{b_0 b_1 \ldots b_{r-\varrho-1} b_{r-\varrho}}$ dar.

2. $gA_{r-\varrho-1} + c_0$ ist kein Vielfaches von A, sondern gleich

$$b_{r-\varrho} \cdot A + A_{r-\varrho},$$

wo $b_{r-\varrho}$ wieder eine der Zahlen 0, 1, 2 ... $(g-1)$ und

$$0 < A_{r-\varrho} < A$$

ist. Alsdann ist

$$C = A(b_0 g^{r-\varrho} + b_1 g^{r-\varrho-1} + \cdots + b_{r-\varrho-1}g + b_{r-\varrho}) + A_{r-\varrho}$$

kein Vielfaches von A. Die Division „geht nicht auf", es bleibt der Rest $A_{r-\varrho}$. Man pflegt auch in diesem Falle die Zahl $\overline{b_0 b_1 \ldots b_{r-\varrho-1} b_{r-\varrho}}$, welche angibt, wie oft A höchstens in C enthalten ist, als Quotienten der Division $C : A$ zu bezeichnen. Wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird, wollen wir aber das Wort „Quotient" immer in der Bedeutung gebrauchen, wie sie § 6 A definiert worden ist.

Die Zusammenziehung der vorher angedeuteten Rechnungen ergibt ohne weiteres das gewöhnliche, aus den Elementen bekannte Divisionsverfahren.[1])

G. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren der systematischen Zahlen.

Jede Potenz einer systematischen Zahl kann durch wiederholte Multiplikation berechnet werden. Ein besonderes Verfahren wollen wir nur für die zweite und dritte Potenz (die auch als „Quadrat" bezüglich „Kubus" bezeichnet werden) angeben, um aus den auf diese Weise zu findenden Formen derselben Methoden für die Lösung der inversen Aufgaben herzuleiten.

Aus § 5 C, (III) ergibt sich

$$(\alpha_n + \alpha_{n-1})^2 = \alpha_n^2 + 2\alpha_n\alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^2.$$

Mit Benutzung dieser Gleichung findet man weiter:

$$\begin{aligned}(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2})^2 &= (\alpha_n + \alpha_{n-1})^2 + 2(\alpha_n + \alpha_{n-1})\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}^2 \\ &= \alpha_n^2 + 2\alpha_n\alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^2 + 2(\alpha_n + \alpha_{n-1})\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}^2\end{aligned}$$

und in derselben Weise fortfahrend endlich:

1) Ein anderes, bei welchem man nicht mit dem ganzen Divisor, sondern nur mit wenigen Ziffern desselben zu rechnen hat, stammt von Fourier (Analyse des équations déterminées, Paris 1831, S. 187). Wir gehen auf die Fouriersche Methode hier nicht ein, weil sie doch zu kompliziert ist, um für den Unterricht verwertet werden zu können. Vgl. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, § 17 ff.

$$(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1 + \alpha_0)^2 = \alpha_n^2 + 2\alpha_n\alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}^2$$
$$+ 2(\alpha_n + \alpha_{n-1})\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}^2$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ 2(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_2)\alpha_1 + \alpha_1^2$$
$$+ 2(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_2 + \alpha_1)\alpha_0 + \alpha_0^2.$$

Setzt man jetzt

$$\alpha_\nu = a_\nu \cdot g^\nu \quad (\text{für } \nu = n, n-1, \ldots 1, 0),$$

wo g die Basis unseres Zahlensystems und jedes a_ν eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $(g - 1)$ bedeutet, so geht die letzte Gleichung über in:

$$(a_n g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_{n-2} \cdot g^{n-2} + \cdots + a_1 g + a_0)^2 = a_n^2 g^{2n}$$
$$+ 2 a_n a_{n-1} g^{2n-1} + a_{n-1}^2 g^{2n-2}$$
$$+ 2(a_n g + a_{n-1}) a_{n-2} g^{2n-3} + a_{n-2}^2 g^{2n-4}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ 2(a_n g^{n-1} + a_{n-1} g^{n-2} + \cdots + a_2 g + a_1) a_0 g + a_0^2,$$

oder kürzer geschrieben:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}^2 = a_n^2 g^{2n} + 2 a_n a_{n-1} g^{2n-1} + a_{n-1}^2 g^{2n-2}$$
$$+ 2 \overline{a_n a_{n-1}} \cdot a_{n-2} g^{2n-3} + a_{n-2}^2 g^{2n-4}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ 2 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \cdot a_0 g + a_0^2.$$

Damit ist die zweite Potenz der systematischen Zahl

$$A = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$$

in Form einer Summe dargestellt, welche nach fallenden Potenzen der Grundzahl g geordnet ist. Um sie als systematische Zahl zu schreiben, hat man die schon bei der Multiplikation angegebene Umformung der Koeffizienten vorzunehmen, wonach man erhalten möge

$$A^2 = c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} + c_{2n-1} g^{2n-1} + c_{2n-2} g^{2n-2} + \cdots + c_1 g + c_0.$$

Die rechte Seite beginnt entweder mit der $(2n)^{\text{ten}}$ oder der $(2n + 1)^{\text{ten}}$ Potenz von g, in andern Worten, c_{2n+1} ist entweder gleich Null oder hat einen der Werte 1, 2, ... $(g - 1)$. Auf keinen Fall aber kann ein Glied mit einer höheren Potenz vorkommen, weil wegen

$$A < g^{n+1}$$
$$A^2 < g^{2n+2}$$

sein muß.

Wir wenden uns jetzt zur umgekehrten Aufgabe: wir denken

uns eine Zahl C gegeben und suchen diejenige Zahl A, falls überhaupt eine solche existiert, zu bestimmen, deren Quadrat gleich C ist, d. h. wir suchen die zweite Wurzel oder, wie man auch sagt, die Quadratwurzel aus C zu ziehen.

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß wenn

$$C = c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} + c_{2n-1} g^{2n-1} + c_{2n-2} g^{2n-2} + \cdots + c_1 g + c_0$$

bei seiner Darstellung als systematische Zahl mit der $(2n+1)^{\text{ten}}$ oder $(2n)^{\text{ten}}$ Potenz der Grundzahl beginnt, die gesuchte Zahl A notwendig mit der n^{ten} Potenz anfangen, also von der Form

$$A = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0$$

sein muß, wo

$$1 \leqq a_n \leqq g - 1, \quad 0 \leqq a_\nu \leqq g - 1, \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots n - 1.$$

Unsere Aufgabe besteht darin, aus den Koeffizienten c die Koeffizienten a zu berechnen.

Die Entstehung der Koeffizienten c bei der Quadraterhebung einer systematischen Zahl lehrt unmittelbar, daß

$$\text{(I)} \qquad c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} \geqq a_n^2 g^{2n},$$

$$\text{(II)} \qquad c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} + c_{2n-1} g^{2n-1} + c_{2n-2} g^{2n-2}$$
$$\geqq a_n^2 g^{2n} + 2 a_n a_{n-1} g^{2n-1} + a_{n-1}^2 g^{2n-2} \quad \text{usw.}$$

Wir suchen jetzt die größte Zahl g_n auf, deren Quadrat kleiner oder gleich $\overline{c_{2n+1} c_{2n}}$, so daß also

$$g_n^2 \leqq c_{2n+1} g + c_{2n} < (g_n + 1)^2.$$

Die zuerst zu bestimmende Zahl a_n kann nicht größer als g_n sein, weil, wenn $a_n \geqq g_n + 1$,

$$a_n^2 g^{2n} > c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n}$$

wäre, was der obigen Relation I widerspricht. a_n kann aber auch nicht kleiner als g_n sein, weil aus

$$g_n^2 g^{2n} \leqq c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} + \cdots + c_1 g + c_0$$

nach § 7 C, I folgt

$$g_n g^n \leqq a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0,$$

eine Relation, die nur bei $a_n \geqq g_n$ möglich ist. Es muß also $a_n = g_n$ sein. Die erste Ziffer a_n des gesuchten Radikanden A ist damit bestimmt als die größte Zahl, deren Quadrat noch in $\overline{c_{2n+1} c_{2n}}$ enthalten ist. Nunmehr bilden wir die Differenz

$$(c_{2n+1} g + c_{2n}) - a_n^2 = d_n$$

und suchen die größte Zahl g_{n-1}, für welche

$$2a_n g_{n-1} g + g_{n-1}^2 \leqq d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}.$$

Bei dieser Bestimmung von g_{n-1} ist ein Probieren nicht ganz zu vermeiden. Man sucht der Relation zunächst durch diejenige Zahl zu genügen, die man erhält, wenn man $d_n g + c_{2n-1}$ durch $2a_n$ dividiert, muß aber häufig auf eine um eine oder mehrere Einheiten kleinere zurückgehen.[1])

Ähnlich wie vorher überzeugt man sich, daß $a_{n-1} = g_{n-1}$ sein muß. Die Annahme, daß $a_{n-1} \geqq g_{n-1} + 1$, hat nämlich zur Folge:

$$2a_n a_{n-1} g + a_{n-1}^2 > d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$$

oder

$$2a_n a_{n-1} g^{2n-1} + a_{n-1}^2 g^{2n-2} > (c_{2n+1} g + c_{2n} - a_n^2) g^{2n} + c_{2n-1} g^{2n-1} + c_{2n-2} g^{2n-2},$$

eine Ungleichung, welche der Relation II auf S. 46 widerspricht. Weil andrerseits

$$c_{2n+1} g^{2n+1} + c_{2n} g^{2n} + c_{2n-1} g^{2n-1} + \cdots + c_1 g + c_0 \geqq a_n^2 g^{2n} + 2a_n g_{n-1} g^{2n-1} + g_{n-1}^2 g^{2n-2},$$

ist

$$a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g + a_0 \geqq a_n g^n + g_{n-1} g^{n-1},$$

woraus sich ergibt, daß a_{n-1} auch nicht kleiner als g_{n-1} sein kann. Nachdem man so a_{n-1} bestimmt hat, setze man

$$(d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}) - (2a_n a_{n-1} g + a_{n-1}^2) = d_{n-1}$$

und wähle für a_{n-2} die größte Zahl, für welche

$$2(a_n g + a_{n-1}) \cdot a_{n-2} \cdot g + a_{n-2}^2 \leqq d_{n-1} g^2 + c_{2n-3} g + c_{2n-4},$$

und fahre in gleicher Weise fort.

Wenn die Ziffern $a_n, a_{n-1}, \ldots a_\nu$ gefunden sind, ergibt sich $a_{\nu-1}$ als die größte Zahl, für welche

1) Daß eine Zahl, welche größer ist als der auf diese Weise erhaltene Quotient, der letzten Ungleichung sicher nicht genügen kann, ist sofort zu sehen. Darboux (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. Série, 11. Band, 1. Teil, S. 176 ff.; vgl. auch Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, S. 143) hat darauf hingewiesen, daß wenn man $d_n g + c_{2n-1}$ nicht durch $2a_n$, sondern durch $2a_n + 1$ dividiert und den Quotienten q nennt, stets $2a_n q g + q^2 < d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$, aber, wenigstens für $g = 10$, $2a_n(q+2)g + (q+2)^2 > d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$ ist. Die gesuchte Zahl g_{n-1} kann also nur einen der beiden Werte q oder $q+1$ haben, je nachdem nämlich $2a_n(q+1)g + (q+1)^2$ größer oder kleiner als $d_n g^2 + c_{2n-1} g + c_{2n-2}$ ist. Der Beweis ist leicht zu führen.

$$2 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_\nu} \cdot a_{\nu-1} \cdot g + a_{\nu-1}^2 \leqq d_\nu g^2 + c_{2\nu-1} \cdot g + c_{2\nu-2},$$

wo sich d_ν mittelst der „Rekursionsformel“[1])

$$d_\nu = d_{\nu+1} g^2 + c_{2\nu+1} g + c_{2\nu} - (2 \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_{\nu+1}} \cdot a_\nu g + a_\nu^2)$$

berechnen läßt.

Schließlich ist a_0 diejenige Zahl, für welche

$$2 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \cdot a_0 g + a_0^2 = d_1 g^2 + c_1 g + c_0 .$$

Gibt es keine dieser Gleichung genügende Zahl a_0, so heißt das, es existiert keine Zahl A, deren Quadrat der gegebenen Zahl C gleich ist. Nehmen wir in diesem Falle für a_0 den größten Wert, für welchen die linke Seite noch kleiner als die rechte ist, so stellt die entsprechende systematische Zahl A die größte Zahl dar, deren Quadrat noch kleiner als C ist, und die Differenz zwischen der rechten und der linken Seite ist gleich dem Unterschiede $C - A^2$.

Die soeben entwickelten Rechnungsvorschriften erläutern wir an einem Zahlenbeispiel. Um von sonstiger Gewöhnung unabhängig zu sein, wählen wir als Grundzahl des Systems nicht zehn, sondern z. B. zwölf. Wollen wir im „Zwölfersystem“ rechnen, so brauchen wir einerseits besondere Zeichen für die Zahlen zehn und elf, wir nehmen als solche die griechischen Buchstaben ζ und ε; andrerseits müssen wir für die Summe und für das Produkt je zweier der Zahlen $1, 2, \ldots, \zeta, \varepsilon$ Tabellen entwerfen, mittelst deren wir dann alle Rechnungen an den Zahlzeichen rein mechanisch ausführen können, ohne jedesmal an die Bedeutung der Zeichen denken zu müssen. Es sei nun die Aufgabe vorgelegt, aus der im Zwölfersystem geschriebenen Zahl

$$C = {}^{(XII)} 1\,3\,1\,1\,2\,\varepsilon\,0\,1$$

die Quadratwurzel zu ziehen.

Da die Zahl achtstellig ist, haben wir $2n + 1 = 7$, also $n = 3$. Falls überhaupt eine Zahl A existiert, deren Quadrat gleich C ist, muß sie demnach vierstellig sein, d. h. die Form haben

$$A = \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 .^{2)}$$

a_3 ist gleich der größten Zahl, deren Quadrat kleiner als 13 ist, also $a_3 = 3$.

1) Unter einer Rekursionsformel versteht man eine Formel, die jedes Glied einer Reihe von Größen (wie hier die Zahlen $d_n, d_{n-1}, \ldots d_\nu, \ldots d_1$) aus dem vorhergehenden oder aus mehreren vorhergehenden zu berechnen gestattet.

2) 10 ist hier natürlich das Zeichen der Zahl zwölf.

$$d_3 = 13 - 3^2 = 6,$$

und a_2 ist die größte Zahl, für welche

$$2 \cdot 3 \cdot a_2 \cdot 10 + a_2^2 \leqq 611.$$

$2 \cdot 3 = 6$ ist in 61 zwar 10 mal enthalten, aber selbst für $a_2 = \varepsilon$ hat die linke Seite noch den Wert

$$6 \cdot \varepsilon \cdot 10 + \varepsilon^2 = 560 + \zeta 1 = 641,$$

ist also größer als 611.

Für $a_2 = \zeta$ erhalten wir dagegen

$$6 a_2 \cdot 10 + a_2^2 = 500 + 84 = 584 < 611;$$

folglich $a_2 = \zeta$. Jetzt wird

$$d_2 = 611 - 584 = 49$$

und a_1 die größte Zahl, für welche

$$2 \cdot \overline{3\zeta} \cdot a_1 \cdot 10 + a_1^2 \leqq 492\varepsilon$$

oder

$$78 \cdot a_1 \cdot 10 + a_1^2 \leqq 492\varepsilon.$$

78 ist 7 mal in 492 enthalten, und für $a_1 = 7$ ist

$$78 \cdot a_1 \cdot 10 + a_1^2 = 4580 + 41 = 4601,$$

also tatsächlich $a_1 = 7$.

$$d_1 = 492\varepsilon - 4601 = 32\zeta.$$

a_0 ist jetzt so zu bestimmen, daß

$$2 \cdot \overline{3\zeta 7} \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2 = 32\zeta 01$$

oder

$$792 \cdot a_0 \cdot 10 + a_0^2 = 32\zeta 01.$$

Diese Gleichung wird für $a_0 = 5$ erfüllt, also

$$\sqrt{13112\varepsilon 01} = 3\zeta 75.$$

Die weiteren Abkürzungen für das schriftliche Rechnen ergeben sich bei einiger Übung von selbst.[1])

1) Ebenso wie für die Division (Vgl. S. 44, Anm. 1) hat Fourier auch für die Quadratwurzelausziehung ein besonderes Verfahren angegeben, auf das wir aber nicht eingehen, weil zu seinem Verständnis mehr Vorkenntnisse (aus der Reihentheorie usw.) erforderlich sind, als wir an dieser Stelle voraussetzen können. Man vergleiche Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, § 59 ff.

Die Methoden, um eine systematische Zahl in die dritte Potenz oder den Kubus zu erheben und um aus einer solchen Zahl die dritte Wurzel zu ziehen, wollen wir, um Wiederholungen zu vermeiden, nur in aller Kürze angeben.

Mittelst der aus § 5 C, III herzuleitenden Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ergibt sich:

$$(a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_{n-2} \cdot g^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot g + a_0)^3$$
$$= a_n^3 \cdot g^{3n} + 3a_n^2 \cdot a_{n-1} \cdot g^{3n-1} + 3a_n \cdot a_{n-1}^2 \cdot g^{3n-2} + a_{n-1}^3 \cdot g^{3n-3}$$
$$+ 3 \cdot (a_n g + a_{n-1})^2 \cdot a_{n-2} \cdot g^{3n-4} + 3(a_n g + a_{n-1}) a_{n-2}^2 \cdot g^{3n-5} + a_{n-2}^3 \cdot g^{3n-6}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ 3(a_n g^{n-1} + \cdots + a_2 g + a_1)^2 \cdot a_0 g^2 + 3(a_n g^{n-1} + \cdots + a_2 g + a_1) a_0^2 g + a_0^3$$
$$= c_{3n+2} g^{3n+2} + c_{3n+1} g^{3n+1} + c_{3n} g^{3n} + c_{3n-1} g^{3n-1} + \cdots + c_2 g^2 + c_1 g + c_0,$$

wo jeder der Koeffizienten c einen der Werte 0, 1, 2, ... $(g-1)$ hat.

Um nun umgekehrt aus der letzten Zahl die Kubikwurzel zu ziehen, nehme man für a_n die größte Zahl, für welche

$$a_n^3 \leqq c_{3n+2} g^2 + c_{3n+1} g + c_{3n},$$

setze

$$d_n = (c_{3n+2} g^2 + c_{3n+1} g + c_{3n}) - a_n^3$$

und suche für a_{n-1} die größte Zahl, für welche

$$3a_n^2 \cdot a_{n-1} \cdot g^2 + 3a_n \cdot a_{n-1}^2 \cdot g + a_{n-1}^3 \leqq d_n g^3 + c_{3n-1} g^2 + c_{3n-2} g + c_{3n-3},$$

setze die Differenz zwischen der rechten und linken Seite gleich d_{n-1} und bestimme a_{n-2} als die größte Zahl, für welche

$$3 \cdot \overline{a_n a_{n-1}}^2 \cdot a_{n-2} g^2 + 3 \cdot \overline{a_n a_{n-1}} \cdot a_{n-2}^2 g + a_{n-2}^3$$
$$\leqq d_{n-1} g^3 + c_{3n-4} g^2 + c_{3n-5} g + c_{3n-6}, \quad \text{usw.}$$

Die Begründung ist ganz ähnlich der für die Quadratwurzelausziehung gegebenen.

Ohne prinzipielle Schwierigkeit lassen sich auch analoge Methoden für das Ausziehen von Wurzeln mit anderen Wurzelexponenten als 2 und 3 herleiten. Mit wachsendem Exponenten wird aber die Rechnung bald so mühsam, daß man in der Praxis andere Verfahren vorzieht, die wir erst später[1]) kennen lernen werden.

Um den Logarithmus n einer systematischen Zahl p in bezug auf eine auch in systematischer Form gegebene Basis a zu finden,

1) Kap. V, § 5E.

haben wir vorläufig keine andere Möglichkeit, als durch wiederholte Multiplikation die aufeinander folgenden Potenzen von a zu berechnen und zu prüfen, ob für einen Exponenten n, bezüglich für welchen $a^n = p$ ist.

H. Übergang von einem Zahlensystem zu einem mit anderer Grundzahl.

Will man die im System (h) gegebene Zahl

$$b_m h^m + b_{m-1} h^{m-1} + \cdots + b_1 h + b_0$$

als Zahl des Systems (g) darstellen, so hat man nur die Grundzahl h und die Koeffizienten $b_m, b_{m-1}, \ldots b_1, b_0$ im System (g) zu schreiben und dann eine Reihe von Potenzierungen, Multiplikationen und Additionen auszuführen.[1] Soll z. B. die Zahl 4963 des Zehnersystems in das System mit der Grundzahl 12 übertragen werden, so setze man

$$4963 = 4\zeta^3 + 9\zeta^2 + 6\zeta + 3.$$

Da

$$\zeta^2 = 84, \quad \zeta^3 = 84 \cdot \zeta = 6\varepsilon 4,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\mathrm{X})\ 4963 &= (\mathrm{XII})\ 2394 + 630 + 50 + 3 \\ &= (\mathrm{XII})\ 2\zeta 57.\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist, als Basis des Zahlensystems stets die Zahl 10 wählen.

§ 11. Die grundlegenden Sätze über die Teilbarkeit der Zahlen.[2]

A. Gemeinschaftliche Teiler mehrerer Zahlen.

Schon in § 6 A ist gesagt, daß, wenn unter drei Zahlen a, t, m die Gleichung

$$a = t \cdot m$$

besteht, a ein Vielfaches von t und t ein Teiler von a heißt. Wenn $a = 0$, $m = 0$, ist die Gleichung für jede Zahl t erfüllt; jede Zahl kann also als Teiler von 0 angesehen werden. Wenn anderer-

1) Mit den Beziehungen, welche zwischen den Darstellungen ein und derselben Zahl (hauptsächlich allerdings eines echten Bruches) in zwei verschiedenen Systemen bestehen, beschäftigt sich J. Kraus in der Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 37 (1892), S. 321 u. Bd. 39 (1894), S. 11.

2) Diese Sätze finden sich in der Hauptsache schon in den berühmten „Elementen" des Euklid, der um 300 v. Chr. zu Alexandria lebte. Wir folgen hier im wesentlichen der Darstellung in den „Vorlesungen über Zahlentheorie" von Lejeune Dirichlet, herausgegeben von R. Dedekind, und gehen auf das Thema nicht weiter ein, als es für das nächste Kapitel notwendig erscheint.

seits $t = 0$, so muß auch $a = 0$ sein, d. h. keine von 0 verschiedene Zahl kann 0 als Teiler haben.

Aus dem Assoziationsgesetze der Multiplikation (§ 5 B, II) ergibt sich unmittelbar der Satz:

I. Ist τ ein Teiler von t und t wieder ein Teiler von a, so ist auch τ ein Teiler von a.

Aus dem Distributionsgesetze der Multiplikation (§ 5 C, I, II, IV) folgt der Satz:

II. Ist t gemeinschaftlicher Teiler von a und b, d. h. sowohl Teiler von a als auch Teiler von b, so ist t auch Teiler von $a + b$ und $a - b$.

Der Satz gilt auch für eine Summe aus beliebig vielen Summanden.

Einen gemeinschaftlichen Teiler besitzen irgend zwei beliebige Zahlen a, b, nämlich die Zahl 1. Wenn sie keinen andern haben, sagt man von ihnen, indem man von diesem selbstverständlichen Teiler absieht, sie seien ohne gemeinschaftlichen Teiler oder teilerfremd oder relativ prim. Da kein gemeinschaftlicher Teiler von a, b größer als die kleinere dieser beiden Zahlen sein kann, muß einer ihrer gemeinschaftlichen Teiler der größte sein. Die Aufsuchung dieses größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen ist eine außerordentlich wichtige Aufgabe, die schon Euklid gelöst hat (Elemente, Buch VII, Nr. 2, Ausg. von Heiberg, Bd. 2, S. 191). Wenn etwa $a = b$, so ist natürlich der gemeinsame Wert beider Zahlen gleichzeitig auch ihr größter gemeinschaftlicher Teiler. Bezeichnet man andernfalls die größere der beiden Zahlen mit a, so dividiere man a durch b. Entweder geht die Division auf, oder es bleibt ein Rest.[1]) Im ersten Falle ist b der größte gemeinschaftliche Teiler, im zweiten besteht, wenn wir den Quotienten mit m und den Rest mit b_1 bezeichnen, die Gleichung

$$a = bm + b_1, \quad \text{wo } b_1 < b.$$

Durch Division von b durch b_1 erhalte man weiter die Gleichung

$$b = b_1 m_1 + b_2, \quad \text{wo } \quad b_2 < b_1.$$

Dieses Divisionsverfahren setze man so lange fort, bis die Division aufgeht, also der Rest 0 bleibt, was notwendig einmal eintreten muß, weil ja jeder folgende Rest kleiner als der vorhergehende ist. Auf diese Weise erhalte man die folgende Kette von Gleichungen:

1) Vgl. § 10 F, S. 42—44.

III.
$$
\begin{aligned}
a &= bm + b_1,\\
b &= b_1 m_1 + b_2,\\
b_1 &= b_2 m_2 + b_3,\\
&\cdots\cdots\\
b_{\nu-2} &= b_{\nu-1}\cdot m_{\nu-1} + b_\nu,\\
b_{\nu-1} &= b_\nu \cdot m_\nu .
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung lehrt, daß b_ν Teiler von $b_{\nu-1}$ ist. Aus der vorletzten folgt unter Benutzung der Sätze I. und II. dieses Paragraphen, daß b_ν auch Teiler von $b_{\nu-2}$ usw., aus der zweiten, daß b_ν Teiler von b, aus der ersten endlich, daß b_ν auch Teiler von a, also gemeinschaftlicher Teiler von a und b ist. Andererseits ergibt sich aus der ersten Gleichung der Kette, daß jeder gemeinschaftliche Teiler von a und b auch Teiler von b_1, aus der zweiten, daß jeder gemeinschaftliche Teiler von b und b_1 auch Teiler von b_2 usw., schließlich aus der vorletzten, daß jeder gemeinschaftliche Teiler von $b_{\nu-2}$ und $b_{\nu-1}$ auch Teiler von b_ν ist. Demnach ist jeder gemeinschaftliche Teiler von a und b auch Teiler von b_ν. Aus den beiden Ergebnissen, daß die Zahl b_ν erstens gemeinschaftlicher Teiler von a und b und zweitens ein Vielfaches jedes gemeinschaftlichen Teilers von a, b ist, folgt weiter, daß b_ν der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b sein muß. Jeder gemeinschaftliche Teiler zweier Zahlen ist also Teiler des größten gemeinschaftlichen Teilers dieser Zahlen.

Dann und nur dann, wenn $b_\nu = 1$, sind a und b relativ prim. Für zwei solche teilerfremde Zahlen a, b gilt der folgende wichtige Satz:

IV. Wenn a, b relativ prim sind und k eine beliebige Zahl bedeutet, so ist jeder gemeinschaftliche Teiler von $a \cdot k$ und b auch gemeinschaftlicher Teiler von k und b.

Zum Beweise denken wir uns die Gleichungskette III für $b_\nu = 1$ aufgeschrieben und jede Gleichung mit k multipliziert:

$$
\begin{aligned}
ak &= bmk + b_1 k,\\
bk &= b_1 m_1 k + b_2 k,\\
&\cdots\cdots\\
b_{\nu-2}k &= b_{\nu-1} m_{\nu-1} k + k.
\end{aligned}
$$

Aus dieser Kette ergibt sich mittelst derselben Schlüsse, die wir soeben auf III angewendet haben, unmittelbar der zu beweisende Satz.

Zwei spezielle Fälle desselben seien ihrer Wichtigkeit wegen besonders hervorgehoben.

IVa. Wenn a, b relativ prim sind und $a \cdot k$ durch b teilbar ist, so muß k durch b teilbar sein.

IVb. Wenn sowohl a wie auch k zu b relativ prim ist, so muß auch ak zu b relativ prim sein.

Die wiederholte Anwendung dieses Satzes führt zu der Verallgemeinerung:

Wenn die Zahlen $a, k, l, m, \ldots$ sämtlich zu b relativ prim sind, so ist auch ihr Produkt $a \cdot k \cdot l \cdot m \cdots$ zu b relativ prim,

und weiter zur Folgerung:

Wenn jede der Zahlen $a, k, l, m, \ldots$ zu jeder der Zahlen $b, k', l', m', \ldots$ relativ prim ist, so ist auch das Produkt $a \cdot k \cdot l \cdot m \cdots$ zu dem Produkte $b \cdot k' \cdot l' \cdot m' \cdots$ relativ prim.

Gebrauch machen werden wir später insbesondere von der Spezialisierung dieses letzten Satzes:

Wenn a und b relativ prim sind, so ist auch jede Potenz von a zu jeder Potenz von b relativ prim.

B. Gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen.

Im nächsten Kapitel werden wir fernerhin in die Lage kommen, zu zwei gegebenen Zahlen a, b die gemeinschaftlichen Vielfachen suchen zu müssen, d. h. diejenigen Zahlen, welche sowohl durch a wie auch durch b teilbar sind. Wir wollen deshalb auch die Lösung dieser Aufgabe hier mitteilen.

Ist T der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b, $a = a'T$, $b = b'T$, sind also a' und b' relativ prim, so muß jedes gemeinschaftliche Vielfache von a und b zunächst doch Vielfaches von a, also von der Form $m \cdot a = m \cdot a'T$ sein, wo m irgend eine Zahl bedeutet. Damit nun $ma'T$ auch Vielfaches von $b = b'T$ sei, muß $m \cdot a'$ durch b', also weil a' und b' teilerfremd, m durch b' teilbar, demnach von der Form $\mu \cdot b'$ sein. Jedes gemeinschaftliche Vielfache von a, b ist also gleich dem Produkte $a'b'T$ mal irgend einer Zahl μ. Daß umgekehrt auch jedes Produkt von dieser Form $\mu \cdot a'b'T$ Vielfaches von a wie von b ist, leuchtet unmittelbar ein. Die kleinste aller Zahlen $\mu a'b'T$, also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, b ist $a' \cdot b' \cdot T = a \cdot b : T$, und alle übrigen gemeinschaftlichen Vielfachen sind wieder Vielfache dieses kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

Soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von mehr als zwei Zahlen $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ gefunden werden, so sucht man zuerst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache m_1 von a und a_1, dann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache m_2 von m_1 und a_2 usw., endlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache m_n von m_{n-1} und a_n. Ähnlich wie für zwei Zahlen läßt sich zeigen, daß m_n die kleinste aller der Zahlen ist, welche sowohl durch a wie durch $a_1 \ldots$ wie durch a_n

teilbar sind, und daß alle übrigen Zahlen von derselben Eigenschaft Vielfache von m_n sein müssen. Sind insbesondere je zwei der Zahlen $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ relativ prim zu einander, so ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache das Produkt $a \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$.

C. Darstellung einer beliebigen Zahl als Produkt von Primzahlen.

Da für jede Zahl a die Gleichung $a = a \cdot 1$ gilt, ist jede Zahl durch 1 und durch sich selbst teilbar. Eine Zahl, welche nur diese beiden Teiler[1]) besitzt, heißt Primzahl.

Jede Zahl a, welche außer a und 1 noch andere Teiler hat, läßt sich, und zwar nur auf eine Art als Produkt von Primzahlen darstellen; sie heißt deshalb zusammengesetzte Zahl.

Beweis: Ist t ein von a und 1 verschiedener Teiler der Zahl a, so ist t entweder Primzahl oder besitzt einen von t und 1 verschiedenen Teiler t'. Wenn diese Zahl t' nicht selbst Primzahl ist, besitzt sie einen von ihr und 1 verschiedenen Teiler t'' usw. In dieser Weise fortfahrend, muß man, weil $a > t > t' > t'' > \cdots > 1$, notwendig nach weniger als a Schritten auf einen Teiler p stoßen, der Primzahl ist. Nach § 11 A, I ist p auch Teiler von a, also $a = p \cdot a'$. Entweder ist nun a' selbst Primzahl oder, wie nach dem soeben angewendeten Schlußverfahren gefolgert werden kann, durch eine Primzahl p' teilbar, $a' = p' \cdot a''$, also $a = p \cdot p' \cdot a''$. So weiter schließend, findet man für a eine Reihe von Produktdarstellungen

$$a = p \cdot a' = p \cdot p' \cdot a'' = p \cdot p' \cdot p'' \cdot a''' = \cdots,$$

in deren jeder alle Faktoren außer dem letzten sicher Primzahlen sind. Solange der letzte Faktor a', bezüglich a'', bezüglich a''' usw. keine Primzahl ist, kann man die Reihe weiter fortsetzen. Da nun aber $a' > a'' > a''' \cdots > 1$, ist die Anzahl dieser letzten Faktoren kleiner als a'; nach weniger als a' Schritten muß man also auf eine Produktdarstellung stoßen, in welcher sämtliche Faktoren Primzahlen sind.

Angenommen, man hätte für dieselbe Zahl a zwei verschiedene Primzahlprodukte gefunden:

$$a = p \cdot p' \cdot p'' \ldots \quad \text{und} \quad a = q \cdot q' \cdot q'' \ldots,$$

so würde aus

$$p \cdot p' \cdot p'' \cdots = q \cdot q' \cdot q'' \cdots$$

1) Die Zahl 1 selber ist nur durch 1 teilbar. Auch hier also zeigt sich wieder der Ausnahmecharakter von 1 (Vgl. S. 2, Anm. 2). Ob man 1 Primzahl nennen will, ist an sich willkürlich; für die Darstellung erscheint es zweckmäßiger, 1 nicht zu den Primzahlen zu rechnen.

folgen, daß das links stehende Produkt durch q teilbar ist. Es kann also nicht jede der Zahlen $p, p', p'', \ldots$ zu q relativ prim sein (nach § 11 A, IV B). Wenn aber zwei Primzahlen außer 1 noch einen anderen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, so sind sie identisch. Ein Faktor der linken Seite muß also gleich q sein. Läßt man den gleichen Faktor auf beiden Seiten fort und wendet auf die übrigbleibende Gleichung denselben Schluß an, so erkennt man, daß ein anderer Faktor der linken Seite gleich q' sein muß. Die Fortsetzung dieses Schlußverfahrens ergibt, daß jeder Faktor der rechten Seite auch links vorkommt, die linke Seite also jedenfalls gleich dem Produkte von $q \cdot q' \cdot q'' \ldots$ mal einer Zahl r sein muß. Da aber die Gleichung

$$(q \cdot q' \cdot q'' \cdots) \cdot r = q \cdot q' \cdot q'' \cdots$$

nur für $r = 1$ besteht, so folgt, wenn man von dem selbstverständlichen Faktor 1 absieht, daß die Gesamtheit der Primzahlen $p, p', p'', \ldots$ mit der Gesamtheit der Primzahlen $q, q', q'', \ldots$ übereinstimmt, eine beliebige Zahl a sich demnach nur auf **eine** Art als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.

Hierbei kann dieselbe Primzahl mehrmals als Faktor auftreten. Schreibt man das Produkt der einander gleichen Primzahlen als Potenz, so hat man für jede zusammengesetzte Zahl a die Darstellung

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

wo jetzt $p_1, p_2, \ldots p_n$ voneinander verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ irgend welche Zahlen bedeuten.

Die wirkliche Zerlegung einer sehr großen Zahl a in ihre Primfaktoren bezüglich die Entscheidung der Frage, ob eine solche Zahl Primzahl ist, bietet im allgemeinen erhebliche Schwierigkeiten. Bis zu Eulers Zeiten hatte man keine andere Methode, als zu prüfen, ob die vorgelegte Zahl a durch irgend eine der Primzahlen teilbar ist, deren Quadrat $\leqq a$; wenn nämlich $a = r \cdot s$, so kann nicht gleichzeitig $r^2 > a$ und $s^2 > a$ sein. Auf die neueren Methoden, welche die Untersuchung abkürzen, können wir hier nicht eingehen, weil sie eine tiefere Kenntnis der Zahlentheorie voraussetzen.[1]) Man besitzt jetzt Tafeln[2]), welche für alle Zahlen bis zu gewissen Grenzen hin die kleinsten Primzahlteiler angeben. Daß, wie weit man auch in der natürlichen Zahlenreihe fortschreite, man niemals auf eine letzte

1) Vgl. Enzyklopädie der Mathemat. Wissensch., I. Bd., 2. Teil, S. 576.

2) L. Chermac, Cribrum arithmeticum, Deventer 1811 (bis 1020000); J. Chr. Burckhardt, Tables des diviseurs jusqu' à 3036000, Paris, 1814—1817; Z. Dase, Faktorentafeln (7te bis 9te Million), Hamburg, 1860, 63, 65; J. Glaisher, Factortables for the 4., 5., 6. Million, London 1879, 80, 83.

Primzahl stößt, so daß keine Zahl, die größer als diese ist, Primzahl sein könnte, war schon Euklid (Elemente, Buch IX, Nr. XX) bekannt. Bedeutet p irgend eine Primzahl, so bilde man das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ aller Primzahlen, die $\leqq p$, und füge zu diesem Produkte 1 hinzu. Die so entstandene Zahl läßt bei der Division durch irgend eine der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots p$ den Rest 1, ist also durch keine von ihnen teilbar. Es sind jetzt nur zwei Möglichkeiten denkbar: entweder ist die Zahl selbst Primzahl, oder sie ist durch eine von $2, 3, 5, \ldots p$ verschiedene Primzahl teilbar.[1]) Auf jeden Fall also gibt es, wie groß p auch gewählt war, eine noch größere Primzahl.

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl a in ihre Primfaktoren ergibt sich, daß irgend ein Teiler von a keine andern Primfaktoren haben kann als a selber und auch keinen in einer höheren Potenz. Jeder Teiler von a ist also von der Form

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}, \quad \text{wo } 0 \leqq k_\nu \leqq \alpha_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n),$$

und die Anzahl der sämtlichen Teiler von a (1 und a eingeschlossen) beträgt $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$.

Dementsprechend enthält irgend ein Vielfaches von a notwendig jeden Primfaktor von a, und zwar jeden in derselben oder einer höheren Potenz von a, ist also von der Form $p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdots p_n^{\lambda_n} \cdot q$, wo $\lambda_\nu \geqq \alpha_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots n$ und q relativ prim zu a.

Auf Grund dieser Bemerkung können wir für die schon in A. und B. gelösten Aufgaben, zu mehreren Zahlen einerseits den größten gemeinschaftlichen Teiler, andrerseits das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu bestimmen, jetzt noch eine andere Lösung mitteilen, die meist vorzuziehen ist, falls man die Zerlegung der gegebenen Zahlen in Primfaktoren kennt.

Um den größten gemeinschaftlichen Teiler zu finden, versieht man jede Primzahl, die in jeder der gegebenen Zahlen enthalten ist, mit dem Exponenten, welcher ihr in der Primzahlzerlegung derjenigen gegebenen Zahl zukommt, in welcher sie am wenigsten oft auftritt. Das Produkt der so bestimmten Primzahlpotenzen ist ein Teiler jeder der gegebenen Zahlen, während es in mindestens einer der gegebenen Zahlen nicht mehr enthalten wäre, sobald man es noch mit irgend einer Primzahl multiplizierte; es ist also der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler.

Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zu finden, versehe

1) Der erste Fall tritt beispielsweise ein für $p = 2, 3, 5, 7, 11$, der zweite für $p = 13$.

$$(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509).$$

Vgl. Legendre, Zahlentheorie, übersetzt von Maser, Leipzig 1886, Bd. I, S. 15.

man jede Primzahl, die in irgend einer der gegebenen Zahlen enthalten ist, mit dem Exponenten, welcher ihr in der Primzahlzerlegung derjenigen gegebenen Zahl zukommt, in welcher sie am häufigsten auftritt. Das Produkt der so bestimmten Primzahlpotenzen ist ein Vielfaches jeder der gegebenen Zahlen, während es durch mindestens eine der gegebenen Zahlen nicht mehr teilbar wäre, sobald man es durch irgend eine Primzahl dividierte; es ist also das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

§ 12. Einige weitere (im folgenden Kapitel zu verwertende) Begriffe und Sätze aus den Elementen der Zahlentheorie.

A. Zahlenkongruenzen.

Sind zwei beliebige Zahlen g, m gegeben, so lassen sich stets mittels Division von g durch m (vgl. § 10 F, S. 42—44) zwei Zahlen q, r eindeutig so bestimmen, daß

$$g = q \cdot m + r, \quad \text{wo} \quad q \geqq 0, \quad 0 \leqq r \leqq m - 1.$$

Die Teilung einer zweiten Zahl g' durch m ergebe den Quotienten q' und den Rest r', so daß

$$g' = q' \cdot m + r'.$$

Wenn nun

$$r = r', \quad \text{also} \quad g - g' = (q - q')m$$

(bezüglich $g' - g = (q' - q)m$) ein Vielfaches von m ist, so sagt man nach der von Gauß in der Sectio Prima seiner Disquisitiones Arithmeticae (1801) eingeführten Bezeichnungsweise, g sei kongruent g' für den Modul m, schreibt $g \equiv g' \pmod{m}$ und nennt die Beziehung zwischen g und g' eine Kongruenz.[1])

Daß auch umgekehrt, wenn $g - g'$ (wobei wir voraussetzen, daß $g > g'$) durch m teilbar ist, g und g' bei der Division durch m notwendig denselben Rest lassen, ist leicht zu sehen; denn aus

$$g - g' = (q - q')m + r - r',$$

1) Das Wort „congruum" wird im selben Sinne wie von Gauß schon viel früher (1732) von Goldbach in einer Abhandlung „Criteria quaedam aequationum, quarum nulla radix rationalis est" (Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum 1732 et 1733, Bd. VI, 98—102) verwendet. Vgl. M. Cantor, Vorlesungen, Bd. III, S. 611. Wir benutzen den Kongruenzbegriff hier nur der kürzeren Ausdrucksweise wegen, ohne auf die Theorie der Kongruenzen genauer eingehen zu wollen.

bezüglich, falls $r < r'$,

$$= (q - q')m - (r' - r)$$

folgt, daß unter der gemachten Voraussetzung $r - r'$ (bezüglich $r' - r$) durch m teilbar sein muß, was aber, da $r \leqq m - 1$, $r' \leqq m - 1$, nur möglich ist, wenn $r - r' = 0$, also $r = r'$.

Eine beliebige Zahl g ist der durch die Gleichung $g = qm + r$ bestimmten Zahl r, d. h. stets einer (aber auch nur einer) der Zahlen $0, 1, 2 \ldots m - 1$ für den Modul m kongruent. Man nennt diese Zahl r den kleinsten Rest von g für den Modul m.

Jede für den Modul m bestehende Kongruenz gilt auch für irgend einen Teiler von m als Modul. Wenn während einer Entwicklung der Modul derselbe bleibt, werden wir ihn nicht bei jeder Kongruenz wiederholen.

Für die Kongruenzen existiert eine Reihe von Sätzen, die den früher für die Gleichungen abgeleiteten entsprechen.

I. Wenn

$$\left.\begin{array}{ll} & g \equiv g' \\ \text{und} & g \equiv g'', \\ \hline \text{so ist auch} & g' \equiv g'' \end{array}\right\} \pmod{m};$$

denn wenn g, g', g'' bei der Division durch m bezüglich die Reste r, r', r'' lassen, so folgt aus $r = r'$ und $r = r''$, daß auch $r' = r''$.

II. Wenn

$$g_\nu \equiv g_\nu' \quad (\text{für } \nu = 1, 2, \ldots n),$$

so ist auch

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n \equiv g_1' + g_2' + \cdots + g_n'.$$

Denn die Addition der n Gleichungen

$$g_\nu = q_\nu m + r_\nu$$

ergibt

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)m + r_1 + r_2 + \cdots + r_n,$$

und die der n Gleichungen

$$g_\nu' = q_\nu' m + r_\nu$$

ergibt

$$g_1' + g_2' + \cdots + g_n' = (q_1' + q_2' + \cdots + q_n')m + r_1 + r_2 + \cdots + r_n,$$

woraus folgt, daß die Summen $g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ und $g_1' + g_2' + \cdots + g_n'$ bei der Division durch m denselben Rest lassen.

III. Ähnlich zeigt man, daß, wenn

$$g_1 \equiv g_1'$$

und

$$g_2 \equiv g_2',$$

auch

$$g_1 - g_2 \equiv g_1' - g_2'.$$

IV. Wenn

$$g_1 \equiv g_1'$$

und

$$g_2 \equiv g_2',$$

so ist auch

$$g_1 \cdot g_2 \equiv g_1' \cdot g_2'.$$

Denn durch Multiplikation der beiden Gleichungen

$g_1 = q_1 m + r_1$, $g_2 = q_2 m + r_2$ bezüglich der beiden Gleichungen $g_1' = q_1' m + r_1$, $g_2' = q_2' m + r_2$

folgt

$$g_1 \cdot g_2 = (q_1 q_2 m + r_1 q_2 + r_2 q_1) m + r_1 r_2$$

und

$$g_1' \cdot g_2' = (q_1' q_2' m + r_1 q_2' + r_2 q_1') m + r_1 r_2,$$

woraus sich ergibt, daß $g_1 \cdot g_2$ und $g_1' \cdot g_2'$ bei der Division durch m denselben Rest lassen.

Mittels des Schlusses von n auf $(n+1)$ (§ 3 B, S. 10) dehnt man den Satz auf ein Produkt von beliebig vielen Faktoren aus. Durch Gleichsetzung der einzelnen Faktoren zieht man aus dem erweiterten Satze die Folgerung

IVa., daß, wenn

$$g \equiv g',$$

auch

$$g^n \equiv g'^n.$$

Aus II., IV. und IVa. ergibt sich ferner

IVb., daß, wenn

$$a_\nu \equiv a_\nu' \quad (\text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

und

$$g \equiv g',$$

auch

$$a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot g + a_0 \equiv a_n' \cdot g'^n + a_{n-1}' \cdot g'^{n-1} + \cdots + a_1' \cdot g' + a_0'.$$

V. Wenn

$$k \cdot g \equiv k \cdot g' (\text{mod } m)$$

und wenn außerdem k relativ prim zu m ist, so muß

$$g \equiv g' \pmod{m}$$

sein; denn $k \cdot g - k \cdot g' = k \cdot (g - g')$ kann unter der gemachten Vor-

aussetzung nur dann durch m teilbar sein, wenn $g - g'$ ein Vielfaches von m ist (§ 11 A, IVa).

Die Sätze II. bis IVb. enthalten die Begründung gewisser Proben für die Richtigkeit einer Zahlenrechnung. Ist aus irgendwelchen gegebenen Zahlen durch eine Reihe von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Potenzerhebungen eine Zahl N hergeleitet, so ersetze man jede der gegebenen Zahlen durch ihren kleinsten Rest für einen beliebigen Modul m und führe mit diesen kleinsten Resten genau dieselbe Rechnung aus, die als Resultat die Zahl n ergeben möge. Notwendige (aber natürlich nicht hinreichende) Bedingung für die Richtigkeit der Zahl N ist, daß N und n (mod m) dieselben kleinsten Reste besitzen. Bequem in der Anwendung ist die Probe besonders für die Moduln 9 und 11, weil für diese sich die kleinsten Reste einer Zahl im dekadischen System leicht und schnell bestimmen lassen.[1]) (Vgl. Abschnitt D, II dieses Paragraphen, S. 67 ff.).

B. Anzahl der Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl m und relativ prim zu m sind.

Für viele Untersuchungen von großem Interesse ist die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als eine vorgelegte Zahl m sind und mit m keinen andern Teiler als 1 gemeinsam haben. Nach Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Nr. 38) pflegt man diese Anzahl durch $\varphi(m)$ zu bezeichnen.[2])

I. Für eine Primzahl p ist $\varphi(p) = p - 1$.

II. Eine Primzahlpotenz p^α hat gemeinschaftliche Teiler nur mit den sämtlichen Vielfachen von p; $\varphi(p^\alpha)$ ist also die Differenz zwischen der Anzahl $p^\alpha - 1$ der sämtlichen Zahlen, die kleiner als p^α sind, und der Anzahl $p^{\alpha-1} - 1$ der Vielfachen von p:

$$1 \cdot p,\ 2 \cdot p, \ldots (p^{\alpha-1} - 1) \cdot p,$$

1) Die „Neunerprobe“ war schon den Indern bekannt [M. Cantor, Vorlesungen I, S. 571], von denen sie die Araber kennen lernten. Einen Beweis der Neunerprobe gibt Leonardo von Pisa (um 1200); vgl. M. Cantor, Vorlesungen II, S. 9. Die „Elferprobe“ kommt wohl zuerst bei arabischen Mathematikern vor (M. Cantor I, S. 722). Ein Araber, Ibn Albannâ (Ende des 13. Jahrh.) verwendet auch schon die „Siebenerprobe“ [M. Cantor I, S. 759]. Diese Proben und auch solche mit noch anderen Zahlen finden sich dann wieder in den Rechenbüchern des 15. und 16. Jahrhunderts. Von Wichtigkeit waren die Proben besonders dann, wenn schon während der Ausführung einer Rechnung Zahlen fortgelöscht und durch andere ersetzt wurden, was eine direkte Nachprüfung schwierig machte.

2) In Frankreich nennt man dieselbe Anzahl auch (nach Cauchy) den „indicateur“ von m, in England (nach Sylvester) „totient“ und schreibt sie $\tau(m)$.

die kleiner als p^α sind; demnach

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1} \cdot (p-1).$$

III. Es sei jetzt m gleich dem Produkte $P \cdot Q$ zweier Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Eine beliebige Zahl ist dann und nur dann zu $m = P \cdot Q$ relativ prim, wenn sie sowohl zu P wie zu Q relativ prim ist (§ 11 A, IVb.). Wir müssen also aus der Menge $1, 2, \ldots m-1$ alle die Zahlen heraussuchen, die weder mit P noch mit Q einen gemeinsamen Teiler haben. Zu diesem Zwecke ordnen wir die Zahlen $0, 1, 2, \ldots m-1$ in folgender Weise:

$$\begin{array}{ccccc}
0, & Q, & 2Q, & \cdots & (P-1)Q, \\
1, & Q+1, & 2Q+1, & \cdots & (P-1)Q+1, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k, & Q+k, & 2Q+k, & \cdots & (P-1)Q+k, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
Q-1, & Q+(Q-1), & 2Q+(Q-1), & \cdots & (P-1)Q+(Q-1).
\end{array}$$

Besitzt k ($< Q$) einen gemeinschaftlichen Teiler mit Q, so haben sämtliche Glieder der mit k beginnenden Zeile denselben gemeinschaftlichen Teiler mit Q (§ 11 A, (II)); ist dagegen k relativ prim zu Q, so sind auch sämtliche Glieder dieser Zeile zu Q relativ prim; denn wenn $z = \nu Q + k$ mit Q einen gemeinsamen Teiler hätte, so müßte wegen $k = z - \nu Q$ auch k denselben Teiler haben. Wir brauchen also nur diejenigen Zeilen beizubehalten, welche mit einer zu Q teilerfremden Zahl k beginnen. Die Anzahl dieser Zeilen beträgt $\varphi(Q)$.

Zwei Glieder ein und derselben Reihe können für den Modul P einander nicht kongruent sein; denn aus

$$\mu Q + k \equiv \nu Q + k \pmod{P}$$

würde folgen:

$$\mu Q \equiv \nu Q$$

und hieraus (nach § 12 A, (V)):

$$\mu \equiv \nu,$$

was wegen $\mu < P$, $\nu < P$ nur möglich ist, wenn $\mu = \nu$. Die Glieder einer Zeile lassen also, durch P dividiert, lauter verschiedene Reste. Da nun die Anzahl der bei der Division durch P möglichen Reste genau gleich der Anzahl der Glieder einer Reihe ist, so muß jeder der Reste $0, 1, 2, \ldots P-1$ wirklich einmal, aber auch nur einmal in einer Reihe vorkommen. Eine Zahl ist aber dann und nur dann zu P relativ prim, wenn ihr kleinster Rest (mod P) diese Eigenschaft besitzt. Die Anzahl der Glieder einer Reihe, welche zu P relativ

prim sind, ist also gleich der Anzahl der unter den Resten $0, 1, 2, \dots P-1$ zu P teilerfremden Zahlen, d. h. gleich $\varphi(P)$.

Um alle Zahlen zu erhalten, die zu $m = PQ$ relativ prim sind, hat man also aus jeder von $\varphi(Q)$ Zeilen $\varphi(P)$ Glieder zu nehmen; die Anzahl dieser Zahlen beträgt daher:

$$\varphi(m) = \varphi(P) \cdot \varphi(Q).$$

IV. Mittels des Schlusses von n auf $n+1$ (§ 3 B, S. 10) läßt sich die Gültigkeit dieser Formel sofort auf den Fall ausdehnen, daß m gleich dem Produkte aus beliebig vielen, zueinander teilerfremden Faktoren $P_1, P_2, \dots P_n$ ist, wobei man nur von dem Satze (§ 11 A, IV b) Gebrauch zu machen hat, daß wenn je zwei der Zahlen $P_1, P_2, \dots P_n$ zueinander relativ prim sind, auch jede der Zahlen zu dem Produkte irgend welcher andern unter ihnen relativ prim ist.

Wenn $P_\nu = p_\nu^{\alpha_\nu}$ (für $\nu = 1, 2, \dots n$), wo die p_ν voneinander verschiedene Primzahlen bedeuten, so ist die für die P_ν gemachte Voraussetzung erfüllt und deshalb

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2}) \dots \varphi(p_n^{\alpha_n})$$
$$= p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) \cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \cdots p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1).$$ [1]

C. Potenzreste und Fermatscher Satz.

Bedeuten g, m irgend zwei teilerfremde Zahlen, so sind (nach § 11 A, IV b) auch sämtliche Potenzen von g und demnach auch ihre kleinsten Reste (mod m) relativ prim zu m. Die Anzahl der voneinander verschiedenen Reste, die man erhält, wenn man alle möglichen Potenzen von g durch m dividiert, kann also nicht größer sein als $\varphi(m)$. Es müssen deshalb schon in der Reihe

$$g^0, g^1, g^2, \dots g^{\varphi(m)}$$

wenigstens zwei Glieder vorkommen, die denselben Rest liefern, also (mod m) einander kongruent sind; das erste sei g^n, das zweite g^{n+t}, wo

$$0 \leqq n < \varphi(m),$$
$$0 < t \leqq \varphi(m).$$

Aus

$$g^{n+t} \equiv g^n \pmod{m}$$

1) Dieses Resultat stammt von Euler (Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 8 (1760/61), S. 74). In den Lehrbüchern der Zahlentheorie findet man noch verschiedene andere Beweise der Formel.

folgt, weil g^n zu m relativ prim, nach § 12 A, V:

$$g^t \equiv 1 \pmod{m}.$$

Es existiert also sicher wenigstens eine Zahl t, die von Null verschieden und $\leqq \varphi(m)$ ist, so daß die t^{te} Potenz von g, durch m dividiert, den Rest 1 ergibt.

Dann aber ist auch (§ 12 A, IV a) für jede beliebige Zahl ν

$$g^{\nu t} \equiv 1 \pmod{m};$$

d. h., es gibt unbestimmt viele Potenzen von g, welche (mod m) kongruent 1 sind. Verstehen wir (wie von nun an stets) unter t den kleinsten (von Null verschiedenen) Exponenten, für welchen

$$g^t \equiv 1 \pmod{m},$$

so läßt sich zeigen, daß, wenn auch

$$g^T \equiv 1 \pmod{m},$$

T ein Vielfaches von t sein muß. Denken wir uns nämlich T auf die Form $\nu t + t'$ gebracht, wo $\nu \geqq 0$, $0 \leqq t' \leqq t-1$, so folgt aus

$$\left.\begin{array}{ll} & g^{\nu t + t'} \equiv 1 \\ \text{und} & \underline{g^{\nu t} \equiv 1} \\ & g^{\nu t} \cdot g^{t'} \equiv g^{\nu t}; \\ \text{deshalb (§ 12 A, V)} & g^{t'} \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{m},$$

was nach der über t gemachten Voraussetzung nur möglich ist, falls $t' = 0$, so daß also $T = \nu t$. Wenn t der kleinste (von Null verschiedene) Exponent ist, für welchen $g^t \equiv 1 \pmod{m}$, so sagt man nach Gauß (Disquisitiones Arithmeticae, Nr. 53), „g gehöre zum Exponenten t für die Zahl m“. Die Potenzen $g^1, g^2, \ldots g^t$ liefern alsdann bei der Division durch m lauter verschiedene Reste; die Kongruenz zweier von ihnen würde nämlich zur Folge haben, daß schon eine niedrigere Potenz als die t^{te} (mod m) kongruent 1 wäre.

Da, falls n eine beliebige Zahl $= \nu t + t'$ ($\nu \geqq 0$, $0 \leqq t' \leqq t-1$),

$$g^n \equiv g^{t'} \pmod{m},$$

so erhält man, wie weit man auch in der Reihe der Potenzen von g fortschreiten möge, bei der Division durch m immer nur dieselben Reste wie von $g^0, g^1, \ldots g^{t-1}$. Wenn deshalb $t < \varphi(m)$, dann erschöpfen die Reste aller Potenzen von g nicht die Gesamtheit der Zahlen, die kleiner als m und zu m relativ prim sind. Bedeutet in

diesem Falle r eine von diesen zu m teilerfremden Zahlen, die unter den Resten der Potenzen von g nicht vorkommt, so sind die Reste von

$$rg^0, \quad rg^1, \ldots rg^{t-1}$$

1. sämtlich relativ prim zu m, 2. voneinander und 3. von den Resten von $g^0, g^1, \ldots g^{t-1}$ verschieden.

Behauptung 1. folgt aus § 11 A, IV b. Das Gegenteil von 2. hätte zur Folge, daß schon eine niedrigere Potenz von g als die t^{te} kongruent 1 (mod m) sein würde.

Wäre endlich

$$rg^{t'} \equiv g^{t''},$$

so folgte (falls $t'' \geqq t'$)

$$r \equiv g^{t''-t'},$$

bezüglich (falls $t'' < t'$)

$$r \equiv g^{t+t''-t'},$$

was der über r gemachten Voraussetzung widerspricht, so daß auch Behauptung 3. erwiesen ist.

Sollten auch mit den Resten von

$$g^0, g^1, \ldots g^{t-1}$$

und von

$$rg^0, rg^1, \ldots rg^{t-1}$$

noch nicht alle Zahlen erschöpft sein, die kleiner als m und relativ prim zu m sind, und bedeutet ϱ eine solche, noch nicht als Rest vorgekommene Zahl, so folgt ähnlich wie vorher, daß die Reste von

$$\varrho g^0, \varrho g^1, \ldots \varrho g^{t-1}$$

sämtlich 1. relativ prim zu m, 2. voneinander und 3. von den bisherigen verschieden sind. In gleicher Weise fortschließend, erkennt man, daß, solange man noch eine Zahl angeben kann, die kleiner als m und zu m relativ prim ist und unter den schon erhaltenen Resten noch nicht vorkommt, diese die Existenz von t Zahlen derselben Eigenschaft nach sich zieht. Die sämtlichen $\varphi(m)$ Zahlen, welche relativ prim zu m und kleiner als m sind, zerfallen also, wenn $t < \varphi(m)$, in Gruppen von je t Gliedern. Daher ist $\varphi(m)$ entweder gleich t oder ein Vielfaches von t.

Daraus folgt aber (§ 12 A, IV a), daß

$$g^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ m).$$

Diese wichtige Kongruenz pflegt man als den verallgemeinerten Fermatschen Satz zu bezeichnen. Der geniale französische Mathe-

matiker Pierre de Fermat hat ihn nämlich zuerst[1]) (Brief an Frénicle vom 18. Oktober 1640) für den speziellen Fall, daß m eine Primzahl, $\varphi(m)$ also gleich $m-1$ ist, allerdings ohne Beweis, ausgesprochen. Der erste Beweis findet sich (um 1700) in dem Aufsatze „Nova algebrae promotio" von Leibniz[2]), der wahrscheinlich von Fermats Entdeckung keine Kenntnis hatte. Da aber dieser Aufsatz nicht gedruckt, vielmehr erst später im Nachlaß von Leibniz gefunden worden ist, konnte er auf die Zeitgenossen keinen Einfluß ausüben. Die ersten an die Öffentlichkeit gelangten Beweise stammen von L. Euler (Comment. Petrop. ad annum 1736, Bd. 8, S. 141—146; Novi Comment. Petrop. ad annum 1758/59, Bd. 7, S. 49—82; Novi Comment. Petrop. ad annum 1760/61, Bd. 8, S. 74 u. ff., an welch letzterer Stelle der verallgemeinerte Fermatsche Satz bewiesen ist).

D. Kriterien für die Teilbarkeit der systematischen Zahlen.

Ob eine in systematischer Form geschriebene Zahl

$$A = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$$

durch eine andere Zahl teilbar ist, kann man häufig entscheiden, ohne die Division wirklich auszuführen.

I. Teilbarkeit durch eine Zahl, welche keine anderen Primfaktoren als g enthält.

Jede derartige Zahl ist Teiler von g oder einer Potenz von g mit hinreichend hohem Exponenten.

Da

$$A \equiv a_0 \pmod{g},$$
$$A \equiv a_1 g + a_0 \pmod{g^2},$$
$$A \equiv a_2 g^2 + a_1 g + a_0 \pmod{g^3} \text{ usw.},$$

so ist A teilbar durch g oder einen Teiler von g, wenn das Gleiche von a_0 gilt, teilbar durch g^2 oder einen Teiler von g^2, wenn das Gleiche von $a_1 g + a_0$ gilt, teilbar durch g^3 oder einen Teiler von g^3, wenn das Gleiche von $a_2 g^2 + a_1 g + a_0$ gilt usw.

Für g gleich zehn erhält man so Regeln für die Teilbarkeit durch

10, 2, 5;
100, 4, 20, 25, 50;
1000, 8, 40, 125, 200, 250, 500 usw.;

---

1) M. Cantor, Vorlesungen II, S. 776 u. 777.
2) M. Cantor, Vorlesungen III, S. 331.

für g gleich zwölf liefern dieselben Kongruenzen Regeln für die Teilbarkeit durch die (im Zehnersystem geschriebenen) Zahlen

12, 2, 3, 4, 6;
144, 8, 9, 16, 18, 24, 36, 48, 72;
1728, 27, 32, 54, 64, 96, 108, 192, 216, 288, 432, 576, 864 usw.[1])

II. Teilbarkeit durch eine zu g teilerfremde Zahl m.

Um zunächst statt der vorgelegten Zahl

$$A = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \cdots + a_{n-1} g^{n-1} + a_n g^n$$

eine kleinere, ihr (mod m) kongruente Zahl zu erhalten, ist der nächstliegende Gedanke, alle Potenzen von g durch ihre kleinsten Reste (mod m) zu ersetzen.

Gehört g zum Exponenten t für den Modul m, so lassen, wie wir im Abschnitt C dieses Paragraphen gesehen haben,

$$\begin{array}{llll} g^0, & g^t, & g^{2t}, & \ldots \text{ denselben Rest } 1, \\ g^1, & g^{t+1}, & g^{2t+1}, & \ldots \text{ denselben Rest } \gamma_1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ g^{t-1}, & g^{2t-1}, & g^{3t-1}, & \ldots \text{ denselben Rest } \gamma_{t-1}, \end{array}$$

und es ist deshalb für den Modul m

$$A \equiv a_0 + a_t + a_{2t} + \cdots + \gamma_1 \cdot (a_1 + a_{t+1} + a_{2t+1} + \cdots) + \cdots \\ + \gamma_{t-1}(a_{t-1} + a_{2t-1} + a_{3t-1} + \cdots).$$

A ist dann und nur dann durch m teilbar, wenn die rechte Seite durch m teilbar ist. Bequem und einfach wird die Anwendung dieses Kriteriums, wenn t einen kleinen Wert hat.

Es sei

1. $m = g - 1$.

In diesem Falle ist $g \equiv 1 \pmod{m}$, also $t = 1$ und

$$A \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (\text{mod } g - 1).$$

Man erhält die Regel: Eine Zahl ist dann und nur dann durch $g - 1$ oder einen Teiler von $g - 1$ teilbar, wenn die Summe der Ziffern, die sogenannte „Quersumme", durch die betreffende Zahl teilbar ist. Bei g gleich zehn ist die Regel ein Kriterium für die Teilbarkeit durch 9 und 3, bei g gleich zwölf eins für die Teilbarkeit durch 11.

1) Daß im Zwölfersystem für die Teilbarkeit einer Zahl durch eine größere Anzahl anderer Zahlen als im Zehnersystem so einfache Kriterien existieren, begründet für das Rechnen einen Vorzug des Zwölfersystems.

2. $m = g + 1$.

In diesem Falle ist

$$\left.\begin{aligned} g &\equiv m-1, \\ g^2 &\equiv m^2 - 2m + 1, \\ \text{also}\quad g^2 &\equiv 1, \end{aligned}\right\} \pmod{m}$$

deshalb

$$t = 2, \quad \gamma_1 = m - 1$$

und

$$A \equiv a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + (m-1)(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

oder

$$A \equiv m(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$$

bezüglich

$$\equiv m(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) - [(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots)],$$

je nachdem

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) \gtrless (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots).$$

Daraus folgt: A ist dann und nur dann durch $m = g + 1$ (oder einen Teiler von $g + 1$) teilbar, wenn dasselbe von der Differenz

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots),$$

bezüglich

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) - (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots)$$

gilt. Bei g gleich zehn erhält man so eine Regel für die Teilbarkeit durch elf, bei g gleich zwölf eine solche für die Teilbarkeit durch dreizehn.

Indem wir darauf verzichten, das allgemeine Kriterium auf eine größere Anzahl spezieller Fälle[1]) anzuwenden, setzen wir nur noch

3. $m = 7$, für $g = 10$.

In bezug auf den Modul 7 ist

$$10^0 \equiv 1, \quad 10^1 \equiv 3, \quad 10^2 \equiv 2, \quad 10^3 \equiv 6, \quad 10^4 \equiv 4, \quad 10^5 \equiv 5, \quad 10^6 \equiv 1,$$

also

$$A \equiv 1 \cdot a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 \\ + 1 \cdot a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + 4a_{10} + 5a_{11} + \cdots\,^{2)}.$$

1) Verhältnismäßig einfache Regeln erhält man noch beispielsweise unter der Voraussetzung $g = 10$ für $m = 27$ und $m = 37$; für diese Werte wird $t = 3$. Für $m = 13$ wird $t = 6$.

2) Eine dieser Kongruenz durchaus entsprechende Regel zur Aufsuchung des kleinsten Restes einer Zahl (mod 7) gibt schon der Araber Ibn Albannâ gegen Ende des 13. Jahrhunderts. [Vgl. S. 61, Anm. 1]. Diese Regel ist dann viel verwendet worden einerseits für die Siebenerprobe, andrerseits für die Untersuchung einer Zahl auf ihre Teilbarkeit durch 7.

Anstatt diese Kongruenz unmittelbar zur Aufstellung einer Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 7 zu benutzen, ist es etwas zweckmäßiger, zunächst 6 durch $7-1$, 4 durch $7-3$ und 5 durch $7-2$ zu ersetzen.

Es wird dann

$$A \equiv 7 \cdot S + 1 \cdot a_0 + 3a_1 + 2a_2 - 1 \cdot a_3 - 3a_4 - 2a_5$$
$$+ 1 \cdot a_6 + 3a_7 + 2a_8 - 1 \cdot a_9 - 3a_{10} - 2a_{11} + \cdots,$$

wo

$$S = a_3 + a_4 + a_5 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \cdots.$$

Hieraus ergibt sich für die Untersuchung einer Zahl auf ihre Teilbarkeit durch 7 die Regel: Man teile die Zahl, bei den Einern anfangend, in Gruppen von je drei Stellen, multipliziere die Ziffern einer jeden Gruppe, immer mit der vom niedrigsten Stellenwert beginnend, der Reihe nach mit 1, 3, 2 und reduziere die Produkte sofort auf ihre kleinsten Reste mod 7. Man bilde nun einerseits die Summe aus den Resten der ersten, dritten, fünften usw. Gruppe, andrerseits aus denen der zweiten, vierten, sechsten usw. Gruppe. Die gegebene Zahl ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn die Differenz der beiden Summen durch 7 teilbar ist.

Auch noch auf anderem Wege kann man zu Teilbarkeitsregeln gelangen. Beschränken wir uns jetzt auf Zahlen des dekadischen Systems und denken uns A in der Form $10A_0 + a_0$ geschrieben ($a_0 < 10$), so ist

$$A \equiv 10A_0 + a_0 \pm \mu m a_0 \pmod{m},$$

wo μ eine beliebige Zahl bedeuten kann.

Diese Zahl μ bestimmen wir so, daß $\mu m + 1$ oder $\mu m - 1$ ein Vielfaches von 10, etwa $\nu \cdot 10$, wird.

Dann besteht die Kongruenz

$$A \equiv 10A_0 \pm \nu \cdot 10 \cdot a_0 \pmod{m}.$$

Da nun, weil m zu 10 relativ prim, die beiden Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} 10A_0 \pm \nu \cdot 10a_0 &\equiv 0 \\ \text{und}\quad A_0 \pm \nu \cdot a_0 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{m}$$

einander äquivalent sind, ist $A = 10A_0 + a_0$ dann und nur dann durch m teilbar, wenn das Gleiche von $A_0 \pm \nu a_0$ gilt. Diese Zahl $A_0 \pm \nu a_0$ kann man nun nach derselben Methode wieder durch eine kleinere ersetzen usw.

Zum Beispiel ist für $m = 7$

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv 10A_0 + a_0 - 3 \cdot 7a_0 \\ \text{oder}\quad A &\equiv 10A_0 - 20a_0 \end{aligned}\right\} \pmod{7}.$$

Anstatt die Zahl A auf ihre Teilbarkeit durch 7 zu untersuchen, kann man also $A_0 - 2a_0$[1]) daraufhin prüfen. Ist etwa die Zahl 25403 vorgelegt, so bilde man der Reihe nach

$$2540 - 6 = 2534,$$
$$253 - 8 = 245,$$
$$24 - 10 = 14.$$

25403 ist also durch 7 teilbar.

Ähnliche Regeln lassen sich leicht für die Teilbarkeit durch irgend eine andere zu 10 teilerfremde Zahl aufstellen.[2])

Für gewisse Zahlen, nämlich die Teiler von $10^\nu + 1$, wo ν eine beliebige Zahl bedeutet, erhält man noch vorteilhaftere Regeln, wenn man A in der Form schreibt:

$$A = A_\nu \cdot 10^\nu + A_\nu', \quad \text{wo} \quad A_\nu' < 10^\nu,$$
$$= A_\nu \cdot (10^\nu + 1) + A_\nu' - A_\nu$$

oder:

$$= A_\nu \cdot (10^\nu + 1) - (A_\nu - A_\nu'),$$

je nachdem $A_\nu' \gtrless A_\nu$.

Diese Darstellung zeigt, daß A dann und nur dann durch $10^\nu + 1$ oder einen Teiler von $10^\nu + 1$ teilbar ist, wenn dasselbe von $A_\nu' - A_\nu$ bezüglich $A_\nu - A_\nu'$ gilt. Wählt man $\nu = 3$, so ist

$$10^\nu + 1 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

und man hat somit ein Kriterium für die Teilbarkeit durch 1001, 7, 11, 13. Beispielsweise ist 113945 durch 13 teilbar, weil

$$945 - 113 = 832$$

ein Vielfaches von 13 ist. Offenbar lassen sich nach diesem Prinzipe ähnliche Regeln für die Teiler von $10^\nu - 1$, auch für die von $10^\nu \pm 2$ usw. aufstellen[3]); wir gehen darauf nicht näher ein, weil diesen Regeln für das praktische Rechnen doch kein besonderer Wert beizumessen sein dürfte.

---

1) Natürlich haben A und $A_0 - 2a_0$ im allgemeinen nicht dieselben kleinsten Reste (mod 7), die Übereinstimmung gilt nur für den Rest 0.

2) Vgl. Zerlang, Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, Bd. II (1871), S. 337; Dickstein, Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, Bd. IV (1873), S. 404; Masing, Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, Bd. IV (1873), S. 407.

3) Vgl. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig 1888, S. 151.

III. Teilbarkeit durch eine Zahl, welche wenigstens einen Primfaktor mit g gemeinsam hat und wenigstens einen Primfaktor enthält, der in g nicht vorkommt.

Jede derartige Zahl z ist gleich dem Produkte einer Zahl μ, die keine anderen Primfaktoren als g besitzt, und einer Zahl m, die zu g relativ prim ist. Eine Zahl ist durch z dann und nur dann teilbar, wenn sie sowohl durch μ wie durch m teilbar ist. Daß diese Bedingung notwendig ist, liegt auf der Hand; sie ist aber auch hinreichend; denn jede Zahl, die ein Vielfaches von μ sowohl wie von m ist, muß durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von μ und m teilbar sein. Dieses ist aber, weil μ und m relativ prim, das Produkt $\mu \cdot m = z$ (§ 11 B, S. 54). Damit ist (III) auf (I) und (II) zurückgeführt.

II. Kapitel.

Die gebrochenen Zahlen, insbesondere die gemeinen Brüche.

§ 1. Definition der gebrochenen Zahlen.

Zu dem Begriffe der Anzahl sind wir Kap. I, § 1 gelangt, indem wir von einer Menge irgend welcher Dinge ausgingen, von der besonderen Natur dieser Dinge vollständig absahen, nur ihr Unterschiedensein voneinander im Auge behielten, jeden der durch diese Abstraktion erhaltenen und natürlich vollkommen gleichwertigen Begriffe als „Eins" bezeichneten und in unserem Bewußtsein alle diese Einsen kollektivisch zu einem Ganzen vereinigten. Der Anwendung fähig ist der so gewonnene Zahlbegriff deshalb, weil wir es häufig mit Mengen zu tun haben, deren Individuen wir trotz mancher Verschiedenheiten für die gerade im Mittelpunkte unseres Interesses stehenden Zwecke als gleich annehmen dürfen[1]), und die wir deshalb durch Angabe der in der soeben beschriebenen Weise zu findenden Anzahl und des gewöhnlich durch einen Gattungsnamen gekennzeichneten Komplexes der übereinstimmenden, nur in Betracht kommenden Eigenschaften vollständig zu charakterisieren imstande sind.

Häufig haben wir es aber auch mit Mengen von Dingen zu tun, die für den gerade vorliegenden Zweck nicht als gleichwertig angesehen werden dürfen, bei denen vielmehr ein Ding einer Art E genau ebensoviel Wert hat wie entweder zwei oder drei oder vier oder allgemein n Dinge einer Art N. Kommen in der Menge g Dinge der ersten Art E und z Dinge der zweiten Art N vor, so hat es für unseren jetzigen Zweck keinen Sinn, die Anzahl der ganzen Menge einfach durch $g + z$ zu bezeichnen. Haben wir beispielsweise einen Haufen verschiedener Münzen vor uns, so dürfen wir sie in mancher Hinsicht wohl als gleichwertig betrachten; um die Menge vollkommen zu beschreiben, können wir alsdann von den Eigenschaften der einzelnen Münzen gänzlich absehen, jede als „Eins" auffassen, die Einsen kollektivisch zu einem Ganzen, der betreffenden Anzahl, vereinigen und

1) Die Entscheidung der Frage, ob dies zulässig ist, gehört nicht in die Arithmetik, sondern in dasjenige Gebiet (etwa die Physik oder die kaufmännische Praxis), auf welches wir die Regeln der Arithmetik eben anwenden wollen.

darnach zu dieser Anzahl das Wort „Münze" hinzusetzen. Wollen wir aber die Münzen zu einem Einkauf verwenden, so geht es nicht an, sie alle als gleichwertig anzusehen. Ein Markstück hat dann genau so viel Wert wie hundert Pfennigstücke[1]) usw., und wir können die Anzahl jetzt nicht mehr in der vorher beschriebenen Weise bestimmen und angeben.

Um auch in solchen Fällen die Menge durch eine Zahl und einen Gattungsnamen kennzeichnen zu können, abstrahieren wir wieder von den besonderen Eigenschaften der einzelnen Dinge, bleiben uns aber jetzt außer des Unterschiedenseins der einzelnen Dinge auch noch ihrer Wertrelation bewußt. Wenn eine Menge Dinge von zweierlei Art enthält, so daß ein Ding der ersten Art E als gleichwertig mit n Dingen der zweiten Art N angesehen werden kann, und wenn ein Ding der ersten Art durch die Abstraktion von allen besonderen Eigenschaften zu einer „Eins" wird, so bezeichnen wir das, was aus einem Dinge der zweiten Art wird, falls wir nur seine Wertrelation zu einem Dinge der ersten Art in unserem Bewußtsein festhalten, während wir von allen übrigen Eigenschaften absehen, mit $\frac{1}{n}$ und die kollektive Zusammenfassung von zwei, drei und allgemein z der durch die angegebene Abstraktion erhaltenen Begriffe mit $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots \frac{z}{n}$. Die durch diese Definition vollkommen bestimmten Begriffe $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}, \cdots \frac{z}{n}$ bezeichnen wir von nun an auch als Zahlen. Um sie von den bisher ausschließlich behandelten 1, 2, 3, ... zu unterscheiden, nennen wir letztere „ganze Zahlen" und die neu eingeführten „gebrochene Zahlen" oder „Brüche". In $\frac{z}{n}$ heißt z der „Zähler", n der „Nenner" des Bruches. Auch die kollektive Zusammenfassung einer ganzen Zahl g und eines Bruches $\frac{z}{n}$ wollen wir als Zahl bezeichnen, und zwar zur Unterscheidung von den anderen als „gemischte Zahl". Die Menge, welche g Dinge enthält, die für den in Betracht kommenden Zweck als einander gleichwertig angesehen werden dürfen, und z Dinge, die untereinander auch als gleichwertig zu betrachten sind, und von denen n sich durch ein Ding der ersten Art ersetzen lassen, kann jetzt durch die Zahl $g + \frac{z}{n}$ unter Hinzufügung des den Dingen der ersten Art zukommenden Gattungsnamens für den betreffenden Zweck vollständig ausreichend charakterisiert werden.

Um unsere Entwicklungen auf alle Mengen anwenden zu können,

1) Natürlich auch nur für diesen Zweck; die Gleichwertigkeit gilt z. B. nicht mehr in physikalischer oder chemischer Hinsicht.

deren Individuen in irgendwelcher Wertrelation zueinander stehen, erstrecken wir sie jetzt außer auf die ganzen Zahlen auf alle Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots \frac{z}{n}, \cdots$, wo n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Daß ein Ding einer Art null Dingen einer anderen Art gleichwertig sein soll, hat keinen Sinn; wir schließen deshalb für den Nenner n den Wert Null stets aus.

Ein Bruch mit dem Nenner 1 ist, wie aus der Definition sofort folgt, gleich dem Zähler, also gleich einer ganzen Zahl. Ist der Zähler z ein Vielfaches des Nenners n, etwa $z = \zeta \cdot n$, so ist nach der Definition:

$$\frac{z}{n} = \frac{\zeta \cdot n}{n} = \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{(\zeta n \text{ Summanden})}$$

$$= \overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}^{(n \text{ Summanden})} + \overbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}^{(n \text{ Summanden})} + \cdots + \overbrace{\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}^{(n \text{ Summanden})}}^{(\zeta \text{ Teilsummen})}$$

$$= \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{(\zeta \text{ Summanden})} = \zeta,$$

also auch gleich einer ganzen Zahl, und umgekehrt können wir sagen, jede ganze Zahl ζ läßt sich auf unzählig viele Arten als Bruch $\frac{\zeta \cdot n}{n}$ darstellen, wo n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Die Gesamtheit der Brüche umfaßt also auch alle ganzen Zahlen.

Die soeben bewiesene Gleichung $\frac{z}{n} = \frac{\zeta n}{n} = \zeta$ zeigt, daß, falls z ein Vielfaches von n ist, der Bruch $\frac{z}{n}$ das Resultat der Divisionsaufgabe $z : n$ darstellt. Das trifft aber auch dann noch zu, wenn z nicht mehr durch n teilbar ist. Um uns davon zu überzeugen, daß wenn z und n beliebige ganze Zahlen (n von Null verschieden) bedeuten, das Ergebnis von $z : n$ stets der Bruch $\frac{z}{n}$ ist[1]), müssen wir zeigen, daß das n fache von $\frac{z}{n}$ gleich z ist. Nach der Definition ist

$$\frac{z}{n} = \overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{(z \text{ Summanden})},$$

1) Man beachte, daß $z : n$ eine Aufgabe, also eine Forderung, $\frac{z}{n}$ dagegen eine wohl definierte Zahl bedeutet.

folglich das n fache von $\frac{z}{n}$ gleich

$$\overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(z\text{ Summanden})}+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(z\text{ Summanden})}}^{(n\text{ Teilsummen})}$$

$$=\overbrace{\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ Summanden})}+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ Summanden})}+\cdots+\overbrace{\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}^{(n\text{ Summanden})}}^{(z\text{ Teilsummen})}$$

$$=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{(z\text{ Summanden})}=z.$$

Die Aufgabe $z:n$ wird also stets durch den wohldefinierten Bruch $\frac{z}{n}$ gelöst. Die Einführung der Brüche bringt uns demnach den Vorteil, daß wir die Division einer ganzen Zahl durch eine andere ganze Zahl, die im Bereiche der ganzen Zahlen nur ausnahmsweise möglich ist, jetzt immer ausführen können.

Historisch-kritische Anmerkung.

Die Verwendung von Brüchen im Rechnen ist uralt. Schon das älteste uns bekannte mathematische Handbuch der Ägypter, das Rechenbuch des Ahmes, welches zwischen 2000 und 1700 v. Chr. entstanden ist, zeigt uns die Lehre von den Brüchen auf ziemlich hoher Stufe der Vollkommenheit. Der Verfasser operiert im wesentlichen nur mit Stammbrüchen, d. h. mit Brüchen, deren Zähler 1 ist; alle anderen Brüche werden auf diese zurückgeführt (vgl. M. Cantor, Vorlesungen I, S. 22 ff.). Von den Ägyptern gelangte das Stammbruchrechnen zu den Griechen, von diesen zu den Arabern und von letzteren endlich zu den christlichen Mathematikern des Mittelalters. Da bei dem Rechnen mit Stammbrüchen der Zähler immer 1 ist, braucht er nicht besonders angegeben zu werden, und tatsächlich schrieben die Ägypter einen Bruch, indem sie einfach über den Nenner ein Pünktchen setzten. Die Inder bezeichneten dagegen die Brüche nahezu wie wir; sie setzten den Zähler über den Nenner, nur der Bruchstrich fehlte. Ein solcher ist zum ersten Male nachweisbar im Liber abaci (1202) des Leonardo von Pisa, wurde aber möglicherweise vorher schon von den Arabern verwendet. Allgemein üblich ist der Bruchstrich erst seit dem Ende des 15. Jahrhunderts geworden.

In den neueren, auf exakte Darstellung Wert legenden Lehrbüchern der Arithmetik wird meistens (vgl. z. B. O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. Teil, Abschnitt III; J. Tannery, Leçons d'Arithmétique, Chapitre VI; H. Weber, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Bd. I, 3. Abschnitt) der Bruch $\frac{z}{n}$ als eine Zusammenfassung, ein System der beiden ganzen (miteinander nicht vertauschbaren) Zahlen z, n definiert. Einen bestimmten Inhalt bekommt diese Definition erst dadurch, daß über Gleichheit und Ungleichheit solcher Systeme und über die Bedeutung der Rechenoperationen für dieselben gewisse Festsetzungen getroffen werden. Wenn sich nun auch unzweifelhaft die Theorie der Brüche in dieser Weise streng logisch aufbauen läßt, so haben wir doch diesen Weg deshalb nicht eingeschlagen, weil die auf solche Art definierten Brüche nicht ohne weiteres das sind, was man in allen Anwendungen unter Brüchen zu verstehen hat, und weil ferner die erwähnten Festsetzungen dem Lernenden willkürlich erscheinen müssen, während sie es in der Tat gar nicht sind, vielmehr mit Notwendigkeit aus der in unserem Texte gegebenen Definition der Brüche und aus den entsprechenden Definitionen für die ganzen Zahlen bezüglich für die Mengen, deren Individuen als gleichartig betrachtet werden dürfen, folgen.

Eine rein formale Auffassung des Zahlbegriffs findet sich bei Heine (Crelles Journ., Bd. 74, S. 172), Thomae (Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, § 1—11) und in bezug auf den elementaren Unterricht besonders bei Reichel (Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe, Teil I, Berlin 1886). Diese Mathematiker betrachten die Brüche (wie auch alle später noch einzuführenden Zahlen) als bloße Zeichengebilde, Figuren aus Tinte, Druckerschwärze oder Kreide, für deren Gebrauch gewisse Regeln aufgestellt werden, ähnlich wie für die Figuren des Schachspiels. Bei dieser Auffassung wird dann aber die Arithmetik selbst zu einem leeren Zeichenspiel und der Anwendung auf Geometrie, Physik usw. erst dann fähig, wenn man schließlich doch den rein formalen Standpunkt verläßt und auf die eigentliche, innere Bedeutung der Brüche usw. rekurriert. Eine ausführliche Kritik dieser formalen Theorien gibt Frege im zweiten Bande seiner „Grundgesetze der Arithmetik" (Jena 1903).

§ 2. Vergleichung der gebrochenen Zahlen.

Alle durch das Symbol $\frac{1}{n}$ bezeichneten Zahlen sind selbstverständlich einander gleich; denn mag $\frac{1}{n}$ bald durch Abstraktion aus einem

Dinge, bald durch Abstraktion aus einem andern, von dem ersten verschiedenen Dinge entstanden sein, so haben wir ja eben bei der Abstraktion von allen Verschiedenheiten außer von der Wertrelation zur Eins abgesehen, und die Wertrelation ist, solange n denselben Wert behält, immer die gleiche. Ebenso bezeichnet

$$\frac{z}{n} = \overbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{(z \text{ Summanden})}$$

stets eine einzige bestimmte Zahl. Aus unserer Definition der Brüche ergibt sich aber mit Notwendigkeit, daß auch solche Brüche einander gleich sein können, die nicht in derselben Form erscheinen. Zunächst läßt sich nämlich leicht zeigen, daß wenn n und t beliebige ganze Zahlen bedeuten, stets $\frac{t}{t \cdot n} = \frac{1}{n}$ ist.

$\frac{1}{t \cdot n}$ ist nach der Definition derjenige Bruch, dessen $(t \cdot n)$ faches gleich 1 ist; also

$$1 = \overbrace{\frac{1}{t \cdot n} + \frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}}^{(t\,n \text{ Summanden})}$$

$$= \overbrace{\left(\overbrace{\frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}}^{(t \text{ Summanden})}\right) + \cdots + \left(\overbrace{\frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}}^{(t \text{ Summanden})}\right)}^{(n \text{ Teilsummen})}.$$

Das heißt, das n fache von $\left(\overbrace{\frac{1}{t \cdot n} + \cdots + \frac{1}{t \cdot n}}^{(t)}\right) = \frac{t}{t \cdot n}$ ist gleich 1; wir haben also $\frac{t}{tn}$ als $\frac{1}{n}$ zu bezeichnen. Daraus ergibt sich sofort weiter, wenn auch z eine beliebige Zahl bedeutet,

$$\overbrace{\frac{t}{tn} + \cdots + \frac{t}{tn}}^{(z \text{ Summanden})} = \overbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}^{(z \text{ Summanden})}$$

oder

$$\frac{t \cdot z}{t \cdot n} = \frac{z}{n}.$$

Ein Bruch ist also jedem andern gleichwertig, der aus ihm entsteht, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert (den Bruch „erweitert“) oder Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert (den Bruch „hebt“ oder „kürzt“).

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so kann man den Bruch durch einen anderen, in kleineren Zahlen geschriebenen, ersetzen, indem man nämlich Zähler und Nenner durch den nach Kap. I, § 11 A zu bestimmenden größten gemeinschaftlichen Teiler dividiert.

Bedeuten jetzt z und n teilerfremde ganze Zahlen, so betrachten wir den Bruch $\frac{z}{n}$ als reduzierte Form oder Normalform aller der ihm nach dem soeben Auseinandergesetzten gleichen Brüche $\frac{2z}{2n}$, $\frac{3z}{3n}$, $\frac{4z}{4n}$ usw. Da wir jeden Bruch dieser Reihe in irgend einem Aggregate durch $\frac{z}{n}$ ersetzen dürfen, so können wir auch zwei Brüche der Reihe miteinander vertauschen.

Die Gleichung $\frac{t \cdot z}{t \cdot n} = \frac{z}{n}$ gestattet auch, irgendwie gegebene Brüche durch andere zu ersetzen, die sämtlich gleiche Nenner haben oder, wie man sagt, „gleichnamig" sind. Hat man z. B. die Brüche $\frac{z_1}{n_1}$, $\frac{z_2}{n_2}$, $\ldots$ $\frac{z_m}{n_m}$, so bestimme man nach Kap. I, § 11 B oder C das kleinste gemeinschaftliche Vielfache N der einzelnen Nenner $n_1, n_2, \ldots n_m$ (den sog. „Hauptnenner" oder „Generalnenner"), so daß $N = \nu_\mu \cdot n_\mu$ (für $\mu = 1, 2, \ldots m$), und erweitere den ersten Bruch mit ν_1, den zweiten mit ν_2 usw., den m^{ten} mit ν_m. Dann wird

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{\nu_1 \cdot z_1}{N}, \quad \frac{z_2}{n_2} = \frac{\nu_2 \cdot z_2}{N}, \quad \ldots \quad \frac{z_m}{n_m} = \frac{\nu_m \cdot z_m}{N}.$$

So können wir also eine Menge, die aus Dingen besteht, welche zu Dingen einer gewissen Art in allen möglichen Wertrelationen stehen, durch eine Menge solcher Dinge ersetzen, welche zu den Dingen der ersten Art alle dieselbe Wertrelation haben.

Bedeutet N' ein beliebiges gemeinschaftliches Vielfaches der sämtlichen Nenner, so ist nach Kap. I, § 11 B die Zahl N' ein Vielfaches von N, etwa $N' = k \cdot N$; die vorgelegten Brüche können alsdann auch in der Form

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{k \cdot \nu_1 \cdot z_1}{N'}, \quad \frac{z_2}{n_2} = \frac{k \cdot \nu_2 \cdot z_2}{N'}, \quad \ldots \quad \frac{z_m}{n_m} = \frac{k \cdot \nu_m \cdot z_m}{N'}$$

geschrieben werden.

Wollen wir zwei beliebige Brüche $\frac{z_1}{n_1}$ und $\frac{z_2}{n_2}$ miteinander vergleichen, so bestimmen wir das kleinste gemeinschaftliche Vielfache N ihrer Nenner n_1, n_2 und wandeln dann beide in Brüche mit dem Nenner N um, so daß $\frac{z_1}{n_1} = \frac{Z_1}{N}$ und $\frac{z_2}{n_2} = \frac{Z_2}{N}$ wird. Da wir es jetzt

mit Dingen von einerlei Art zu tun haben, so ist die Kap. I, § 2 gegebene Definition anzuwenden, und es folgt

$$\frac{Z_1}{N} \gtreqless \frac{Z_2}{N},$$

je nachdem ob

$$Z_1 \gtreqless Z_2.$$

Hätte man als gemeinschaftlichen Nenner irgend ein anderes gemeinschaftliches Vielfaches $N' = k \cdot N$ von n_1, n_2 gewählt, so würde man erhalten haben $\frac{z_1}{n_1} = \frac{k \cdot Z_1}{N'}$ und $\frac{z_2}{n_2} = \frac{k \cdot Z_2}{N'}$. Da, wenn $Z_1 \gtreqless Z_2$, nach Kap. I, § 5 D auch $k \cdot Z_1 \gtreqless k \cdot Z_2$ und umgekehrt, so ist die Bedingung für die Gleichheit bezüglich Ungleichheit zweier Brüche unabhängig von der Wahl des Hauptnenners.

Die Größenvergleichung zweier Brüche ist somit auf die Größenvergleichung zweier ganzen Zahlen zurückgeführt; es gelten deshalb die für Ungleichungen zwischen ganzen Zahlen Kap. I, § 3 C bewiesenen Sätze ohne weiteres auch für Ungleichungen zwischen Brüchen.

Hinzuzufügen ist noch das Folgende:

Sind z, n relativ prim, so ist, wie wir schon gesehen haben, der Bruch $\frac{z}{n}$ allen Brüchen gleich, die aus ihm entstehen, wenn man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multipliziert. Umgekehrt zeigen wir jetzt, daß, wenn $\frac{z'}{n'} = \frac{z}{n}$ und z, n relativ prim sind, notwendig z' ein Vielfaches von z und n' dasselbe Vielfache von n ist. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von n' und n sei $N = \nu n = \nu' n'$. Dann folgt aus der Gleichheit der beiden Brüche

$$\nu' z' = \nu z,$$

oder, wenn man beide Seiten der Gleichung mit $n \cdot n'$ multipliziert,

$$\nu' n' \cdot n z' = \nu n \cdot n' z,$$

also

$$n z' = n' z.$$

Da nun aber nach unserer Voraussetzung z, n relativ prim sind, so muß nach Kap. I, § 11 A, IV a, weil $n \cdot z'$ durch z teilbar ist, z' durch z teilbar, also etwa $z' = tz$ sein, folglich:

$$ntz = n'z,$$

woraus sich ergibt:

$$n' = tn.$$

Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Sind außerdem noch z', n' relativ prim, so folgt ebenso, daß auch z und n gleiche Vielfache von z' bezüglich n' sein müssen. Beides ist aber nur vereinbar, wenn $z' = z$ und $n' = n$. Zwei Brüche in der reduzierten Form können also nur dann einander gleich sein, wenn sie sowohl in den Zählern wie in den Nennern übereinstimmen, und zwei beliebige Brüche nur dann, wenn sie durch Erweitern aus derselben Normalform entstehen.

Aus den Definitionen für die Gleichheit, bezüglich die Ungleichheit zweier Brüche geht ohne weiteres hervor, daß 1. jeder Bruch, in welchem der Zähler gleich dem Nenner ist, den Wert 1, 2. jeder Bruch, in welchem der Zähler größer als der Nenner ist, einen größeren Wert als 1 und 3. jeder Bruch, in welchem der Zähler kleiner als der Nenner ist, einen kleineren Wert als 1 hat. Die Brüche der letzten Art heißen e c h t e, die anderen u n e c h t e Brüche.

Den Bruch $\frac{n_1}{z_1}$, welcher aus $\frac{z_1}{n_1}$ durch Vertauschung des Zählers mit dem Nenner entsteht, nennt man den reziproken Wert von $\frac{z_1}{n_1}$; ebenso ist $\frac{n_2}{z_2}$ der reziproke Wert von $\frac{z_2}{n_2}$. Aus den vorher für die Gleichheit, bezüglich Ungleichheit zweier Brüche gegebenen Definitionen ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß, wenn

1. $\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2}$, auch $\frac{n_1}{z_1} = \frac{n_2}{z_2}$,

2. $\frac{z_1}{n_1} > \frac{z_2}{n_2}$, notwendig $\frac{n_1}{z_1} < \frac{n_2}{z_2}$,

3. $\frac{z_1}{n_1} < \frac{z_2}{n_2}$, notwendig $\frac{n_1}{z_1} > \frac{n_2}{z_2}$.

§ 3. Addition und Subtraktion.

Die Summe zweier Brüche definieren wir, ganz ebenso wie die Summe zweier ganzen Zahlen, als die Zahl, welche der Menge zukommt, die durch Vereinigung der den gegebenen Brüchen entsprechenden Mengen entstanden ist. Darnach ist zunächst die Summe gleichnamiger Brüche:

$$\frac{Z_1}{N} + \frac{Z_2}{N} + \frac{Z_3}{N} + \cdots = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots}{N}.$$

Brüche, die verschiedene Nenner haben, können durch andere, ihnen gleichwertige so ersetzt werden, daß alle gleichnamig sind. Damit ist also auch die Summe beliebiger Brüche bestimmt. Weil

jede ganze Zahl einem Bruche mit irgend welchem Nenner und passend gewähltem Zähler gleichwertig ist, kann auch jede gemischte Zahl (Summe einer ganzen Zahl und eines Bruches) in die Form eines Bruches gebracht werden, so daß die Gesamtheit der Brüche alle ganzen und auch alle gemischten Zahlen umfaßt.

Entsprechend ist die Differenz zweier gleichnamigen Brüche $\frac{Z_1}{N} - \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 - Z_2}{N}$, und die Differenz zweier beliebigen Brüche läßt sich sofort auf die zweier gleichnamigen zurückführen. Da also Addition und Subtraktion der Brüche auf Addition bezüglich Subtraktion ganzer Zahlen hinauskommen, so gelten alle Kap. I, § 3 und § 4 für die Addition und Subtraktion ganzer Zahlen abgeleiteten Sätze auch für die gebrochenen Zahlen.

§ 4. Multiplikation und Division.

Ein Produkt, dessen Multiplikator eine ganze Zahl ist, bedeutet nach Kap. I, § 5 A eine Summe, in welcher jeder Summand gleich dem Multiplikanden und die Anzahl der Summanden gleich dem Multiplikator ist. Demnach hat man

$$\frac{z}{n} \cdot m = \overbrace{\frac{z}{n} + \frac{z}{n} + \cdots + \frac{z}{n}}^{(m \text{ Summanden})}$$

$$= \frac{\overbrace{z + z + \cdots + z}^{(m)}}{n} = \frac{z \cdot m}{n}.$$

Die frühere Definition des Produktes versagt aber, wenn der Multiplikator ein Bruch ist; ein derartiges Produkt hat also zunächst gar keinen Sinn. Wie ist man nun, und zwar schon frühzeitig, darauf gekommen, trotzdem solche Produkte beim praktischen, z. B. kaufmännischen, Rechnen zu verwenden?

Zu den einfachsten und zugleich häufigsten Aufgaben des praktischen Rechnens gehören Fragen der folgenden Art: 1 kg einer gewissen Ware kostet m Mark, wie teuer sind k kg? Oder anders ausgedrückt: im Tauschverkehr sei 1 kg der betreffenden Ware gleichwertig mit m Mark; mit wieviel Mark sind alsdann k kg gleichwertig? Wenn zunächst k und m ganze Zahlen bedeuten, so ist

$$k \text{ kg} = \overbrace{1 \text{ kg} + 1 \text{ kg} + \cdots + 1 \text{ kg}}^{(k)}.$$

Kann ein einzelnes Kilogramm durch m Mark ersetzt werden, so darf

man im allgemeinen[1]) auch für jedes Kilogramm der obigen Summe m Mark substituieren, so daß die k kg gleichwertig sind:

$$\overbrace{m \text{ Mark} + m \text{ Mark} + \cdots + m \text{ Mark}}^{(k)}$$

oder $(m \cdot k)$ Mark. Der Preis von k kg ist also eine Anzahl Mark, die als das Produkt aus dem Multiplikanden m und dem Multiplikator k gefunden wird.

Es sei jetzt k eine gebrochene Zahl $\frac{z}{n}$.

Auch $\frac{z}{n}$ kg stellen eine Summe dar; sie besteht aus z Summanden, von denen jeder einzelne eine Stoffmenge repräsentiert, deren n faches mit 1 kg gleichwertig ist, und wenn jedes einzelne kg durch m Mark ersetzt werden darf, so kann man im allgemeinen[1]) jeden der jetzigen Summanden durch einen Geldbetrag ersetzen, dessen n faches gleich m Mark ist, d. h. durch $\frac{m}{n}$ Mark, die $\frac{z}{n}$ kg also durch

$$\overbrace{\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right)}^{(z)} \text{ Mark} = \frac{m \cdot z}{n} \text{ Mark.}$$

Wollte man also den Preis von k kg, deren jedes m Mark kostet, auch dann noch, wenn k ein Bruch $\frac{z}{n}$ ist, als das Produkt $(m \cdot k)$ Mark bezeichnen, so mußte man eben den Bruch $\frac{m \cdot z}{n}$ als Wert des Produktes $m \cdot \frac{z}{n}$ auffassen. Dementsprechend definieren auch wir jetzt, daß das Produkt $m \cdot \frac{z}{n}$ den Bruch $\frac{m \cdot z}{n}$ bedeuten soll. Da, wie vorher gezeigt, $\frac{z}{n} \cdot m = \frac{z \cdot m}{n}$, und da nach Kap. I, § 5 B $m \cdot z = z \cdot m$, so gilt für das Produkt aus einer ganzen und einer gebrochenen Zahl das kommutative Gesetz[2]).

1) Nicht immer; häufig ist der Preis von k kg geringer, als das $k$fache des Preises eines Kilogramms, gelegentlich aber auch höher. Die Entscheidung dieser Frage ist nicht Sache der Arithmetik. Im Texte sehen wir von diesen Ausnahmefällen ab.

2) Von dem kommutativen Gesetze kann man auch ausgehen, um die Bedeutung des Produktes $m \cdot \frac{z}{n}$, das zunächst keinen Sinn hat, zu definieren. Wenn man von vornherein fordert, daß für das zu definierende Produkt das kommutative Gesetz gültig bleibe, muß man unter $m \cdot \frac{z}{n}$ dasselbe verstehen wie unter $\frac{z}{n} \cdot m$, d. h. den Bruch $\frac{z \cdot m}{n} = \frac{m \cdot z}{n}$. Diese Methode, Rechenoperationen,

In ähnlicher Weise gelangt man auch zur Bedeutung eines Produktes, in welchem sowohl der Multiplikand wie der Multiplikator gebrochene Zahlen sind. Bedeutet in unserer Aufgabe auch m eine gebrochene Zahl $\frac{\zeta}{\nu}$, so ist in der vorher beschriebenen Summe

$$\overbrace{\frac{1}{n}\,\mathrm{kg} + \frac{1}{n}\,\mathrm{kg} + \cdots + \frac{1}{n}\,\mathrm{kg}}^{(z \text{ Summanden})}$$

jeder Summand durch einen Geldbetrag zu ersetzen, dessen $n$faches $\frac{\zeta}{\nu}$ Mark ist, d. h. durch $\frac{\zeta}{\nu \cdot n}$ Mark $\left(\text{denn } \frac{\zeta}{\nu \cdot n} \cdot n = \frac{\zeta n}{\nu n} = \frac{\zeta}{\nu}\right)$. Die $\frac{z}{n}$ kg sind also im Tauschverkehr äquivalent mit

$$\overbrace{\left(\frac{\zeta}{\nu \cdot n} + \frac{\zeta}{\nu \cdot n} + \cdots + \frac{\zeta}{\nu \cdot n}\right)}^{(z)}\ \text{Mark},$$

d. h. mit $\frac{\zeta \cdot z}{\nu \cdot n}$ Mark. Soll also der Preis von k kg, deren jedes m Mark kostet, auch dann noch, wenn k der Bruch $\frac{z}{n}$ und m der Bruch $\frac{\zeta}{\nu}$ ist, durch das Produkt $(m \cdot k)$ Mark dargestellt werden, so müssen wir eben unter dem Produkte $\frac{\zeta}{\nu} \cdot \frac{z}{n}$ den Bruch $\frac{\zeta \cdot z}{\nu \cdot n}$ verstehen.

Wir zeigen nun zunächst, daß, wenn der Multiplikand $\frac{\zeta}{\nu}$ durch den gleichen Bruch $\frac{\zeta'}{\nu'}$ und der Multiplikator $\frac{z}{n}$ durch den gleichen Bruch $\frac{z'}{n'}$ ersetzt werden, der Wert des Produktes ungeändert bleibt. Es sei N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von ν und ν' und

---

welche für die neueingeführten Zahlen zunächst keinen Sinn haben, so zu erklären, daß die Gesetze bestehen bleiben, die für die betreffenden Operationen bei den schon vorher eingeführten Zahlen gelten, bezeichnet man als das Prinzip der Permanenz formaler Gesetze nach H. Hankel (Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, § 3), der es, wenigstens in Deutschland, zuerst klar ausgesprochen und angewendet hat. Es spielt in der modernen Mathematik eine wichtige Rolle, auch wir werden später noch von ihm Gebrauch zu machen haben. An dieser Stelle haben wir es nicht zur Definition benutzt, weil nach unserer Ansicht die Bedeutung eines Produktes, dessen Multiplikator ein Bruch ist, schon längst festgestellt war, bevor man auf das Gültigbleiben des Satzes von der Vertauschbarkeit der Faktoren Wert legte, und weil dementsprechend auch die Bedeutung eines solchen Produktes in der im obigen Texte angegebenen Art (natürlich in weniger abstrakter Ausdrucksweise) bereits dem Quintaner plausibel gemacht werden kann, dem die Wichtigkeit des kommutativen Gesetzes noch nicht zum Bewußtsein gekommen ist.

$\mathsf{N} = \tau\nu = \tau'\nu'$, ebenso N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von n und n' und $N = tn = t'n'$.

Aus

$$\frac{\zeta}{\nu} = \frac{\zeta'}{\nu'} \quad \text{folgt} \quad \tau\cdot\zeta = \tau'\cdot\zeta',$$

aus

$$\frac{z}{n} = \frac{z'}{n'} \qquad\qquad t\cdot z = t'\cdot z'.$$

Dann ist

$$\frac{\zeta}{\nu}\cdot\frac{z}{n} = \frac{\zeta\cdot z}{\nu\cdot n} = \frac{\tau\cdot\zeta\cdot t\cdot z}{\mathsf{N}\cdot N}$$

und

$$\frac{\zeta'}{\nu'}\cdot\frac{z'}{n'} = \frac{\zeta'\cdot z'}{\nu'\cdot n'} = \frac{\tau'\cdot\zeta'\cdot t'\cdot z'}{\mathsf{N}\cdot N}.$$

Da die beiden rechten Seiten einander gleich sind, ergibt sich

$$\frac{\zeta}{\nu}\cdot\frac{z}{n} = \frac{\zeta'}{\nu'}\cdot\frac{z'}{n'}.$$

Daß für das Produkt zweier Brüche das kommutative Gesetz gilt, folgt unmittelbar aus der Gültigkeit dieses Gesetzes für ein Produkt zweier ganzen Zahlen.

Ebenso ergibt sich leicht das assoziative Gesetz für ein Produkt aus drei Brüchen. Um die Gültigkeit des distributiven Gesetzes nachzuweisen, bringen wir die beliebig gegebenen Brüche $\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2}, \ldots \frac{z_m}{n_m}$ auf den Hauptnenner $N = t_\mu \cdot n_\mu (\mu = 1, 2, \ldots m)$.

Dann haben wir

$$\left(\frac{z_1}{n_1} + \frac{z_2}{n_2} + \cdots + \frac{z_m}{n_m}\right)\cdot\frac{\zeta}{\nu} = \frac{t_1 z_1 + t_2 z_2 + \cdots + t_m z_m}{N}\cdot\frac{\zeta}{\nu}$$
$$= \frac{t_1 z_1 \zeta + t_2 z_2 \zeta + \cdots + t_m z_m \zeta}{N\cdot\nu}$$
$$= \frac{t_1 z_1\cdot\zeta}{N\cdot\nu} + \frac{t_2 z_2\cdot\zeta}{N\cdot\nu} + \cdots + \frac{t_m z_m\cdot\zeta}{N\cdot\nu}$$
$$= \frac{z_1}{n_1}\cdot\frac{\zeta}{\nu} + \frac{z_2}{n_2}\cdot\frac{\zeta}{\nu} + \cdots + \frac{z_m}{n_m}\cdot\frac{\zeta}{\nu}.$$

Da aus dem kommutativen, dem assoziativen und dem distributiven Gesetze sich alle in Kap. I, § 5, B, C, D angeführten Formeln[1])

1) Auch die über Ungleichungen. Nur der Kap. I, § 5 D nicht ausdrücklich ausgesprochene Satz, daß ein Produkt zweier ganzen Zahlen niemals kleiner ist als einer der Faktoren, ist für ein Produkt zweier Brüche nicht immer gültig. Will man das Produkt zweier Brüche $\frac{z}{n}\cdot\frac{\zeta}{\nu}$ mit dem ersten Faktor vergleichen,

leicht ergeben, dürfen wir diese jetzt auch für ein Produkt, dessen Faktoren Brüche sind, als gültig betrachten und deshalb mit einem solchen Produkte (obwohl es nicht mehr die gleiche Bedeutung hat) ebenso rechnen, wie mit einem Produkte aus ganzen Zahlen.

Entsprechend der in Kap. I, § 6 A für den Quotienten zweier ganzen Zahlen gegebenen Definition verstehen wir unter dem Quotienten zweier Brüche $\frac{z}{n} : \frac{\zeta}{\nu}$ diejenige Zahl, welche mit dem Divisor $\frac{\zeta}{\nu}$ multipliziert den Dividenden $\frac{z}{n}$ ergibt. Daß es nicht mehr als eine solche Zahl geben kann, folgt ebenso wie für die ganzen Zahlen aus dem Satze, daß, wenn in einem Produkte der eine Faktor größer bezüglich kleiner wird, der Wert des Produktes sich in demselben Sinne ändert. Während aber im Gebiete der ganzen Zahlen häufig (sogar in den meisten Fällen) gar keine die Forderung erfüllende Zahl existierte, gibt es im Gebiete der gebrochenen Zahlen immer eine solche, wenn wir nur den Fall ausschließen, daß der Divisor den Wert Null hat. Es ist nämlich stets

$$\frac{z}{n} : \frac{\zeta}{\nu} = \frac{z \cdot \nu}{n \cdot \zeta}; \quad \text{denn} \quad \frac{z \cdot \nu}{n \cdot \zeta} \cdot \frac{\zeta}{\nu} = \frac{z \cdot \nu \cdot \zeta}{n \cdot \zeta \cdot \nu} = \frac{z}{n}.$$

Ein Bruch wird also durch einen anderen dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem reziproken Wert des zweiten multipliziert.

Da, wenn zwei Brüche gleich sind, es auch ihre reziproken Werte sind, und da bei der Multiplikation gleiche Brüche einander vertreten können, so gilt das letztere auch für die Division. Aus den (S. 24, Anm. 2) angegebenen Gründen können wir ohne weiteres schließen, daß die Formeln Kap. I, § 6 B auch dann noch gelten, wenn die in ihnen vorkommenden Zahlen Brüche sind. Die am Schlusse des Kap. I, § 6 B ausgesprochene Beschränkung (daß der Dividend ein Vielfaches des Divisors sein muß) fällt im Gebiete der gebrochenen Zahlen fort.

---

so ersetze man diesen durch $\frac{z \cdot \nu}{n \cdot \nu}$, und man erkennt, daß $\frac{z}{n} \cdot \frac{\zeta}{\nu} \gtreqless \frac{z}{n}$, je nachdem $z \cdot \zeta \gtreqless z \cdot \nu$ oder $\zeta \gtreqless \nu$, d. h. der erwähnte, für das Produkt zweier ganzen Zahlen bestehende Satz gilt nur für die Multiplikation mit einem unechten Bruche, während durch Multiplikation mit einem echten Bruche der erste Faktor verkleinert wird. Diese Abweichung hat tatsächlich lange Zeit hindurch (während des Mittelalters und bis tief in die neuere Zeit hinein) den Arithmetikern Schwierigkeiten bereitet, wie die in den Rechenbüchern der Beseitigung dieses scheinbaren Widerspruchs gewidmeten Auseinandersetzungen zeigen. Vgl. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik Bd. I, S. 84.

§ 5.* Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren.

A. Potenzen, deren Basen Brüche und deren Exponenten ganze Zahlen sind.

Nachdem wir das Produkt zweier Brüche definiert haben, ist auch der Begriff einer Potenz, deren Basis ein Bruch und deren Exponent eine ganze Zahl ist, festgelegt. Aus der Kap. I, § 7 A aufgestellten Definition der Potenz ergibt sich nämlich:

(I) $$\left(\frac{z}{n}\right)^e = \overbrace{\frac{z}{n} \cdot \frac{z}{n} \cdots \frac{z}{n}}^{(e \text{ Faktoren})} = \frac{z^e}{n^e}.$$

Unter Benutzung dieser Gleichung läßt sich leicht zeigen, daß die Formeln (I)—(V) in Kap. I, § 7 B auch dann gültig bleiben, wenn die Basen der Potenzen Brüche sind.

Aus (I) und der Definition für die Ungleichheit zweier Brüche ergibt sich auch Satz I in Kap. I, § 7 C. Jede Potenz eines echten Bruches ist wieder ein echter Bruch, jede Potenz eines unechten Bruches wieder ein unechter Bruch, weil (vgl. Anm. 1 auf S. 84) durch Multiplikation mit einem echten Bruche jede Zahl verkleinert, durch Multiplikation mit einem unechten Bruche jede Zahl vergrößert wird (bezüglich ungeändert bleibt, wenn der unechte Bruch gleich 1 ist). Daraus läßt sich weiter schließen, daß der Satz II in Kap. I, § 7 B („Wenn $e > f$, so ist auch $a^e > a^f$“) für eine gebrochene Basis a nur dann gültig ist, wenn der Zähler größer ist als der Nenner, während aus $e > f$ gerade umgekehrt $a^e < a^f$ folgt, falls die Basis a ein echter Bruch ist.

Wenn k irgend eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, so ergibt sich ebenso wie Kap. I, § 7 C III für jeden ganzzahligen Wert von e

$$(1 + k)^e > 1 + ke.$$

Da, falls g eine beliebig große Zahl bedeutet, e immer so gewählt werden kann, daß

$$ke > g$$

(man braucht für e nur irgend eine ganze Zahl zu setzen, die größer ist als $\frac{g}{k}$), so folgt weiter, daß man durch passende Wahl von e stets erreichen kann, daß die e^{te} Potenz irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl, die größer ist als 1, größer wird als eine beliebig vorgelegte Zahl g. Hat man einen Wert von e bestimmt, für welchen $(1 + k)^e > g$, so gilt die Ungleichung um so mehr für jeden Exponenten, welcher größer ist als dieser Wert von e.

Bedeutet $\frac{z}{n}$ einen echten Bruch, so ist $\frac{n}{z} > 1$ (vgl. § 2, S. 80). Wir können also, wenn g eine beliebig große Zahl ist, e stets so wählen, daß $\left(\frac{n}{z}\right)^e > g$, also $\left(\frac{z}{n}\right)^e < \frac{1}{g}$ (vgl. § 2, S. 80). Da nun aber nach Annahme einer beliebig kleinen Zahl δ stets g so bestimmt werden kann, daß $g > \frac{1}{\delta}$, also $\frac{1}{g} < \delta$, so können wir immer eine Zahl ε derart ermitteln, daß, wenn $e \geqq \varepsilon$, $\left(\frac{z}{n}\right)^e < \delta$ wird.

B. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Es erhebt sich jetzt die Frage, ob wir in einer Potenz auch für den Exponenten eine gebrochene Zahl setzen dürfen. Offenbar ist alsdann die Kap. I, § 7 A gegebene Definition der Potenz nicht mehr anwendbar; ein Produkt, das aus einer gebrochenen Anzahl von Faktoren bestehen soll, hat keinen Sinn, und das praktische Rechnen führt auch tatsächlich nicht unmittelbar auf derartige Rechnungsformen. Wohl aber hat das allmählich entwickelte theoretische Bedürfnis nach Vollständigkeit in dem Aufbau der Arithmetik die Mathematiker dazu veranlaßt, in die ursprünglich nur für ganze Zahlen definierten Rechnungsausdrücke statt der ganzen auch alle anderen, neu eingeführten Zahlen einzusetzen und nach der Bedeutung zu fragen, welche diesen Ausdrücken alsdann beizulegen ist. — Nun zeigt sich bei genauerer Betrachtung, daß die für das Rechnen mit Wurzeln Kap. I, § 8 B aufgestellten Relationen große Ähnlichkeit mit den Potenzformeln Kap. I, § 7 B haben, ja daß die ersteren in den letzteren einbegriffen sind, falls wir die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten auffassen.

In der Tat, das zunächst bedeutungslose Zeichen $a^{\frac{1}{n}}$ als Potenz zu betrachten, hat nur dann einen vernünftigen Sinn und praktischen Zweck, wenn man mit ihm ebenso rechnen kann, wie mit den Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, und das wird dann und nur dann der Fall sein, wenn man ihm eine solche Bedeutung gibt, daß die Formeln Kap. I, § 7 B gültig bleiben. Es müßte also unter anderem sein:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a\,;$$

d. h. $a^{\frac{1}{n}}$ müßte diejenige Zahl bedeuten (falls es überhaupt eine solche in unserem Zahlenbereiche gibt), deren n^{te} Potenz gleich a ist. Diese Zahl haben wir aber Kap. I, § 8 A mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet. Demnach definieren wir jetzt, $a^{\frac{1}{n}}$ soll die n^{te} Wurzel aus a und $a^{\frac{z}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^z = \sqrt[n]{a^z}$

sein[1]), und wir haben zunächst die Aufgabe, zu beweisen, daß bei dieser Definition auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten wirklich sämtliche Formeln in Kap. I, § 7 B gelten.

$$\text{(I)} \qquad a^{\frac{z}{n}} \cdot a^{\frac{\zeta}{\nu}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[\nu]{a^\zeta} = \sqrt[n\cdot\nu]{a^{z\cdot\nu}} \cdot \sqrt[n\cdot\nu]{a^{\zeta\cdot n}} \quad \text{(nach Kap. I, § 8 B, IV)}$$

$$= \sqrt[n\cdot\nu]{a^{z\nu+\zeta n}} \quad \text{(Kap. I, § 8 B, I)}$$

$$= a^{\frac{z\cdot\nu+\zeta\cdot n}{n\cdot\nu}}$$

$$= a^{\frac{z}{n}+\frac{\zeta}{\nu}}.$$

---

1) Wir gelangen zur selben Definition der Potenz mit gebrochenem Exponenten, wenn wir von der Tatsache ausgehen, daß die aufeinanderfolgenden Potenzen einer Zahl a

$$a^1,\ a^2,\ a^3, \ldots a^m$$

eine geometrische Reihe bilden, während die Exponenten

$$1,\ 2,\ 3, \ldots m$$

Glieder einer arithmetischen Reihe sind. Zwischen je zwei Glieder der letzteren kann man leicht $(n-1)$ Zahlen so einschalten, daß die Reihe eine arithmetische bleibt:

$$1,\ 1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{2}{n}, \ldots 1+\frac{n-1}{n},\ 2,\ 2+\frac{1}{n},\ 2+\frac{2}{n}, \ldots 2+\frac{n-1}{n},\ 3, \ldots$$

Will man auch zwischen die Glieder a^1, a^2 der geometrischen Reihe $n-1$ andere $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ so einfügen, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgenden stets einen und denselben Wert, q, hat, so muß sein:

$$\frac{x_1}{a} = q,\ \frac{x_2}{x_1} = q, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = q,\ \frac{a^2}{x_{n-1}} = q.$$

Durch Multiplikation der n Gleichungen ergibt sich:

$$a = q^n,$$

also:

$$q = \sqrt[n]{a}.$$

Die durch Interpolation entstandene geometrische Reihe heißt demnach:

$$a,\ a\sqrt[n]{a},\ a\left(\sqrt[n]{a}\right)^2, \ldots a\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1},\ a^2, \ldots$$

oder

$$a,\ \sqrt[n]{a^{n+1}},\ \sqrt[n]{a^{n+2}}, \ldots \sqrt[n]{a^{2n-1}},\ a^2, \ldots.$$

Sollen auch jetzt die geometrische und die arithmetische Reihe einander in dem Sinne entsprechen, daß irgend ein Glied der geometrischen Reihe als Potenz von a angesehen werden kann, deren Exponent das zugehörige Glied der arithmetischen Reihe ist, so müssen wir unter $a^{\frac{n+1}{n}}$ den Wert $\sqrt[n]{a^{n+1}}$, unter $a^{\frac{n+2}{n}}$ den Wert $\sqrt[n]{a^{n+2}}$ usw. verstehen.

Ebenso folgt:

(II) $$a^{\frac{z}{n}} : a^{\frac{\zeta}{\nu}} = a^{\frac{z}{n} - \frac{\zeta}{\nu}}.$$

(III) $$a^{\frac{z}{n}} \cdot b^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z} \cdot \sqrt[n]{b^z} = \sqrt[n]{(ab)^z} = (ab)^{\frac{z}{n}}.$$

Ebenso:

(IV) $$a^{\frac{z}{n}} : b^{\frac{z}{n}} = (a : b)^{\frac{z}{n}}.$$

(V) $$\left(a^{\frac{z}{n}}\right)^{\frac{\zeta}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(a^{\frac{z}{n}}\right)^{\zeta}} = \sqrt[\nu]{(\sqrt[n]{a^z})^{\zeta}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[n]{a^{z\zeta}}}$$ (Kap. I, § 8 B, III)

$$= \sqrt[n \cdot \nu]{a^{z \cdot \zeta}}$$ (Kap. I, § 8 B, V)

$$= a^{\frac{z \cdot \zeta}{n \cdot \nu}} = a^{\frac{z}{n} \cdot \frac{\zeta}{\nu}}.$$

Die Sätze (vgl. Kap. I, § 7 C, I u. II), daß, wenn

$$a > a', \quad \text{auch} \quad a^{\frac{z}{n}} > a'^{\frac{z}{n}},$$

daß, wenn

$$\frac{z}{n} > \frac{\zeta}{\nu}, \quad \text{auch} \quad a^{\frac{z}{n}} > a^{\frac{\zeta}{\nu}}, \quad \text{falls } a > 1,$$

dagegen

$$a^{\frac{z}{n}} < a^{\frac{\zeta}{\nu}}, \quad \text{falls } a < 1,$$

sind mit Hilfe der entsprechenden Ungleichungen für ganze Exponenten und der Definition von $a^{\frac{z}{n}}$ leicht zu beweisen.

Wenn

$$a > 1,$$

so ist auch

$$a^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Es sei

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_n;$$

dann wird

$$a = (1 + \delta_n)^n;$$

demnach:

$$a > 1 + n \cdot \delta_n.$$

Daraus folgt:

$$\delta_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Wählen wir für n hinreichend große Werte, so können wir also erreichen, daß die Differenz $a^{\frac{1}{n}} - 1$ beliebig klein wird.

Ist $a < 1$, so wird

$$\frac{1}{a} > 1, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \delta_n',$$

wo δ_n' durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann, und folglich

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\delta_n'} = 1 - \frac{\delta_n'}{1+\delta_n'}.$$

$a^{\frac{1}{n}}$ bleibt in diesem Falle also stets kleiner als 1, die Differenz $1 - a^{\frac{1}{n}}$ wird aber für hinreichend große Werte von n beliebig klein.

Daß auch im Exponenten einer Potenz gleiche Brüche einander vertreten können, folgt aus der Formel Kap. I, § 8 B, IV. Ist nämlich

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2}$$

und

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_1 \nu_1}{N}, \quad \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_2 \nu_2}{N},$$

wo $N = \nu_1 n_1 = \nu_2 n_2$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von n_1, n_2 bedeutet, so haben wir:

$$a^{\frac{z_1}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^{z_1}} = \sqrt[N]{a^{z_1 \nu_1}},$$

$$a^{\frac{z_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{a^{z_2}} = \sqrt[N]{a^{z_2 \nu_2}},$$

und aus $z_1 \nu_1 = z_2 \nu_2$ ergibt sich:

$$a^{\frac{z_1}{n_1}} = a^{\frac{z_2}{n_2}}.$$

In all diesen Formeln dürfen die Basen jetzt auch gebrochene Zahlen sein, allerdings immer mit der Einschränkung, daß die auftretenden Wurzeln in unserem Zahlenbereiche ausziehbar sind[1]).

1) Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind bereits von dem französischen Mathematiker (und Bischof) Oresme (um die Mitte des 14. Jahrhunderts) in seinem Algorismus proportionum (vgl. Cantor II, S. 128—137) eingeführt worden. Seine Bezeichnungs- und Schreibweise ist naturgemäß etwas anders als unsere moderne; dem Wesen nach aber stimmt seine Definition mit der unsrigen durchaus überein; auch gibt er bereits die meisten Regeln über die Multiplikation und das Potenzieren solcher Potenzen. Es vergingen aber mehr als 300 Jahre, nämlich bis etwa zum Erscheinen von Newtons Philosophiae naturalis principia (1687), ehe die gebrochenen Exponenten volles Bürgerrecht

C. Wurzeln.

Wurzeln mit ganzzahligen Wurzelexponenten können, wie unter B gezeigt, als Potenzen aufgefaßt und als solche beim Rechnen behandelt werden. Dasselbe gilt auch von Wurzeln mit gebrochenen Wurzelexponenten. Unter $\sqrt[\frac{z}{n}]{a}$ haben wir nämlich eine solche Zahl x zu verstehen, deren $\left(\frac{z}{n}\right)^{\text{te}}$ Potenz gleich a ist. Aus $x^{\frac{z}{n}} = a$ folgt aber

$$x = \sqrt[\frac{z}{n}]{a} = a^{\frac{n}{z}}.$$

Wir brauchen also auf das Rechnen mit Wurzeln nicht ausführlich einzugehen und heben der späteren Anwendung wegen nur einige Punkte besonders hervor.

I. In B, IV, S. 89 ist die Formel enthalten:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Man kann also aus einem Bruche die n^{te} Wurzel ziehen, indem

---

in der Arithmetik erlangten. Mathematische Schriftsteller wie der Holländer Stevin (L'Arithmétique 1585) und der Engländer Wallis (Arithmetica Infinitorum 1655) kannten zwar den Begriff der Potenz mit gebrochenem Exponenten, machten aber keinen Gebrauch von ihm. Der Grund ist wohl darin zu suchen, daß das Schreiben einer Wurzel als Potenz mit Bruchexponenten zunächst wenig praktischen Vorteil bot. Multiplikation und Division von Wurzeln mit ungleichen Wurzelexponenten, wobei das der Fall gewesen wäre, kamen eben in den behandelten Aufgaben nicht gerade häufig vor. Warum man zur Einführung der Logarithmen Potenzen mit gebrochenen Exponenten im 17. Jahrhundert nicht nötig hatte, werden wir Kap. V, § 5 A sehen. Erst nach der Erfindung der Infinitesimalrechnung, als sich zeigte, daß der Differentialquotient und das Integral einer beliebigen Wurzel aus irgend einer Potenz der Veränderlichen besonders leicht, nämlich in derselben Weise wie für die Potenzen mit ganzen Exponenten, zu bilden waren, wenn man die Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten schrieb, sprang der Vorteil der Einführung gebrochener Exponenten deutlich in die Augen. Namentlich aber führte die von Newton gewonnene Erkenntnis (vgl. den Brief Newtons an Oldenburg vom 24. Oktober 1676, Cantor III, S. 69—71), daß, wenn man in die unter Voraussetzung eines ganzzahligen e hergeleitete Entwicklung von $(1 + x)^e$ für e den Bruch $\frac{1}{n}$ einsetzt, man eine Reihe erhält, deren n^{te} Potenz gleich $1 + x$ ist, die also $\sqrt[n]{1 + x}$ darstellt, zur allgemeinen Anerkennung der Auffassung einer solchen Wurzel als der $\left(\frac{1}{n}\right)^{\text{t.n}}$ Potenz von $(1 + x)$. — In der angewandten Mathematik finden neuerdings der übersichtlichen Schreibweise wegen die Potenzen mit gebrochenen Exponenten vielfache Anwendung zur Angabe der Dimensionen im absoluten Maßsystem.

man sowohl aus dem Zähler wie aus dem Nenner die n^{te} Wurzel zieht und das erste Ergebnis durch das zweite dividiert. Wenn b nicht schon die n^{te} Potenz einer ganzen Zahl ist, so läßt sich doch stets eine ganze Zahl b' so finden, daß $b \cdot b'$ gleich der n^{ten} Potenz einer ganzen Zahl β wird.

Alsdann ist

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab'}{\beta^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab'}}{\beta}.$$

Die Aufsuchung der n^{ten} Wurzel eines Bruches läßt sich also stets auf die Berechnung der n^{ten} Wurzel aus einer ganzen Zahl und auf eine Division durch eine ganze Zahl zurückführen.

II. Wenn n und C beliebige ganze Zahlen bedeuten, so gibt es, wie schon Kap. I, § 8 A gesagt, im allgemeinen keine ganze Zahl, die gleich $\sqrt[n]{C}$ ist. Wir können uns jetzt leicht davon überzeugen, daß, wenn keine ganze Zahl existiert, deren n^{te} Potenz gleich C ist, es auch keinen Bruch von dieser Eigenschaft geben kann. Hätte man nämlich einen solchen, so könnte man ihn zunächst durch Heben mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler von Zähler und Nenner auf die Normalform $\frac{p}{q}$ bringen, in welcher p und q relativ prim sind und q von 1 verschieden ist.

Nach Kap. I, § 11 A, IVb müßten dann aber auch p^n und q^n teilerfremd sein, während aus

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n} = C$$

folgen würde, daß p^n und q^n den gemeinschaftlichen, von 1 verschiedenen Teiler q^n besitzen. Die Annahme hat demnach auf einen Widerspruch geführt. Durch die Einführung der Brüche ist also die Möglichkeit des Wurzelausziehens nicht erweitert worden.

III. Wir fügen noch einige Bemerkungen über die am häufigsten vorkommende Wurzel, nämlich die Quadratwurzel hinzu. Wenn es auch im allgemeinen keine ganze (und, wie soeben gezeigt, auch keine gebrochene) Zahl gibt, deren Quadrat gleich einer beliebig vorgelegten ganzen Zahl C ist, so haben wir doch Kap. I, § 10 G, S. 46—48 ein Verfahren kennen gelernt, um die größte ganze Zahl a zu bestimmen, deren Quadrat noch kleiner als C ist, in andern Worten, wir können mittelst des erwähnten Verfahrens stets eine ganze Zahl a so bestimmen, daß

$$a^2 \leq C < (a+1)^2.$$

Der Rest R, welcher bei der Rechnung übrigbleibt, ist gleich der Differenz $C - a^2$. Der Vergleich der ganzen Zahlen R und a ermöglicht es ohne weiteres, C zwischen die Quadrate zweier Zahlen einzuschließen, deren Differenz nur $\frac{1}{2}$ beträgt. Wenn nämlich $R \leqq a$, so ist sicher $R < a + \frac{1}{4}$, folglich

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4} > a^2 + R,$$

deshalb:

$$a^2 \leqq C < (a + \tfrac{1}{2})^2.$$

Wenn aber $R > a$, also $R \geqq a + 1$, so ist $R > a + \frac{1}{4}$, folglich

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4} < a^2 + R$$

und deshalb:

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 < C < (a + 1)^2.$$

Wir können aber sofort weiter gehen und leicht zwei Zahlen finden, die sich nur um $\frac{1}{n}$ unterscheiden (wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet), und deren Quadrate auch die Zahl C einschließen. Denken wir uns die beiden Zahlen als Brüche mit dem Nenner n geschrieben und bezeichnen ihre Zähler mit z, bezüglich $z + 1$, so müßte sein:

$$\left(\frac{z}{n}\right)^2 \leqq C < \left(\frac{z+1}{n}\right)^2.$$

Diese Ungleichungen sind dann, aber auch nur dann erfüllt, wenn

$$z^2 \leqq C \cdot n^2 < (z + 1)^2.$$

Wir brauchen also das Kap. I, § 10 G gelehrte Verfahren nur auf die ganze Zahl $C \cdot n^2$ anzuwenden und die gefundenen ganzen Zahlen z und $z + 1$ durch n zu dividieren.

Beispielsweise findet man für $C = 3$, $n = 12$ sofort $z = 20$, so daß

$$\left(\frac{20}{12}\right)^2 < 3 < \left(\frac{21}{12}\right)^2.$$

Auf den besonders wichtigen Fall, daß man für n eine Potenz der Grundzahl 10 wählt, gehen wir im nächsten Kapitel noch ausführlicher ein.

Ist C eine gemischte Zahl $G + \varepsilon$, wo G die größte in C enthaltene ganze Zahl, ε also einen echten Bruch bedeutet, so folgen aus

$$a^2 \leqq G < (a + 1)^2$$

die Ungleichungen

$$a^2 < C < (a+1)^2.$$ [1]

Die erste der beiden letzten Ungleichungen ist selbstverständlich. Um uns von der Richtigkeit der zweiten zu überzeugen, schließen wir, daß aus $G < (a+1)^2$ zunächst folgt:

$$G + 1 \leqq (a+1)^2$$

und daraus wieder:

$$C = G + \varepsilon < (a+1)^2.$$

Wenn also zwei benachbarte ganze Zahlen gefunden werden sollen, deren Quadrate eine gemischte Zahl C einschließen, so braucht man das Verfahren in Kap. I, § 10 G nur auf die in C enthaltene größte ganze Zahl G anzuwenden. Ähnlich wie vorher ergibt sich auch jetzt, daß, je nachdem der Rest

$$R = G - a^2 \gtrless a,$$

auch

$$C = G + \varepsilon \gtrless (a + \tfrac{1}{2})^2.$$

Wenn $R = a$, so ist

$$G + \varepsilon \gtreqless \left(a + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ je nachdem } \varepsilon \gtreqless \frac{1}{4}.$$

Als Ergebnis der in diesem Abschnitt III angestellten Überlegungen können wir die allgemeine Regel aussprechen:

Wenn eine beliebige, ganze, gebrochene oder gemischte, Zahl C vorgelegt ist und zwei Zahlen gesucht werden, die sich nur um $\frac{1}{n}$ unterscheiden (wo n eine beliebige Zahl bedeutet), und deren Quadrate die Zahl C einschließen, so wende man das in Kap. I, § 10 G gelehrte Verfahren auf die größte ganze Zahl G an, die in dem Produkte $C \cdot n^2$ enthalten ist, und bestimme die ganze Zahl z so, daß

$$z^2 \leqq G < (z+1)^2.$$

Alsdann sind $\frac{z}{n}$ und $\frac{z+1}{n}$ die gewünschten Zahlen; ihr Unterschied kann durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden.

1) Wie man leicht erkennt, gilt der analoge Schluß auch für jede beliebige Potenz.

Die Vergleichung zwischen z und dem Reste $R = G - z^2$ gestattet unmittelbar die Entscheidung der Frage, ob

$$C \gtreqless \left(\frac{z+\frac{1}{2}}{n}\right)^2.$$

Ist z. B. gegeben $C = 2\frac{2}{3}$, und wählt man $n = 25$, so wird

$$C \cdot n^2 = \frac{8}{3} \cdot 625 = 1666\frac{2}{3}, \quad G = 1666,$$

also $$z = 40,$$

deshalb: $$\left(\frac{40}{25}\right)^2 < 2\frac{2}{3} < \left(\frac{41}{25}\right)^2,$$

und da $R = G - z^2 = 66 > z$, ergibt sich noch

$$\left(\frac{40\frac{1}{2}}{25}\right)^2 < 2\frac{2}{3} < \left(\frac{41}{25}\right)^2.$$

Durch Vergrößerung von n kann auch die Differenz der beiden Quadrate

$$\left(\frac{z+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2 = \frac{2z+1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(2\frac{z}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

und mithin auch jede der Differenzen

$$C - \left(\frac{z}{n}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{z+1}{n}\right)^2 - C$$

kleiner als irgend eine vorgelegte noch so kleine Zahl gemacht werden. Wenn wir also auch in unserem Zahlenbereiche die Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen oder gebrochenen Zahl C im allgemeinen nicht ausziehen können, so ist es uns doch stets möglich, solche Brüche anzugeben, deren Quadrate sich von C um beliebig wenig unterscheiden. In den Anwendungen der Arithmetik, wo es kaum jemals auf absolute Genauigkeit als vielmehr darauf ankommt, daß der begangene Fehler eine gewisse, durch die Natur der Aufgabe gezogene Grenze nicht überschreitet, wird es fast immer zulässig sein, nach passender Wahl von n die Zahl C durch eine der beiden Zahlen

$$\left(\frac{z}{n}\right)^2 \quad \text{bezüglich} \quad \left(\frac{z+1}{n}\right)^2, \quad \text{je nachdem} \quad C \lesseqgtr \left(\frac{z+\frac{1}{2}}{n}\right)^2,$$

zu ersetzen und dementsprechend für die in unserem Zahlenbereiche nicht existierende $\sqrt{C}$ entweder $\frac{z}{n}$ oder $\frac{z+1}{n}$ zu substituieren.

Ähnliche Überlegungen lassen sich für Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten anstellen. Wir kommen darauf noch einmal zurück bei Besprechung der Wurzeln aus den im praktischen Rechnen fast ausschließlich verwendeten systematischen Brüchen. (Vgl. Kap. III, § 3 F.)

D. Logarithmen.

I. Nach Einführung der gebrochenen Zahlen in die Basis und den Exponenten einer Potenz steht auch der Begriff des Logarithmus eines Bruches in bezug auf eine Basis, die ein Bruch ist, fest; wir bezeichnen $\frac{p}{q}$ als den Logarithmus von $\frac{z}{n}$ in bezug auf die Basis $\frac{a}{b}$, wenn $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{z}{n}$; z. B. ${}^{\left(\frac{4}{9}\right)}\log \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, weil $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$. Da jede (ganze oder gebrochene) Potenz eines echten Bruches wieder ein echter Bruch, jede Potenz eines unechten Bruches wieder ein unechter Bruch ist, müssen die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{z}{n}$ entweder beide kleiner als 1 oder beide größer als 1 sein. Aber auch, wenn diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich im allgemeinen, d. h. bei beliebig gegebenen Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{z}{n}$, $\frac{p}{q}$ nicht so bestimmen, daß

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{z}{n}.$$

Denn bestände diese Gleichung (wobei wir voraussetzen dürfen, daß a, b und ebenso z, n relativ prim sind), so würde durch eine leichte Umformung folgen

$$a^p \cdot n^q = b^p \cdot z^q.$$

Weil z und n relativ prim sind, gilt dasselbe auch von z^q und n^q (Kap. I, § 11 A, IV b); nach Kap. I, § 11 A, IV a muß deshalb a^p durch z^q teilbar sein, und weil auch a^p und b^p teilerfremd sind, ist aus gleichem Grunde z^q durch a^p teilbar; d. h. aber $a^p = z^q$. Das Bestehen einer solchen Gleichung ist aber sicher unmöglich, wenn nicht a und z dieselben Primfaktoren besitzen (Kap. I, § 11 C).

In unserem Zahlenbereiche besitzt also ein beliebiger Numerus in bezug auf eine beliebige Basis im allgemeinen keinen Logarithmus. In welchem Sinne man aber auch im Gebiete der ganzen und gebrochenen Zahlen von Logarithmen sprechen und mit ihnen rechnen darf, werden wir Kap. V, § 5 B ausführlicher erörtern.

II. Die Gültigkeit der Logarithmenformeln Kap. I, § 8 C, I und II für den Fall, daß die Buchstaben Brüche bedeuten, folgt daraus, daß die Richtigkeit der Potenzformeln, aus denen sie abgeleitet sind, bereits für Brüche bewiesen ist (Abschnitt A und B dieses Paragraphen). Zu zeigen ist jetzt nur noch, daß auch in der Formel (Kap. I, § 8 C, III)

$${}^{(a)}\log (p^r) = r \cdot {}^{(a)}\log p$$

r ein Bruch $\frac{z}{n}$ sein darf.

Es sei
$$^{(a)}\log p = x, \quad \text{also} \quad a^x = p,$$
wo a, p, x ganze oder gebrochene Zahlen sein können.

Durch Erheben dieser Gleichung in die $\left(\frac{z}{n}\right)^{\text{te}}$ Potenz folgt:
$$a^{\frac{z}{n}\cdot x} = p^{\frac{z}{n}},$$
mithin:
$$^{(a)}\log p^{\frac{z}{n}} = \frac{z}{n}\cdot x = \frac{z}{n}\cdot {}^{(a)}\log p.$$

Einen Sinn haben natürlich alle diese Formeln zunächst nur für solche Werte der Basis und des Numerus, für welche es einen Logarithmus in unserem Zahlengebiete gibt.

III. Kapitel.

Die systematischen Brüche.

§ 1. Definition und Schreibweise der systematischen Brüche.

Ein besonderes Interesse und eine besondere Behandlung verdienen diejenigen Brüche, deren Zähler eine systematische ganze Zahl (vgl. Kap. I, § 10) und deren Nenner eine Potenz der Grundzahl des Systems ist, also die Brüche von der Form

$$\alpha = \frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu} = \frac{A}{g^\nu},$$

wo $a_\lambda < g$ für $\lambda = 0, 1, \ldots \mu$.

Solche Brüche nennt man systematische, und wenn speziell $g = 10$, Dezimalbrüche.[1])

1) Da die meisten Entwicklungen sich nahezu ebenso einfach für ein beliebiges g wie für $g = 10$ gestalten, lassen wir im allgemeinen g unbestimmt und werden nur bei Heranziehung von Beispielen den Fall $g = 10$ vornehmlich berücksichtigen. Lange Zeit hindurch hat man auch tatsächlich systematische Brüche verwendet, bei denen g nicht gleich 10 war. Die Babylonier legten dem systematischen Aufbau zunächst der ganzen Zahlen die Basis $g = 60$ zugrunde (vgl. S. 5, Anm. 1). Sie hatten besondere Wörter für 60 (soss) und für 60^2 (sar) und bildeten dann dementsprechend auch Unterabteilungen der Einheit mit diesen Nennern. Etwa um 180 v. Chr. fanden diese Sexagesimalbrüche Eingang in die griechische Wissenschaft, und die arabischen und christlichen Gelehrten bedienten sich derselben, namentlich für astronomische Rechnungen, während des ganzen Mittelalters, also in einer Zeit, wo 10 längst die Grundzahl des Systems der ganzen Zahlen geworden war. Daß eine solche Inkonsequenz unzweckmäßig sein mußte, ist klar. Nichtsdestoweniger dauerte es außerordentlich lange, bis der gänzliche Übergang von der sexagesimalen zur dezimalen Teilung vollzogen war. Noch im 15. Jahrhundert finden wir vielfach eine Vermischung beider Prinzipien, und erst gegen Ende des 16. Jahrhunderts wenden sich der Franzose François Viète in seinem Canon mathematicus (1579), der Holländer Simon Stevin in seiner Schrift La Disme (1585) und der Deutschschweizer Joost Bürgi in seiner Arithmetica (1592) entschieden und endgültig den Dezimalbrüchen zu. Die Schreibweise derselben kommt bei diesen Autoren der jetzt üblichen schon ziemlich nahe. Ausführlicheres hierüber siehe bei Cantor, Vorlesungen II, S. 583, S. 615—617 und bei J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik I, S. 86—93. Die schon von Simon Stevin als Konsequenz des dekadischen Zahlensystems geforderte dezimale Teilung der Maße, Münzen und Gewichte wurde zuerst in Frankreich (durch Dekret vom 24. Juli 1799) eingeführt. Nachdem einige andere Länder sich diesem Maßsystem schon früher angeschlossen

In neuerer Zeit, namentlich nach Einführung der dezimalen Teilung der Maße, Münzen und Gewichte, bedarf man beim praktischen Rechnen kaum noch anderer als dieser Dezimalbrüche; denn hergestellt werden eben keine anderen Münzen und Gewichte als solche, deren Zehn- oder Hundert- oder Tausendfaches der gewählten Haupteinheit gleichwertig ist, oder Vielfache derartiger Münzen und Gewichte; andere als Dezimalbrüche lassen sich also im Gebiete der Münzen und Gewichte gar nicht realisieren.

Um den systematischen Bruch α in eine andere Form zu bringen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $\mu \geqq \nu$, dann wird

$$\alpha = a_\mu g^{\mu-\nu} + a_{\mu-1} g^{\mu-\nu-1} + \cdots + a_\nu + \frac{a_{\nu-1}}{g} + \frac{a_{\nu-2}}{g^2} + \cdots + \frac{a_0}{g^\nu};$$

2. $\mu < \nu$, dann wird

$$\alpha = \frac{a_\mu}{g^{\nu-\mu}} + \frac{a_{\mu-1}}{g^{\nu-\mu+1}} + \cdots + \frac{a_0}{g^\nu}.$$

Im Falle 1. ist α die Summe aus einer ganzen, in systematischer Form geschriebenen Zahl und einer Reihe von Brüchen, deren Nenner die aufeinanderfolgenden Potenzen von g und deren Zähler kleiner als g sind; im Falle 2. besteht α nur aus der Summe solcher Brüche.

Die ganze systematische Zahl $a_\lambda g^\lambda + a_{\lambda-1} g^{\lambda-1} + \cdots + a_1 g + a_0$ konnten wir (vgl. Kap. I, § 10 A) ohne Befürchtung eines Mißverständnisses in der abgekürzten Form $\overline{a_\lambda a_{\lambda-1} \ldots a_1 a_0}$ schreiben, indem wir festsetzten, daß $a_\lambda, a_{\lambda-1}, \ldots a_1, a_0$ die Koeffizienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von g in absteigender Reihenfolge bedeuten sollen, daß jede nicht vorkommende Potenz von g durch das Zeichen 0 vertreten wird und die letzte Ziffer stets die Einer bezeichnet.

Dieser selben Methode können wir uns auch zum abgekürzten Schreiben der systematischen Brüche bedienen. Wir brauchen nur an die die Einer darstellende Ziffer die Zähler der Brüche mit den Nennern g, g^2, g^3 usw. in unveränderter Reihenfolge anzuschließen mit

hatten, folgte der Norddeutsche Bund 1866, das Deutsche Reich 1871/72. Die Geschichte des Rechnens berichtet auch von einer noch anderen Art systematischer Brüche. Die Römer hatten ein ausgesprochenes Duodezimalsystem; sie hatten besondere Bezeichnungen für Brüche mit den Nennern 12, 24, 48, 72, 144, 288. Diese Bezeichnungen bezogen sich ursprünglich nur auf die betreffenden Bruchteile des as, einer Kupfermünze von bestimmtem Gewicht, wurden nachher aber auch auf Bruchteile anderer Dinge übertragen. In der ersten Hälfte des Mittelalters bediente man sich beim praktischen Rechnen vielfach dieser Duodezimalbrüche. Vgl. Cantor, Vorlesungen I, S. 489 und Tropfke, Gesch. d. Elementarmathematik I, S. 77.

der Festsetzung, daß, wenn einer dieser Brüche nicht vorkommt, an Stelle seines Zählers eine Null gesetzt wird. Die letzte Ziffer bedeutet dann selbstverständlich nicht mehr die Einer; sie kann aber auch nicht der Zähler eines ein für allemal bestimmten Bruches, etwa von $\frac{1}{g^6}$ oder von $\frac{1}{g^{10}}$ oder dgl. sein, wenn wir uns vorbehalten, den Exponenten von g im Nenner beliebig groß werden zu lassen. Unser Ziel, sichtbar zu machen, zu welcher Potenz von g bezüglich von $\frac{1}{g}$ jedes einzelne a gehört, erreichen wir aber auch, indem wir den Koeffizienten einer bestimmten Potenz von g (die dann natürlich in jedem systematischen Bruche vorkommen muß) mit irgendeinem Kennzeichen versehen. Man hat zu diesem Zwecke die Einer-Ziffer gewählt und sie durch ein nachgesetztes Komma ausgezeichnet. Enthält der systematische Bruch keine Ganzen, beginnt er vielmehr wie im Falle 2. auf S. 99 mit $\frac{a_\mu}{g^{\nu-\mu}}$, so muß man, um das Kennzeichen anbringen zu können, die Stelle der Einer und dann natürlich auch die Zähler der folgenden nicht vorhandenen Brüche mit den Nennern $g^1, g^2, \ldots g^{\nu-\mu-1}$ durch je eine Null markieren. Im Falle 1. würde man also den systematischen Bruch α schreiben:

$$\overline{a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_\nu,\; a_{\nu-1} a_{\nu-2} \ldots a_0},$$

im Falle 2.

$$0,\overbrace{00\ldots0}^{(\nu-\mu-1)\text{ Nullen}}\; a_\mu a_{\mu-1} \ldots a_0.$$

Da

$$\alpha = \frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu} = \frac{A}{g^\nu}$$

als Ergebnis der Division der ganzen Zahl A durch g^ν betrachtet werden kann, liegt in dieser Darstellung der systematischen Brüche die Regel:

Man dividiert eine ganze Zahl durch die ν^{te} Potenz der Grundzahl g, indem man die letzten ν Stellen von A durch ein Komma abstreicht, und zwar im Falle $\nu > \mu$, nachdem man vor die erste Ziffer von A die nötige Anzahl (nämlich $\nu - \mu$) Nullen gesetzt hat.

Der systematische Bruch α ändert sich nicht, wenn man zu ihm

$$\frac{0}{g^{\nu+1}} + \frac{0}{g^{\nu+2}} + \frac{0}{g^{\nu+3}} + \cdots$$

hinzufügt. Man kann daher durch bloßes Anhängen von Nullen den systematischen Bruch mit dem Nenner g^ν in einen anderen verwandeln, dessen Nenner irgend eine höhere Potenz von g ist, und da nun der Hauptnenner mehrerer systematischen Brüche mit der Grundzahl g

offenbar die höchste in den gegebenen Nennern vorkommende Potenz von g ist, lassen sich systematische Brüche außerordentlich leicht, nämlich durch bloßes Anhängen von Nullen, gleichnamig machen. Mit gleichnamigen Brüchen darf aber wie mit ganzen Zahlen gerechnet werden; man kann eben während der Rechnung die Beziehung zur Haupteinheit außer acht lassen und die gleichnamigen Brüche als durch Abstraktion aus einander gleichwertigen Dingen entstanden auffassen. Daß die systematischen Brüche den ganzen Zahlen so nahe stehen (so daß in manchen Lehrbüchern statt Dezimalbrüche ausdrücklich Dezimalzahlen gesagt wird), ist der Hauptvorteil dieser Brüche und der Grund, weshalb das Rechnen mit ihnen so bequem ist.

§ 2. Vergleichung der systematischen Brüche.

A. Jeder systematische Bruch, welcher keine Ganzen enthält,

$$\alpha = \frac{a_\mu}{g^{\nu-\mu}} + \frac{a_{\mu-1}}{g^{\nu-(\mu-1)}} + \cdots + \frac{a_1}{g^{\nu-1}} + \frac{a_0}{g^\nu}$$
$$(\nu > \mu),$$

ist kleiner als 1, also ein echter Bruch. Denn führt man die Addition der Brüche aus, so folgt aus Kap. I, § 10 A, S. 36, daß in

$$\frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu},$$

weil $\nu > \mu$, der Zähler kleiner als der Nenner ist.

B. Zwei echte systematische Brüche α und β können wir uns in Brüche mit dem gemeinschaftlichen Nenner g^ν verwandelt denken:

$$\alpha = \frac{a_\mu g^\mu + a_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + a_1 g + a_0}{g^\nu} = \frac{A}{g^\nu},$$
$$\beta = \frac{b_\mu g^\mu + b_{\mu-1} g^{\mu-1} + \cdots + b_1 g + b_0}{g^\nu} = \frac{B}{g^\nu},$$

wo natürlich einzelne a und einzelne b Null sein dürfen.

Nach Kap. I, § 10 A sind die beiden Zähler A und B, also auch die Brüche α und β dann und nur dann einander gleich, wenn jedes a gleich dem b mit demselben Index ist. Ein Bruch läßt sich also auf nicht mehr als eine Art in systematischer Form mit der Grundzahl g darstellen[1]), wenn man von den Nullen absieht, die man jedem systematischen Bruch, ohne seinen Wert zu ändern, anhängen darf.

1) Wir sprechen vorläufig nur von systematischen Brüchen, die aus einer endlichen Zahl von Gliedern bestehen.

Nach Kap. I, § 10 A ist ferner $A \gtrless B$ und demzufolge auch $\alpha \gtrless \beta$, je nachdem das erste a (von links aus gerechnet), das sich von dem entsprechenden b unterscheidet, größer bezüglich kleiner als dieses b ist.

C. Bedeuten k und l ganze Zahlen, α und β irgend welche echten systematischen Brüche, so ist, je nachdem $k \gtrless l$, auch $k + \alpha \gtrless l + \beta$, falls aber $k = l$, $k + \alpha \substack{\geq \\ <} l + \beta$, je nachdem $\alpha \substack{\geq \\ <} \beta$.

§ 3. Die Rechenoperationen.

A. Addition.

Beliebige Brüche werden (nach Kap. II, § 3) addiert, indem man sie zuerst gleichnamig macht und sodann die Summe der Zähler bildet. Systematische Brüche in der abgekürzten Schreibweise sind also durch Anhängen von Nullen auf die gleiche Zahl von Stellen hinter dem Komma zu bringen und darnach ohne Berücksichtigung des Kommas wie ganze systematische Zahlen (vgl. Kap. I, § 10 C) zu addieren. Von der Summe hat man schließlich von rechts aus so viel Stellen durch ein Komma wieder abzustreichen, wie jeder Summand (nach dem Gleichnamigmachen) besaß. Für den praktischen Gebrauch formuliert man die Regel auch so: Schreibe die zu addierenden systematischen Brüche derartig auf, daß die Kommata und die Ziffern von gleichem Stellenwert senkrecht untereinander stehen, addiere jetzt ebenso, wie es bei ganzen Zahlen geschieht, und setze auch im Resultate das Komma unter die Kommata der Summanden.

B. Die **Subtraktion** wird analog wie die Addition ausgeführt.

C. Das **Produkt** der beiden systematischen Brüche

$$\alpha = \frac{A}{g^{\nu_1}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B}{g^{\nu_2}},$$

wo A und B ganze systematische Zahlen bedeuten, ist

$$\alpha \cdot \beta = \frac{A \cdot B}{g^{\nu_1 + \nu_2}}.$$

Man multipliziert also zwei systematische Brüche in abgekürzter Schreibweise, indem man zuerst die Kommata fortläßt, die entstehenden ganzen Zahlen nach Kap. I, § 10 E miteinander multipliziert und vom erhaltenen Produkte so viel Stellen (nämlich $\nu_1 + \nu_2$) von rechts aus durch ein Komma abstreicht, wie die beiden Faktoren zusammen Stellen hinter dem Komma hatten.

Natürlich ist hierin auch der Fall einbegriffen, daß einer der beiden Faktoren, z. B. β, eine ganze Zahl ist. Man hat dann nur ν_2 den Wert Null zu geben und vom Produkte ν_1 Stellen abzustreichen.

Ist insbesondere $\beta = g^{\mu}$, so wird $\alpha \cdot \beta = \frac{A \cdot g^{\mu}}{g^{\nu_1}}$, also

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \frac{A}{g^{\nu_1 - \mu}}, && \text{falls} \quad \mu < \nu_1, \\ &= A, && \text{falls} \quad \mu = \nu_1, \\ &= A \cdot g^{\mu - \nu_1}, && \text{falls} \quad \mu > \nu_1. \end{aligned}$$

Die drei Fälle kann man in die eine Regel zusammenfassen: Man multipliziert einen systematischen Bruch mit der μ^{ten} Potenz der Grundzahl, indem man das Komma μ Stellen nach rechts rückt und, wenn weniger als μ Bruchstellen vorhanden sind, das Komma fortläßt und noch so viele Nullen anhängt, wie die Differenz zwischen μ und der Stellenzahl beträgt.

D. Division.

Der Quotient der beiden systematischen Brüche $\alpha = \frac{A}{g^{\nu_1}}$ und $\beta = \frac{B}{g^{\nu_2}}$ ist $\alpha : \beta = \frac{A \cdot g^{\nu_2}}{B \cdot g^{\nu_1}}$.

Nachdem man Zähler und Nenner mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler gehoben hat, nehme der letzte Bruch die Form $\frac{z}{n}$ an, wo also z und n ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler bedeuten. Die Division eines systematischen Bruches durch einen anderen ist damit auf die Division einer ganzen Zahl durch eine andere zurückgeführt. Falls sich nicht gerade $A \cdot g^{\nu_2}$ durch $B \cdot g^{\nu_1}$ teilen läßt, ist der Quotient $\alpha : \beta = \frac{z}{n}$ keine ganze Zahl; es entsteht die Frage, ob man ihn vielleicht in die Form eines systematischen Bruches bringen kann. Wenn

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_{\varrho-1}}{g^{\varrho-1}} + \frac{q_\varrho}{g^\varrho},$$

wo q_0 eine beliebige ganze Zahl (Null eingeschlossen) ist, $q_1, q_2, \ldots q_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten, die kleiner als g sind, und ϱ einen bestimmten ganzzahligen Wert hat, so folgt durch Multiplikation mit g^ϱ:

$$\frac{z g^\varrho}{n} = q_0 \cdot g^\varrho + q_1 \cdot g^{\varrho-1} + q_2 \cdot g^{\varrho-2} + \cdots + q_{\varrho-1} \cdot g + q_\varrho.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung eine ganze Zahl darstellt, muß $z g^\varrho$ durch n teilbar sein.

Umgekehrt, wenn sich eine Potenz von g, etwa die ϱ^{te}, so angeben läßt, daß zg^ϱ ein Vielfaches von n ist, so kann man setzen:

$$\alpha : \beta = \frac{z}{n} = \frac{\frac{z g^\varrho}{n}}{g^\varrho},$$

also gleich einem systematischen Bruche.

Der Quotient $\alpha : \beta = \frac{z}{n}$ läßt sich also in einen systematischen Bruch mit der Grundzahl g dann und nur dann entwickeln, wenn eine Potenz von g, g^ϱ, existiert, für welche das Produkt zg^ϱ durch n teilbar ist. Nach Kap. I, § 11 A, IV a ist, weil z und n relativ prim, hierfür aber hinreichend und notwendig, daß g^ϱ ein Vielfaches von n ist, was dann und nur dann zutrifft, wenn n keine Primfaktoren besitzt, die nicht auch in g vorkommen. Für $g = 10$ muß mithin n von der Form $2^{\nu_1} \cdot 5^{\nu_2}$ sein, wo ν_1, ν_2 irgendwelche ganzen Zahlen (Null eingeschlossen) bedeuten.

Um in dem Falle, daß es eine Potenz von g gibt (die niedrigste sei die ϱ^{te}), deren Produkt mit z durch n teilbar ist, $\frac{z}{n}$ wirklich in einen systematischen Bruch zu entwickeln[1]), dividiere man nach dem Kap. I, § 10 F angegebenen Verfahren z durch n, wobei man den Quotienten q_0 ($\geqq 0$) und den Rest r_0 ($< n$) erhalten möge, so daß

$$z = q_0 n + r_0$$

oder

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{r_0}{n}.$$

Man setze weiter $\frac{r_0}{n} = \frac{1}{g} \cdot \frac{r_0 g}{n}$ und berechne $r_0 g : n$, d. h. man hänge an den Rest r_0 eine Null und dividiere die dann entstehende Zahl $r_0 g$ durch n. Wenn diese Division den Quotienten q_1 ($0 \leqq q_1 < g$) und den Rest r_1 ($< n$) liefert, so wird

$$\frac{r_0}{n} = \frac{1}{g}\left(q_1 + \frac{r_1}{n}\right)$$

und

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{1}{g} \cdot \frac{r_1}{n}.$$

An den Rest r_1 hänge man abermals eine Null und dividiere die entstehende Zahl $r_1 g$ wieder durch n, wobei man erhalten möge:

1) Für diese Entwicklung ist es gleichgültig, ob z und n einen gemeinschaftlichen Teiler haben oder nicht.

$$\frac{r_1 g}{n} = q_2 + \frac{r_2}{n} \qquad (0 \leqq q_2 < g,\ r_2 < n),$$

so daß

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \frac{1}{g^3} \cdot \frac{r_2 g}{n}.$$

In derselben Weise fortfahrend, findet man schließlich:

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_{\varrho-1}}{g^{\varrho-1}} + \frac{1}{g^\varrho} \cdot \frac{r_{\varrho-1} \cdot g}{n}.$$

Durch Multiplikation mit g^ϱ erhält man:

$$\frac{z \cdot g^\varrho}{n} = q_0 \cdot g^\varrho + q_1 \cdot g^{\varrho-1} + q_2 \cdot g^{\varrho-2} + \cdots + q_{\varrho-1} \cdot g + \frac{r_{\varrho-1} \cdot g}{n}.$$

Da die linke Seite nach unserer Voraussetzung und jeder der ϱ ersten Summanden auf der rechten Seite selbstverständlich eine ganze Zahl ist, gilt dasselbe auch von $\frac{r_{\varrho-1} \cdot g}{n}$, d. h. wenn man an den Rest $r_{\varrho-1}$ eine Null gehängt hat, muß die Division durch n aufgehen, und wenn nun $\frac{r_{\varrho-1} \cdot g}{n} = q_\varrho$, so hat man für $\frac{z}{n}$ die Entwicklung

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_{\varrho-1}}{g^{\varrho-1}} + \frac{q_\varrho}{g^\varrho}$$
$$= q_0,\ \overline{q_1 q_2 \cdots q_{\varrho-1} q_\varrho}.$$

Man erhält den systematischen Bruch unmittelbar in der abgekürzten Schreibweise, wenn man hinter die ganze Zahl q_0 die durch die sukzessiven Divisionen gefundenen Zahlen $q_1, q_2, \ldots q_{\varrho-1}, q_\varrho$ schreibt und das Komma unmittelbar vor die Stelle q_1 setzt, die man nach Anhängen der ersten Null gefunden hat.

Den $\frac{z}{n}$ gleichen systematischen Bruch kann man auch noch auf einem anderen Wege finden, den wir der kürzeren Schreibweise wegen nur für $g = 10$ andeuten wollen. Wenn $n = 2^{\nu_1} \cdot 5^{\nu_2}$, und wenn

1. $\nu_1 > \nu_2$, so ist $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot 5^{\nu_1 - \nu_2}}{2^{\nu_1} \cdot 5^{\nu_1}} = \frac{z \cdot 5^{\nu_1 - \nu_2}}{10^{\nu_1}}$,

2. $\nu_1 = \nu_2$, so ist $\frac{z}{n} = \frac{z}{10^{\nu_1}} = \frac{z}{10^{\nu_2}}$,

und

3. $\nu_1 < \nu_2$, so ist $\frac{z}{n} = \frac{z \cdot 2^{\nu_2 - \nu_1}}{2^{\nu_2} \cdot 5^{\nu_2}} = \frac{z \cdot 2^{\nu_2 - \nu_1}}{10^{\nu_2}}$.

Die Anzahl der Bruchstellen des entstehenden Dezimalbruchs ist

also in jedem Falle gleich dem größeren der beiden Exponenten ν_1, ν_2[1]).

Die im vorstehenden behandelte Division eines systematischen Bruches α durch einen systematischen Bruch β umfaßt natürlich auch den Fall, daß der Divisor β eine ganze Zahl ist. Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn β eine Potenz von g ist. Für $\alpha = \frac{A}{g^{\nu_1}}$ und $\beta = g^\lambda$ erhält man nämlich $\alpha : \beta = \frac{A}{g^{\nu_1 + \lambda}}$, d. h. $\alpha : \beta$ besteht in der abgekürzten Schreibweise aus denselben Ziffern wie α, hat aber λ Stellen mehr hinter dem Komma. Um α durch g^λ zu dividieren, hat man also das Komma nur λ Stellen nach links zu rücken, eventuell, wenn nämlich vor dem Komma weniger als λ Stellen vorhanden sind, nachdem man die nötige Anzahl von Nullen vor die erste Ziffer von α gesetzt hat.

E. Potenzieren.

Irgend eine Potenz eines systematischen Bruches mit ganzzahligem Exponenten wird durch wiederholtes Multiplizieren gefunden.

F. Radizieren.

I. Quadratwurzel.

Die Quadratwurzelausziehung aus einem beliebigen Bruch ist Kap. II, § 5 C, (I) auf die Berechnung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl und auf eine Division durch eine solche zurückgeführt. Dementsprechend erhalten wir jetzt für systematische Brüche, falls

$$\alpha = \frac{A}{g^{2\lambda}}, \quad \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{A}}{g^\lambda}$$

und, falls

$$\alpha = \frac{A}{g^{2\lambda - 1}}, \quad \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{A \cdot g}{g^{2\lambda}}} = \frac{\sqrt{A \cdot g}}{g^\lambda}.$$

Um also aus einem systematischen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, läßt man, und zwar, wenn die Anzahl der Bruchstellen eine ungerade ist, nach Hinzufügung einer Null, das Komma fort, zieht nach dem Kap. I, § 10 G angegebenen Verfahren aus der entstehenden ganzen Zahl die Wurzel und streicht vom Resultate durch ein Komma von rechts aus halb so viel Stellen ab, als der Radikand Bruchstellen hinter dem Komma hatte oder, was auf dasselbe hinauskommt, man läßt das

1) Das zweite Verfahren führt wohl immer schneller zum Ziele als das erste, wenn man die Zerlegung der Zahlen n, g in ihre Primfaktoren kennt. Für das zuerst angegebene Divisionsverfahren ist diese Kenntnis nicht erforderlich.

Komma im Radikanden stehen, verfährt aber ohne Rücksicht auf dasselbe genau so, wie es Kap. I, § 10 G für die ganzen Zahlen gelehrt ist, und setzt im Resultate das Komma unmittelbar hinter diejenige Ziffer, welche unter Berücksichtigung der beiden letzten vor dem Komma stehenden Ziffern des Radikanden gefunden ist.

Existiert keine ganze Zahl, die gleich $\sqrt{A}$ bezüglich $\sqrt{Ag}$ ist, so gibt es auch keinen systematischen Bruch von dieser Eigenschaft (vgl. Kap. II, § 5 C, (II)), also auch keinen, der gleich $\sqrt{\alpha}$ wäre.

In diesem Falle aber kann man nach der Kap. II, § 5 C, (III) S. 94 gegebenen Regel stets zwei systematische Brüche $\frac{z}{g^\nu}$ und $\frac{z+1}{g^\nu}$, wo ν eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so finden, daß

$$\left(\frac{z}{g^\nu}\right)^2 < \alpha < \left(\frac{z+1}{g^\nu}\right)^2.$$

Man braucht nämlich nur nach dem Kap. I, § 10 G angegebenen Verfahren die ganze Zahl z so zu bestimmen, daß

$$z^2 \leqq G < (z+1)^2,$$

wo G diejenige ganze Zahl bedeutet, die entsteht, wenn man α mit $g^{2\nu}$ multipliziert und die im Produkte etwa noch enthaltenen Bruchstellen sämtlich fortläßt. Die erforderlichen Rechenoperationen bewegen sich also vollständig im Gebiete der ganzen Zahlen.

Vergleicht man noch den Rest $R = G - z^2$ mit z, so kann man, wie S. 93 gezeigt, sofort entscheiden, ob $\alpha \gtreqless \left(\frac{z+\frac{1}{2}}{g^\nu}\right)^2$.

II. Kubikwurzel.

$$\text{Wenn } \alpha = \frac{A}{g^{3\lambda}}, \quad \text{so ist } \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{A}}{g^\lambda};$$

$$\text{wenn } \alpha = \frac{A}{g^{3\lambda-1}}, \quad \text{so ist } \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{Ag}}{g^\lambda};$$

$$\text{wenn } \alpha = \frac{A}{g^{3\lambda-2}}, \quad \text{so ist } \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{Ag^2}}{g^\lambda}.$$

Damit ist auch die Kubikwurzelausziehung aus einem beliebigen systematischen Bruche auf die aus einer ganzen Zahl und auf die Division durch eine Potenz der Grundzahl zurückgeführt. Wenn die Kubikwurzel aus A bezüglich Ag oder Ag^2 in unserem Zahlenbereiche nicht existiert, so gilt dasselbe auch von $\sqrt[3]{\alpha}$. Dann können wir aber, ganz ähnlich wie bei der Quadratwurzelausziehung, nach willkürlicher Annahme einer ganzen Zahl ν, stets zwei systematische Brüche $\frac{z}{g^\nu}$ und $\frac{z+1}{g^\nu}$ so angeben, daß $\left(\frac{z}{g^\nu}\right)^3 < \alpha < \left(\frac{z+1}{g^\nu}\right)^3$. Man

braucht zu dem Zwecke nur nach dem Kap. I, § 10 G angedeuteten Verfahren die ganze Zahl z so zu bestimmen, daß

$$z^3 \leq G < (z+1)^3,$$

wo G die größte ganze in dem Produkt $\alpha \cdot g^{3\nu}$ enthaltene Zahl bedeutet.

In welchem Sinne und mit welcher Berechtigung man die in unserem Zahlenbereiche nicht existierende Wurzel (mit beliebigem Exponenten) aus irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl durch einen Bruch ersetzen kann, haben wir bereits Kap. II, § 5 C, (III) S. 95 gesagt. Wir brauchen jetzt nur hinzuzufügen, daß man zu diesem Zwecke mit Vorliebe einen der systematischen Brüche $\frac{z}{g^\nu}$ bezüglich $\frac{z+1}{g^\nu}$ wählt, deren Unterschied durch passende Wahl von ν beliebig klein gemacht werden kann.

G. Logarithmieren.

Zu dem, was Kap. II, § 5 D (S. 96) über Logarithmen im Gebiete der gebrochenen Zahlen gesagt ist, haben wir jetzt nichts weiter hinzuzusetzen, als daß man auch die Logarithmen bezw. die Brüche, welche die nicht vorhandenen Logarithmen vertreten, fast ausschließlich in systematischer Form zu schreiben pflegt.

§ 4. Umwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen systematischen Bruch.

Da nach Kap. II, § 1 (S. 75) jeder gewöhnliche Bruch $\frac{z}{n}$ als Ergebnis der Divisionsaufgabe $z:n$ angesehen werden kann, ist die Umwandlung des Bruches $\frac{z}{n}$ in einen systematischen Bruch mit der Grundzahl g nichts anderes, als die schon § 3 D (S. 103 u. ff.) behandelte Darstellung des Quotienten zweier ganzen Zahlen in Form eines systematischen Bruches. Wir haben gesehen, daß diese Darstellung, falls, was offenbar erlaubt ist, z und n von vornherein als relativ prim vorausgesetzt werden, dann und nur dann möglich ist, wenn n keine Primfaktoren enthält, die nicht auch in g vorkommen, und haben zur Ermittelung des systematischen Bruches S. 104 ein Divisionsverfahren angegeben. Dieses Verfahren ist aber auch dann anwendbar, wenn n die soeben angegebene Voraussetzung nicht erfüllt. Der Widerspruch, auf welchen wir in dem Falle zu stoßen scheinen, daß n andere Primfaktoren als g enthält, verschwindet nur, wenn unter dieser Bedingung die Division niemals aufgeht, wie oft man auch an den Rest eine Null

anhängen möge. Die rein formale Anwendung unseres Algorithmus muß alsdann zu einem Ausdruck von der Gestalt

$$q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \frac{q_3}{g^3} + \cdots$$

führen, der niemals ein Ende nimmt, zu dem vielmehr immer noch neue Glieder hinzuzufügen sind, wie viele man auch schon hingeschrieben hat. Kommt einem solchen Symbol überhaupt ein Sinn zu, bezüglich welcher? Daß es nicht eine Summe in dem früher definierten Sinne darstellt, ist klar; denn für den Begriff der Summe war bisher eine bestimmte Anzahl von Summanden durchaus wesentlich, und war diese Anzahl auch so groß, daß wir bei unseren beschränkten Vorstellungsfähigkeiten nicht alle Summanden durch einen einzigen Denkakt zu einem Ganzen kollektivisch vereinigen konnten, so war es doch immer möglich, durch Bildung von Teilsummen und Zusammenfassung dieser schrittweise zu dem Begriff der Totalsumme zu gelangen. Alles dieses ist aber ausgeschlossen, wenn man immer noch neue Summanden zu addieren hat, wie viele auch schon zu einer Summe vereinigt sein mögen, oder wenn, wie man sich auszudrücken pflegt, die Anzahl der Summanden unendlich groß ist. Um zu entscheiden, ob auch in solchem Falle dem in Form einer Summe erscheinenden Symbole $q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \frac{q_3}{g^3} + \cdots$ eine Bedeutung beigelegt werden kann, müssen wir etwas genauer auf die Werte der Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eingehen. Diese Zahlen ergaben sich S. 104 u. 105 als Quotienten der Division von $r_0 g, r_1 g, r_2 g$ usw. durch n, so daß die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} r_0 g &= n q_1 + r_1, \\ r_1 g &= n q_2 + r_2, \\ r_2 g &= n q_3 + r_3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Für alle Werte von ν ist

$$\begin{aligned} 0 &\leqq q_\nu < g, \\ 0 &< r_\nu < n. \end{aligned}$$

Da die Reste r_ν nur die $(n-1)$ Werte $1, 2, \ldots n-1$ annehmen können, ist es unmöglich, daß mehr als die $(n-1)$ ersten $r_0, r_1, \ldots r_{n-2}$ sämtlich voneinander verschieden sind; es muß vielmehr spätestens der n^{te} Rest einem der früheren Reste gleich sein. Es sei etwa r_s der erste Rest, welcher sich wiederholt, und r_{s+t} der nächste ihm gleiche. Da, für alle Werte von ν, durch r_ν die Zahlen $q_{\nu+1}$ und $r_{\nu+1}$ eindeutig bestimmt sind, folgt aus

$$r_{s+t} = r_s,$$

daß

$$1.\ q_{s+1+t} = q_{s+1} \quad \text{und} \quad 1\,\text{a.}\ r_{s+1+t} = r_{s+1},$$

und aus 1 a ebenso, daß

$$2.\ q_{s+2+t} = q_{s+2} \quad \text{und} \quad 2\,\text{a.}\ r_{s+2+t} = r_{s+2} \text{ usw.}$$

Allgemein wird

$$q_{s+\sigma+t} = q_{s+\sigma} \quad \text{und} \quad r_{s+\sigma+t} = r_{s+\sigma}$$

für alle ganzzahligen Werte von σ.

Von q_{s+1} an sind also je zwei Zahlen q einander gleich, deren Indizes sich um t unterscheiden; deshalb:

$$\begin{array}{lllll} q_{s+1} & = q_{s+1+t} & = q_{s+1+2t} & = q_{s+1+3t} & = \cdots, \\ q_{s+2} & = q_{s+2+t} & = q_{s+2+2t} & = q_{s+2+3t} & = \cdots, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{s+t-1} & = q_{s+t-1+t} & = q_{s+t-1+2t} & = q_{s+t-1+3t} & = \cdots, \\ q_{s+t} & = q_{s+2t} & = q_{s+3t} & = q_{s+4t} & = \cdots; \end{array}$$

d. h. aber, in dem durch Anwendung des Divisionsverfahrens aus $\frac{z}{n}$ erhaltenen Symbole $\overline{q_0,\ q_1 q_2 q_3 \ldots}$ wiederholt sich hinter q_s immer wieder die Zifferngruppe $\overline{q_{s+1} q_{s+2} \cdots q_{s+t-1} q_{s+t}}$, die man deshalb als die Periode der Entwicklung bezeichnet. Ausführlicher geschrieben hat der Ausdruck die Gestalt

$$q_0 + \frac{q_1}{g} + \cdots + \frac{q_s}{g^s} + \frac{q_{s+1}}{g^{s+1}} + \cdots + \frac{q_{s+t}}{g^{s+t}} + \frac{q_{s+1}}{g^{s+1+t}} + \cdots + \frac{q_{s+t}}{g^{s+2t}} + \frac{q_{s+1}}{g^{s+1+2t}} + \cdots + \frac{q_{s+t}}{g^{s+3t}} + \cdots$$

$$= q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \frac{Q_t}{g^{s+3t}} + \cdots,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$Q_s \quad \text{für} \quad q_1 g^{s-1} + q_2 g^{s-2} + \cdots + q_{s-1} g + q_s,$$
$$Q_t \quad \text{für} \quad q_{s+1} g^{t-1} + q_{s+2} g^{t-2} + \cdots + q_{s+t-1} g + q_{s+t}.$$

Die Zahlen $\frac{Q_t}{g^{s+t}}, \frac{Q_t}{g^{s+2t}}, \frac{Q_t}{g^{s+3t}}, \cdots$ in dieser Reihenfolge haben aber die Eigenschaft, daß jede folgende aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit dem echten Bruche $\frac{1}{g^t}$ entsteht; sie bilden also eine geometrische Reihe (vgl. Kap. I, § 7 D, Zusatz, S. 28), deren erstes Glied $\frac{Q_t}{g^{s+t}}$ und deren Quotient $\frac{1}{g^t}$ ist.

Unsere Frage nach der Bedeutung des durch unseren Divisions-Algorithmus erhaltenen Symbols ist demnach auf die Frage zurückgeführt, ob und in welchem Sinne man von der Summe einer geometrischen Reihe sprechen darf, deren Quotient e ein echter Bruch und deren Gliederzahl unendlich groß ist.

Die Summe s_n der n ersten Glieder der geometrischen Reihe

$$a,\ ae,\ ae^2,\ \ldots,\ ae^{n-1},\ \ldots$$

ist nach Kap. I, § 7 D, Zusatz

$$s_n = \frac{a}{1-e}(1-e^n) = \frac{a}{1-e} - e^n \frac{a}{1-e}.$$

Wenn wir die Summe in der Weise zu bilden anfangen, daß wir zum ersten Glied das zweite hinzufügen, zur Summe der beiden ersten das dritte, zu der so gefundenen Summe das vierte Glied usw., so ist klar, daß wir, je mehr Glieder wir hinzunehmen, desto größere Summen erhalten, d. h. wenn wir n größer werden lassen, wird auch s_n immer größer. Da aber für alle Werte von n

$$1 - e^n < 1,$$

so ist für alle Werte von n auch

$$s_n < \frac{a}{1-e},$$

d. h. aber, wenn wir mehr und mehr Glieder zur Summenbildung verwenden, so wird die Summe zwar immer größer, erreicht aber niemals den Wert der bestimmten Zahl $\frac{a}{1-e} = A$.

Weil $e < 1$, kann nach Kap. II, § 5 A (S. 87) durch hinreichend große Werte von n die Potenz e^n und demzufolge auch $e^n \cdot A$ beliebig klein gemacht werden, oder genauer ausgedrückt, wenn eine beliebig kleine Zahl δ vorgelegt wird, läßt sich stets eine Zahl ν so bestimmen, daß für alle Werte von $n \geqq \nu$

$$e^n < \frac{\delta}{A} \quad \text{oder} \quad A \cdot e^n < \delta,$$

folglich s_n zwar immer noch kleiner als A ist, sich von A aber um weniger als die beliebig kleine Zahl δ unterscheidet. Diese Tatsache drückt man auch in den Worten aus, s_n nähere sich mit unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwerte oder limes A (ohne ihn allerdings jemals zu erreichen), und man schreibt

$$\lim_{n=\infty} s_n = A.$$

Weil für alle Werte n, die $\geqq \nu$,

$$A - \delta < s_n < A,$$

so können sich auch s_{n_1} und s_{n_2}, falls sowohl $n_1 \geqq \nu$ als auch $n_2 \geqq \nu$, nicht um mehr als um δ voneinander unterscheiden.

Die soeben angestellten Überlegungen erläutern wir zunächst an einem einfachen Beispiel. Die Brüche $\frac{1}{2^0} = 1$, $\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ..., deren Zähler sämtlich 1 und deren Nenner die aufeinander folgenden Potenzen von 2 sind, bilden eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede 1 und dem Quotienten $\frac{1}{2}$. Es ist deshalb für diese Reihe

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Fängt man an, die Addition auszuführen, indem man sukzessive addiert $1 + \frac{1}{2}$, dann $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$, dann $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$, usw., so wird selbstverständlich bei jedem Schritte die Summe größer, der für s_n gefundene Ausdruck zeigt aber, daß, wie viele Glieder in der angegebenen Reihenfolge man auch addieren möge, die Summe immer kleiner bleibt als die Zahl 2.

Ist nun δ eine vorgelegte beliebig kleine Zahl, so bestimmen wir eine ganze Zahl ν so, daß

$$1 + \nu > \frac{2}{\delta}.$$

Dann ist für alle Werte von n, die $\geqq \nu$,

$$1 + n > \frac{2}{\delta},$$

folglich auch, da

$$(1 + 1)^n > 1 + n, \text{ (nach Kap. I, § 7 C, (III), S. 28)},$$

$$2^n > \frac{2}{\delta}$$

und

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\delta}{2} \text{ (Kap. II, § 2, S. 80)},$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \delta.$$

Für alle Werte von n, die größer sind als die vorher genau bestimmte Zahl ν (oder auch schon für $n = \nu$), ist zwar die Summe s_n immer noch kleiner als 2, unterscheidet sich aber von 2 um weniger

als die vorher beliebig klein gewählte Zahl δ; also ist nach der neu eingeführten Bezeichnung für diese geometrische Reihe $\lim_{n=\infty} s_n = 2$.

Kehren wir jetzt wieder zur Untersuchung einer beliebigen geometrischen Reihe mit einem Quotienten, der kleiner als 1 ist, und mit unendlicher Gliederanzahl zurück, so wissen wir, daß man zwar selbstverständlich nicht sämtliche Glieder wirklich addieren kann, daß aber alle Summen von irgendwelcher bestimmten Anzahl, falls nur diese Anzahl einen gewissen Wert ν überschreitet, sich um weniger als eine beliebig klein gegebene Zahl δ von der vorher als Grenzwert bezeichneten Zahl $A = \frac{a}{1-e}$ unterscheiden, und zwar um so weniger, je mehr Glieder wir zur Summenbildung verwenden[1]), und diese Tatsache veranlaßt und berechtigt uns dazu, in dem Falle, wo die geometrische Reihe (immer unter der Voraussetzung, daß der Quotient kleiner als 1) unendlich viele Glieder enthält, der Begriff der Summe in dem früheren Sinne also nicht mehr anwendbar ist, als Summe diesen eindeutig bestimmten Grenzwert $A = \frac{a}{1-e}$ zu definieren, dem sich die Summe der n ersten Glieder mit wachsendem n immer mehr nähert.

Selbstverständlich gelten für die Summe in dem neuen, soeben definierten Sinne nicht ohne weiteres die Sätze, welche wir früher von Summen bewiesen haben. Ob das der Fall ist, bedarf vielmehr für jeden Satz einer besonderen Untersuchung. Wir wollen vorläufig nur darauf hinweisen, weil wir bald davon Gebrauch zu machen haben, daß der Satz: „Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert (bezüglich durch eine Zahl dividiert), indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert (bezüglich durch die Zahl dividiert)“ auch für die unendlichen geometrischen Reihen gilt, deren Quotient kleiner als 1 ist, wie sich unmittelbar aus den beiden Gleichungen

$$a + ae + ae^2 + \cdots + \text{in inf.} = \frac{a}{1-e}$$

und

$$ab + abe + abe^2 + \cdots + \text{in inf.} = \frac{ab}{1-e}$$

ergibt.

Nunmehr ist auch die Bedeutung des in Form einer Summe aus unendlich vielen Summanden erscheinenden Symbols

1) Beispielsweise unterscheiden sich alle Summen, die man aus Gliedern der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ bilden kann, und die mindestens die hundert ersten Glieder enthalten, von der Zahl 2 und also auch voneinander um weniger als um einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine 30stellige Zahl ist.

$$\frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \frac{Q_t}{g^{s+3t}} + \cdots \text{ in inf.}$$

bestimmt. Nach der für die Summe einer geometrischen Reihe von unendlicher Gliederzahl aufgestellten Definition haben wir darunter die Zahl

$$\frac{Q_t}{g^{s+t}\left(1 - \frac{1}{g^t}\right)} = \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)}$$

zu verstehen, und die ins Unendliche sich erstreckende Summe

$$q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \cdots + \text{ in inf.}$$

hat den bestimmten Wert $q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)}$, den wir zur Abkürzung im folgenden auch durch P bezeichnen werden. Die Summe selbst nennt man im weiteren Sinne jetzt auch einen systematischen Bruch, und zwar einen „unendlichen" systematischen Bruch im Gegensatze zu den bisher ausschließlich behandelten „endlichen". Weil die Zifferngruppe $\overline{q_{s+1} q_{s+2} \cdots q_{s+t}}$ hinter der Ziffer q_s sich immerfort wiederholt, nennt man den Bruch einen periodischen systematischen Bruch, die Stellen $\overline{q_{s+1} \cdots q_{s+t}}$ die Periode und die Stellen $\overline{q_1 \ldots q_s}$, die sich nicht wiederholen, die Vorperiode. In abgekürzter Weise schreibt man den unendlichen periodischen systematischen Bruch

$$q_0,\, q_1 q_2 \cdots q_s \overline{|q_{s+1} \cdots q_{s+t}} \cdots,$$

wo der über die Stellen $q_{s+1} \cdots q_{s+t}$ gesetzte Haken die Periode andeuten soll. Ist $s = 0$, fällt also die Vorperiode fort und beginnt die Periode demnach unmittelbar hinter dem Komma, so heißt der Bruch ein rein-periodischer systematischer Bruch; wenn $s > 0$, eine Vorperiode also vorhanden ist, so heißt er gemischt-periodisch.

Zu dem unendlichen periodischen systematischen Bruche

$$q_0,\, q_1 q_2 \cdots q_s \overline{|q_{s+1} \cdots q_{s+t}} \cdots$$

waren wir gelangt, indem wir das Divisionsverfahren, mittels dessen wir den Bruch $\frac{z}{n}$, wenn n keine anderen Primfaktoren als g besitzt, immer in einen endlichen systematischen Bruch verwandeln können, in rein formaler Weise auch auf einen solchen Bruch $\frac{z}{n}$ anwendeten, dessen Nenner n die eben angegebene Voraussetzung nicht erfüllt. Daß in diesem Falle der vorher definierte Wert P des unendlichen

periodischen systematischen Bruches auch tatsächlich gleich dem Bruche $\frac{z}{n}$ ist, von dem wir ausgingen, haben wir jetzt noch nachzuweisen.

Bricht man das Divisionsverfahren hinter der ν^{ten} Periode ab, so erhält man (vgl. S. 105)

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} + \frac{Q_t}{g^{s+2t}} + \cdots + \frac{Q_t}{g^{s+\nu t}} + R_\nu,$$

wo

$$R_\nu = \frac{1}{g^{s+\nu t}} \cdot \frac{r_{s+\nu t}}{n} < \frac{1}{g^s \cdot (g^t)^\nu},$$

oder

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^{s+t}} \frac{1 - \left(\frac{1}{g^t}\right)^\nu}{1 - \frac{1}{g^t}} + R_\nu$$

$$= q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)} - \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} + R_\nu$$

$$= P - \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} + R_\nu.$$

Also

$$\left| P - \frac{z}{n} \right| = \left| \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} - R_\nu \right|.$$ [1])

Diese Gleichung besteht für alle ganzzahligen Werte von ν. Bedeutet nun δ eine beliebig kleine Zahl, so können wir ν stets so groß wählen, daß

$$1. \quad \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)} \cdot \frac{1}{(g^t)^\nu} < \delta$$

und

$$2. \quad R_\nu < \delta, \quad \text{(Kap. II, § 5 A, S. 87)},$$

folglich auch

$$\left| P - \frac{z}{n} \right| < \delta \text{ wird.}$$

P sowohl wie $\frac{z}{n}$ sind aber unabhängig von ν, d. h. sie haben stets denselben bestimmten Wert, welche ganze Zahl man für ν auch setzen möge, also gilt das Gleiche auch von $\left| P - \frac{z}{n} \right|$. Eine feste Zahl

1) Das Symbol $|a - b|$ bezeichnet man als den absoluten Betrag von $a - b$; es soll bedeuten

$$a - b, \quad \text{falls } a > b,$$
$$b - a, \quad \text{falls } a < b,$$
und
$$0, \quad \text{falls } a = b.$$

wie diese Differenz kann aber nur dann kleiner als eine beliebig klein zu wählende Größe sein, wenn sie den Wert Null hat. Damit ist gezeigt, daß tatsächlich $P = \frac{z}{n}$.

In bezug auf das Rechnen mit den unendlichen periodischen systematischen Brüchen verweisen wir auf die bei den geometrischen Reihen S. 113 gemachte Bemerkung. Aus dem daselbst angegebenen Satze folgt sofort, daß man auch einen unendlichen periodischen systematischen Bruch mit einer Potenz g^α der Grundzahl multipliziert (bezüglich durch dieselbe dividiert), indem man das Gleiche mit jeder einzelnen Stelle tut, in der abgekürzten Schreibweise das Komma also α Stellen nach rechts (bezüglich nach links) rückt.

In der Gleichung

$$q_0, q_1 \dots q_s \overline{'q_{s+1} \dots q_{s+t}} \dots = q_0 + \frac{Q_s}{g^s} + \frac{Q_t}{g^s(g^t - 1)}$$

liegt bereits die Lösung der Aufgabe, einen beliebigen periodischen unendlichen systematischen Bruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln. Um eine bequem anwendbare Regel formulieren zu können, nehmen wir an, daß der systematische Bruch Ganze nicht enthält (also $q_0 = 0$), und unterscheiden zwei Fälle:

1. Der systematische Bruch sei rein-periodisch, also $s = 0$. Dann wird

$$0, \overline{'q_1 q_2 \dots q_t} \dots = \frac{Q_t}{g^t - 1},$$

d. h. jeder rein-periodische systematische Bruch ist gleich einem gewöhnlichen Bruche, dessen Zähler die als systematische Zahl geschriebene Periode bildet, und dessen Nenner eine systematische Zahl ist, in welcher jede einzelne Ziffer gleich $g - 1$ und die Anzahl der Ziffern gleich der Anzahl der Stellen einer Periode ist, z. B. für $g = 10$

$$0, \overline{'324} \dots = \frac{324}{999} = \frac{12}{37}.$$

Da

$$Q_t = q_{s+1} g^{t-1} + q_{s+2} g^{t-2} + \dots + q_{s+t-1} g + q_{s+t}$$

$$(q_{s+\tau} \leqq g - 1, \text{ für } \tau = 1, 2, \dots t)$$

und

$$g^t - 1 = (g-1)g^{t-1} + (g-1)g^{t-2} + \dots + (g-1)g + (g-1),$$

so ist stets

$$Q_t \leqq g^t - 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn

$$q_{s+1} = q_{s+2} = \dots = q_{s+t-1} = q_{s+t} = g - 1,$$

wenn also die Periode nur aus der Ziffer $g-1$ besteht. In diesem Falle ist der Wert $\frac{Q_t}{g^t-1}$ des periodischen systematischen Bruches gleich 1, in jedem anderen Falle ist er kleiner als 1.

2. Der periodische Bruch sei gemischt-periodisch. Dann ist

$$0, q_1 q_2 \dots q_s \,/\overline{q_{s+1} q_{s+2} \dots q_{s+t}} \dots = \frac{Q_s g^t + Q_t - Q_s}{g^s(g^t-1)},$$

$$Q_s g^t + Q_t = \overline{q_1 q_2 \dots q_s q_{s+1} \dots q_{s+t}},$$

$$Q_s = \overline{q_1 q_2 \dots q_s}.$$

Um den Zähler des Bruches zu bilden, hat man also die Ziffern der Vorperiode und der ersten Periode in unveränderter Reihenfolge als systematische Zahl zu schreiben und von dieser die als systematische Zahl zu betrachtende Vorperiode abzuziehen. Der Nenner ist eine systematische Zahl, welche zuerst die Ziffer $g-1$ so oft enthält, wie die Periode Stellen besitzt, und darnach so viel Nullen, wie in der Vorperiode Stellen vorhanden sind.

Z. B. für $g=10$ ist

$$0{,}23\,/\overline{148} \dots = \frac{23\,148 - 23}{99\,900} = \frac{23\,125}{99\,900} = \frac{25}{108}.$$

Besteht insbesondere die Periode nur aus der Ziffer $g-1$, so ist

$$t = 1, \quad Q_t = g-1, \quad \frac{Q_t}{g^t-1} = 1$$

und

$$0, q_1 q_2 \dots q_s \,/\overline{(g-1)} \dots = \frac{Q_s}{g^s} + \frac{1}{g^s}$$
$$= 0, q_1 q_2 \dots q_{s-1}(q_s + 1).$$

In diesem Falle also ist der Wert des unendlichen periodischen systematischen Bruches gleich demjenigen endlichen systematischen Bruche, den man erhält, wenn man den periodischen Teil fortläßt und die letzte Ziffer der Vorperiode um 1 erhöht. Für $g=10$ ist z. B.

$$2{,}357\,/\overline{9} \dots = 2{,}358.$$

Bricht man einen beliebigen periodischen systematischen Bruch hinter der Stelle q_ϱ ab, wobei es gleichgültig ist, ob q_ϱ zu den Vorziffern oder den Periodenziffern gehört, so ist zunächst klar, daß der Wert P des unendlichen systematischen Bruches größer ist als der endliche systematische Bruch $P_\varrho = q_0, q_1 q_2 \dots q_\varrho$. Andererseits läßt sich leicht zeigen, daß die Summe der unendlich vielen fortgelassenen

Stellen kleiner ist als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle. Zu dem Zwecke vergleichen wir den vorgelegten unendlichen systematischen Bruch mit einem andern, P', welcher in den ersten ϱ Stellen mit dem gegebenen übereinstimmt, in allen folgenden Stellen aber die Ziffer $(g-1)$ hat, dessen Wert demnach

$$P' = q_0, q_1 \cdots q_{\varrho-1}(q_\varrho + 1)$$

ist. Bezeichnet $q_{\sigma+1}$ in P die erste Ziffer hinter q_ϱ, welche eine Periode beginnt, so denken wir uns P in den endlichen Teil

$$q_0, q_1 q_2 \cdots q_\varrho q_{\varrho+1} \cdots q_\sigma$$

und in den unendlichen

$$\frac{Q_t}{g^{\sigma+t}} + \frac{Q_t}{g^{\sigma+2t}} + \cdots$$

zerlegt, und entsprechend auch P' in

$$q_0, \overbrace{q_1 q_2 \cdots q_\varrho (g-1) \ldots (g-1)}^{(\sigma \text{ Stellen})} + \left(\frac{Q_t'}{g^{\sigma+t}} + \frac{Q_t'}{g^{\sigma+2t}} + \cdots\right),$$

wo Q_t' aus Q_t hervorgeht, indem jede Periodenziffer durch $g-1$ ersetzt wird.

Nun ist 1.

$$q_0, q_1 \cdots q_\varrho q_{\varrho+1} \cdots q_\sigma \leqq q_0, \overbrace{q_1 \cdots q_\varrho (g-1) \ldots (g-1)}^{(\sigma \text{ Stellen})}$$

und 2.

$$\frac{Q_t}{g^{\sigma+t}} + \frac{Q_t}{g^{\sigma+2t}} + \cdots < \frac{Q_t'}{g^{\sigma+t}} + \frac{Q_t'}{g^{\sigma+2t}} + \cdots,$$

weil beide geometrische Reihen denselben Quotienten haben, das Anfangsglied der ersten aber kleiner ist als das der zweiten; folglich

$$P < P',$$

also tatsächlich

$$P_\varrho < P < P_\varrho + \frac{1}{g^\varrho}\cdot$$

Aus diesen Ungleichungen können wir zunächst den Schluß ziehen, daß auch zwei unendliche periodische systematische Brüche nur dann einander gleich sein können, wenn sie in je zwei entsprechenden Stellen übereinstimmen, mit Ausnahme des Falls, daß die Periode des einen nur aus der Ziffer $(g-1)$ besteht.

In den beiden unendlichen systematischen Brüchen

$$P = q_0, q_1 q_2 \cdots q_\varrho q_{\varrho+1} \cdots,$$
$$P' = q_0, q_1 q_2 \cdots q_\varrho q_{\varrho+1}' \cdots$$

mögen die ganzen Zahlen, sowie die ϱ ersten Stellen entsprechend einander gleich, dagegen

$$q'_{\varrho+1} \geqq q_{\varrho+1} + 1$$

sein. Dann ist

$$P' > P'_{\varrho+1},$$

wo $P'_{\varrho+1}$ den endlichen systematischen Bruch $q_0, q_1 q_2 \cdots q_\varrho q'_{\varrho+1}$ bezeichnet, also auch

$$P' > P_{\varrho+1} + \frac{1}{g^{\varrho+1}};$$

nun ist aber

$$P < P_{\varrho+1} + \frac{1}{g^{\varrho+1}},$$

folglich

$$P' > P.$$

Die beiden unendlichen systematischen Brüche sind also voneinander verschieden, sobald sie in irgend einer Stelle voneinander abweichen, und zwar hat der den größeren Wert, bei welchem die erste abweichende Stelle die größere ist. Der Satz gilt nicht mehr, wenn die Periode des einen der beiden systematischen Brüche die Ziffer $g-1$ ist. So hat man z. B. für $g = 10$

$$0{,}235\overline{9} \cdots = 0{,}236\overline{0} \cdots.$$

Wir brauchen diesen Ausnahmefall nicht weiter zu berücksichtigen, wenn wir jeden systematischen Bruch mit der Periodenziffer $(g-1)$ durch den ihm gleichen endlichen systematischen Bruch ersetzen, und dann können wir aus dem Satze die Folgerung ziehen, daß man einen gewöhnlichen Bruch nur auf eine einzige Art in einen systematischen Bruch mit gegebener Basis verwandeln kann.

Aus den Ungleichungen (S. 118)

$$P_\varrho < P < P_\varrho + \frac{1}{g^\varrho}$$

ergibt sich weiter, daß, wenn ein vorgelegter gewöhnlicher Bruch auch keinem endlichen systematischen Bruche mit der Grundzahl g gleich ist, doch stets zwei ϱ-stellige systematische Brüche angegeben werden können $\left(\text{nämlich } P_\varrho \text{ bezüglich } P_\varrho + \frac{1}{g^\varrho}\right)$, von denen er sich um weniger als um $\frac{1}{g^\varrho}$, d. h. eine Zahl unterscheidet, die durch Vergrößerung von ϱ beliebig klein gemacht werden kann. Diese Ersetzbarkeit eines beliebigen gewöhnlichen Bruches durch einen endlichen systematischen folgt übrigens auch schon aus den Entwicklungen S. 104 und 105, speziell aus der Gleichung

$$\frac{z}{n} = q_0 + \frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g^2} + \cdots + \frac{q_\varrho}{g^\varrho} + \frac{1}{g^\varrho} \cdot \frac{r_\varrho}{n},$$

wo $r < n$.

Wählt man 2 als Grundzahl, so erhält man für den beliebigen Bruch $\frac{z}{n}$ die Entwicklung $q_0 + \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2^2} + \cdots + \frac{q_\varrho}{2^\varrho}$, wo die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$ nur die Werte 0 oder 1 haben können, mit einem Fehler, der kleiner ist als $\frac{1}{2^\varrho}$; z. B.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots.$$

Von dieser Darstellung des Bruches $\frac{1}{3}$ kann man eine geometrische Anwendung machen. Da sich jeder Winkel mittels Zirkel und Lineal in 2^2, 2^4, 2^6 usw. Teile teilen läßt, liefert die Gleichung unmittelbar eine angenäherte Konstruktion für die Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile. Bricht man die Reihe mit dem Gliede $\frac{1}{2^\varrho}$ ab, so beträgt der Fehler $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^\varrho}$.

In bezug auf die Frage nach der Berechtigung, einen gewöhnlichen oder einen unendlichen systematischen Bruch durch einen annähernd gleichen endlichen systematischen Bruch zu ersetzen, verweisen wir auf die früher (S. 95 und 108) angestellten Betrachtungen über den Ersatz einer Wurzel oder eines Logarithmus durch einen Bruch. Wenn irgendwelche unendliche periodische systematische Brüche durch die elementaren Rechenoperationen verknüpft werden sollen, und wenn man statt dessen dieselben Rechnungen mit den annähernd gleichen endlichen systematischen Brüchen ausführt, so kann das in dieser Weise gefundene Resultat im selben Sinne das eigentlich verlangte vertreten; denn bezeichnen wir wieder die endlichen systematischen Brüche, die aus den unendlichen P und P' entstehen, falls wir sie nach der ϱ^{ten} Stelle abbrechen, mit P_ϱ bezüglich P_ϱ', und setzen wir

$$P = P_\varrho + \delta_\varrho,$$

$$P' = P_\varrho' + \delta_\varrho',$$

wo

$$\delta_\varrho < \frac{1}{g^\varrho}$$

und

$$\delta_\varrho' < \frac{1}{g^\varrho},$$

so lehren die Gleichungen

$$P + P' = P_\varrho + P_\varrho' + \delta_\varrho + \delta_\varrho',$$

$$P - P' = P_\varrho - P_\varrho' + \delta_\varrho - \delta_\varrho',$$

$$P \cdot P' = P_\varrho \cdot P_\varrho' + \delta_\varrho \cdot P_\varrho' + \delta_\varrho' \cdot P_\varrho + \delta_\varrho \cdot \delta_\varrho',$$

$$\frac{P}{P'} = \frac{P_\varrho}{P_\varrho'} + \frac{\delta_\varrho \cdot P_\varrho' - \delta_\varrho' \cdot P_\varrho}{P_\varrho'(P_\varrho' + \delta_\varrho')},$$

daß die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier unendlichen systematischen Brüche sich von den entsprechenden Verbindungen der annähernd gleichen endlichen systematischen Brüche nur um Beträge unterscheiden, die durch hinreichend große Werte von ϱ beliebig klein gemacht werden können. Wie groß ϱ mindestens zu wählen ist, damit diese Beträge unterhalb gegebener Zahlen bleiben, untersuchen wir genauer in § 8 B dieses Kapitels.

§ 5. Beziehung der Periodenlänge eines periodischen systematischen Bruches zum Nenner des ihm gleichen gewöhnlichen Bruches.

Unter „Länge" oder auch „Größe" (bei Gauß „magnitudo") der Periode versteht man die Anzahl der Ziffern, aus denen sie besteht, also die Zahl, die wir § 4 stets mit t bezeichnet haben.

Damit der Bruch $\frac{z}{n}$, dessen Zähler und Nenner von etwaigen gemeinsamen Teilern schon befreit seien, überhaupt einen periodischen systematischen Bruch liefere, ist hinreichend und erforderlich, daß n Primfaktoren besitze, die in der Grundzahl g nicht vorkommen (§ 3, S. 104 und § 4, S. 108).

Der Fall, daß n sowohl Primfaktoren enthält, die in g vorkommen, als auch solche, die in g nicht auftreten, läßt sich leicht, wie wir zunächst zeigen wollen, auf den Fall zurückführen, daß der Nenner keinen Primfaktor mit g gemeinsam hat.

Es sei

$$n = \gamma \cdot \nu,$$

wo γ das Produkt derjenigen Primzahlen bedeutet, die auch in g enthalten sind, und ν zu g relativ prim ist.

Die niedrigste Potenz von g, welche durch γ teilbar ist, sei die α^{te} und $g^\alpha = \gamma' \cdot \gamma$. Indem wir jetzt $z < n$ und teilerfremd zu n voraussetzen, erhalten wir

$$\frac{z}{n} = \frac{z \cdot \gamma'}{g^\alpha \cdot \nu}.$$

Die Division von $z \cdot \gamma'$ durch ν ergebe den Quotienten q und den Rest z_0, also

$$z \cdot \gamma' = q \cdot \nu + z_0,$$

wo q Null oder eine ganze Zahl bedeutet, die, weil $z < n$, kleiner als g^α ist, und wo $z_0 < \nu$.

Weil n relativ prim zu z, ist auch ν zu z relativ prim. ν ist aber auch teilerfremd zu γ'; denn γ' enthält nur Primfaktoren, die auch in g vorkommen. Aus der letzten Gleichung folgt deshalb, daß

auch z_0 und v keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Dividieren wir diese Gleichung durch $g^\alpha \cdot v$, so ergibt sich:

$$\frac{z}{n} = \frac{q}{g^\alpha} + \frac{1}{g^\alpha} \cdot \frac{z_0}{v};$$

d. h. der vorgelegte Bruch $\frac{z}{n}$ ist darstellbar als Summe eines endlichen (nämlich α-stelligen) systematischen Bruches und des $(g^\alpha)^{\text{ten}}$ Teiles eines echten Bruches $\frac{z_0}{v}$, in welchem der Nenner v sowohl zum Zähler z_0 wie zur Grundzahl g teilerfremd ist. Wir brauchen deshalb behufs Untersuchung der Periode nur von einem Bruche dieser letzteren Art auszugehen, den wir aber im folgenden wieder mit $\frac{z}{n}$ bezeichnen wollen.

Das Divisionsverfahren, mittels dessen wir $\frac{z}{n}$ in einen systematischen Bruch verwandelten, führte zu den Gleichungen (vgl. § 3, S. 104 und § 4, S. 109):

$$z = nq_0 + r_0,$$
$$r_0 g = nq_1 + r_1,$$
$$r_1 g = nq_2 + r_2,$$
$$r_2 g = nq_3 + r_3 \text{ usw.}$$

Da jetzt $z < n$, folgt aus der ersten Gleichung $q_0 = 0$ und $r_0 = z$. Die übrigen Gleichungen schreiben wir als Kongruenzen für den Modul n (vgl. Kap. I, § 12 A, S. 58):

$$r_1 \equiv r_0 g;\ r_2 \equiv r_1 g;\ r_3 \equiv r_2 g \text{ usw.} \qquad (\text{mod } n).$$

Setzen wir den Wert von r_0 in die erste Kongruenz, den von r_1 in die zweite usw. ein, so erhalten wir

$$r_0 = z;\ r_1 \equiv zg,\ r_2 \equiv zg^2,\ r_3 \equiv zg^3 \text{ usw.} \qquad (\text{mod } n).$$

Die bei unserem Divisionsverfahren übrigbleibenden Reste $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$, die ja sämtlich kleiner als n sind, stellen also die kleinsten Reste der Zahlen

$$zg^0,\ zg^1,\ zg^2,\ zg^3 \text{ usw.}$$

für den Modul n dar. Weil nach unserer Voraussetzung z und g relativ prim zu n, sind es auch alle diese Reste. Die Anzahl der voneinander verschiedenen unter ihnen kann also nicht größer als $\varphi(n)$ sein, wo $\varphi(n)$ die Kap. I, § 12 B definierte Bedeutung hat. Wie nun schon Kap. I, § 12 C gezeigt, sind unter den Resten der aufeinanderfolgenden Potenzen von g wirklich voneinander verschieden die Reste

von $g^0, g^1, g^2, \ldots g^{t-1}$, wenn g zum Exponenten t für den Modul n gehört, d. h., wenn die t^{te} Potenz von g die niedrigste ist, für welche $g^t \equiv 1 \pmod{n}$. Man erkennt leicht, daß unter derselben Voraussetzung in bezug auf t auch die Reste von $zg^0, zg^1, zg^2, \ldots, zg^{t-1}$, d. h. die Zahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{t-1}$, voneinander verschieden sind, während $zg^t \equiv zg^0 \pmod{n}$, also $r_t = r_0$.

Die § 4 (S. 109 u. 110) definierte Zahl t ist also gleich dem Exponenten t, zu welchem g für den Modul n gehört, und die daselbst eingeführte Zahl s hat hier den Wert Null, so daß wir den Satz aussprechen können:

Wenn n relativ prim zu z und zu g, und wenn $z < n$, so ist der Bruch $\frac{z}{n}$ gleich einem echten rein-periodischen systematischen Bruche mit der Grundzahl g, dessen Periodenlänge gleich dem Exponenten t ist, zu welchem g für den Modul n gehört.

Die Periodenlänge ist also unabhängig von dem Zähler des Bruches, deshalb für alle Brüche mit dem gleichen Nenner dieselbe.

Aus den Auseinandersetzungen im Anfange dieses Paragraphen (S. 121) folgt nunmehr, daß, wenn n sowohl Primfaktoren enthält, die in g vorkommen, als auch solche, die in g nicht auftreten, und wenn γ, ν, α dieselbe Bedeutung haben wie S. 121, der Bruch $\frac{z}{n}$ einem gemischt-periodischen systematischen Bruche gleich ist, dessen Vorperiode α Ziffern besitzt, und dessen mit der $(\alpha+1)^{\text{ten}}$ Stelle beginnende Periode vollkommen durch den zu g teilerfremden Faktor ν von n bestimmt ist.

Nach Kap. I, § 12 C ist der Exponent t entweder gleich $\varphi(n)$ oder gleich einem Teiler von $\varphi(n)$. Will man die Periodenlänge des einem Bruche $\frac{z}{n}$ gleichen systematischen Bruches finden, ohne die (bei einigermaßen großem Nenner sehr mühselige) Division $z : n$ auszuführen, so hat man also zu untersuchen, welches der kleinste Teiler t von $\varphi(n)$ ist, für welchen $g^t \equiv 1 \pmod{n}$, und zu diesem Zwecke wirklich die kleinsten Reste aller derjenigen Potenzen von g zu bilden, deren Exponenten Teiler von $\varphi(n)$ sind. So folgt z. B. für $g = 10$ aus den Kongruenzen

$$10^1 \equiv 1 \qquad \pmod{3},$$

$$10^1 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^6 \equiv 1 \qquad \pmod{7},$$

$$10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 1 \qquad \pmod{11},$$

$$10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^6 \equiv 1 \qquad \pmod{13},$$

daß dem Nenner 3 die Periodenlänge 1, dem Nenner 11 die Periodenlänge 2, den Nennern 7 und 13 die Periodenlänge 6 entspricht.

Erleichtert und abgekürzt wird die Arbeit, namentlich für den Fall, daß der Nenner eine Primzahl p, t also gleich $p-1$ oder gleich einem Teiler von $p-1$ ist, durch gewisse Sätze und Methoden der Zahlentheorie[1]), auf die einzugehen aber nicht im Plane dieses Buches liegt. Näheres hierüber findet man bei Joseph Mayer, Über die Größe der Periode eines unendlichen Dezimalbruches, Programm der Königlichen Studienanstalt Burghausen für das Schuljahr 1887/88, München 1888, und bei H. Bork, Periodische Dezimalbrüche, Programmabhandlung des Prinz-Heinrich-Gymnasiums zu Berlin 1895. Dieser letzteren Arbeit ist als Anhang beigefügt eine von F. Keßler berechnete Tabelle, welche die Periodenlängen aller Primzahlen unter 100000 enthält. Kennt man die irgend welchen Primzahlen entsprechenden Periodenlängen, so läßt sich, wie wir nunmehr zeigen werden, leicht die Periodenlänge für jeden Nenner bestimmen, welcher das Produkt aus beliebigen Potenzen dieser Primzahlen ist. Es sei zunächst der Nenner eine Primzahlpotenz p^m.

Wenn die t^{te} Potenz von g die niedrigste ist, für welche $g^t \equiv 1 \pmod{p}$, so kann möglicherweise $g^t - 1$ nicht nur durch p, sondern auch durch eine höhere Potenz von p teilbar sein. Ist p^μ die höchste Potenz von p, welche in $g^t - 1$ aufgeht, so daß also für p^μ und für alle niedrigeren Potenzen von p die Zahl g zum Exponenten t gehört, so behaupten wir, es gehört g für den Modul p^m, falls $m \geqq \mu$, zum Exponenten $t \cdot p^{m-\mu}$. Nach unserer Voraussetzung ist

$$g^t = 1 + kp^\mu,$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet; infolgedessen

$$g^{2t} = 1 + 2kp^\mu + k^2p^{2\mu},$$

$$g^{3t} = 1 + 3kp^\mu + 3k^2p^{2\mu} + k^3p^{3\mu} \quad \text{usw.}$$

Da

$$2\mu \geqq \mu + 1,$$

können wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned} g^t &\equiv 1 + kp^\mu \\ g^{2t} &\equiv 1 + 2kp^\mu \\ g^{3t} &\equiv 1 + 3kp^\mu \end{aligned}\right\} \pmod{p^{\mu+1}}.$$

1) Nämlich die Lehre von den quadratischen, kubischen, biquadratischen usw. Resten einerseits und die Theorie der Indices andererseits (unter Benutzung einer Indextabelle, wie sie in dem von Jacobi 1839 herausgegebenen Canon arithmeticus enthalten ist).

Durch den Schluß von n auf $n+1$ (Kap. I, § 3 B, S. 10) ergibt sich sofort, daß für jeden ganzzahligen Wert von n

$$g^{nt} \equiv 1 + nkp^{\mu} \pmod{p^{\mu+1}}.$$

Addieren wir alle Kongruenzen, welche aus dieser entstehen, indem wir der Reihe nach $n = 0, 1, 2, \ldots p-2,\ p-1$ setzen, so erhalten wir:

$$1 + g^t + g^{2t} + \cdots + g^{(p-2)t} + g^{(p-1)t} \equiv p + kp^{\mu}(1 + 2 + \cdots + (p-2) + (p-1)) \pmod{p^{\mu+1}},$$

oder da nach Kap. 1, § 5 E, Zus. (S. 23)

$$1 + 2 + \cdots + (p-2) + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2},$$

so ist

$$1 + g^t + (g^t)^2 + \cdots + (g^t)^{p-2} + (g^t)^{p-1} \equiv p + \frac{k(p-1)}{2} p^{\mu+1} \pmod{p^{\mu+1}}.$$

Wenn wir vorläufig den Fall $p = 2$, den wir nachher besonders behandeln, ausschließen, ist $\frac{p-1}{2}$ eine ganze Zahl und deshalb

$$1 + g^t + (g^t)^2 + \cdots + (g^t)^{p-2} + (g^t)^{p-1} = p + l p^{\mu+1},$$

wo l eine ganze Zahl bedeutet.

Weil $\mu + 1 \geqq 2$, ist die linke Seite der Gleichung durch p, aber keine höhere Potenz von p teilbar. Erinnern wir uns weiter, daß p^{μ} die höchste Potenz ist, welche in $g^t - 1$ aufgeht, so können wir jetzt aus der Identität

$$(g^t)^p - 1 = (g^t - 1)[(g^t)^{p-1} + (g^t)^{p-2} + \cdots + g^t + 1]$$

schließen, daß $g^{tp} - 1$ durch $p^{\mu+1}$, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist.

Indem man die soeben angestellten Überlegungen mit der Abänderung wiederholt, daß g^{tp} an Stelle von g^t tritt und $p^{\mu+1}$ für p^{μ} sowie $p^{\mu+2}$ für $p^{\mu+1}$ gesetzt wird, findet man zunächst, daß die Summe

$$(g^{tp})^{p-1} + (g^{tp})^{p-2} + \cdots + g^{tp} + 1$$

durch p, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist, und schließt dann weiter unter Zuhilfenahme der identischen Gleichung

$$(g^{tp})^p - 1 = (g^{tp} - 1)[(g^{tp})^{p-1} + (g^{tp})^{p-2} + \cdots + g^{tp} + 1],$$

daß $p^{\mu+2}$ die höchste Potenz von p ist, welche in $g^{tp^2} - 1$ aufgeht.

Nehmen wir an, es wäre in gleicher Art schon bewiesen, daß $g^{tp^{\nu}} - 1$ durch $p^{\mu+\nu}$, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist, so finden wir durch abermalige Wiederholung derselben Schlüsse, wobei jetzt

nur g^t durch g^{tp^ν} und p^μ durch $p^{\mu+\nu}$ bezüglich $p^{\mu+1}$ durch $p^{\mu+\nu+1}$ zu ersetzen ist, daß $g^{tp^{\nu+1}}-1$ sich durch $p^{\mu+\nu+1}$, aber keine höhere Potenz von p teilen läßt.

Nach dem Satze von der vollständigen Induktion [Kap. I, § 3 B, S. 10] besitzt also tatsächlich für jeden ganzzahligen Wert von ν die Differenz $g^{tp^\nu}-1$ die soeben angegebene Eigenschaft. Substituieren wir noch $m-\mu$ für ν, so kommen wir demnach zum Resultat, daß $g^{tp^{m-\mu}}-1$ durch $p^{\mu+m-\mu}=p^m$, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, ob denn auch $g^{tp^{m-\mu}}$ die niedrigste Potenz von g ist, welche kongruent 1 (mod p^m). Der Exponent e dieser niedrigsten Potenz muß einerseits nach Kap. I, § 12 C, S. 64 ein Vielfaches von t oder t selbst sein, weil aus $g^e \equiv 1 \pmod{p^m}$ folgt, daß auch $g^e \equiv 1 \pmod{p}$. Andererseits muß aus gleichem Grunde e ein Teiler von $t \cdot p^{m-\mu}$ sein. Notwendig ist also e von der Form $t \cdot p^\lambda$, wo $0 \leqq \lambda \leqq m-\mu$. Nun haben wir vorher bewiesen, daß $g^{t\cdot p^\lambda}-1$ durch $p^{\mu+\lambda}$, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist. Wäre $\lambda < m-\mu$, also $\mu+\lambda < m$, so könnte $g^e - 1 = g^{t\cdot p^\lambda}-1$ nicht durch p^m teilbar sein.

Da ja aber $g^e \equiv 1 \pmod{p^m}$, so folgt $\lambda = m-\mu$ und $e = t\cdot p^{m-\mu}$, so daß wir jetzt den Satz aussprechen können:

Wenn g zum Exponenten t für den ungeraden Primzahlmodul p gehört, und wenn g^t-1 durch p^μ, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist, so gehört g für den Modul p^m, falls $m \geqq \mu$, zum Exponenten $t\cdot p^{m-\mu}$, falls aber $m \leqq \mu$, selbstverständlich zum Exponenten t.

Die Bedingung, daß g^t-1 durch p^μ, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist, können wir noch in eine etwas andere Form bringen. Bedeutet $\frac{z}{p}$ einen beliebigen echten Bruch mit dem Nenner p, so ist nach § 4, S. 116

$$\frac{z}{p} = \frac{Q_t}{g^t-1},$$

wo Q_t die als systematische Zahl geschriebene Periode bezeichnet; also

$$z\cdot(g^t-1) = p\cdot Q_t.$$

Da sich z nicht durch die Primzahl p teilen läßt, folgt aus dieser Gleichung, daß, wenn p^μ die höchste Potenz ist, die in g^t-1 aufgeht, Q_t durch $p^{\mu-1}$, aber keine höhere Potenz von p teilbar ist.

Für $g=10$ hat bei nahezu allen daraufhin untersuchten Primzahlen μ den Wert 1 und der einem gewöhnlichen Bruche mit dem Nenner p^m gleiche Dezimalbruch deshalb die Periodenlänge $t\cdot p^{m-1}$.

So gehört z. B. für $p = 11$ die Zahl 10 zum Exponenten 2; es ist $10^2 - 1 = 3 \cdot 3 \cdot 11$ durch 11, aber keine höhere Potenz von 11 teilbar, und die Periode 09 enthält den Faktor 11 gar nicht. Für $p = 7$ und für $p = 13$ ist $t = 6$; $10^6 - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ ist durch 7 und durch 13, aber keine höheren Potenzen dieser Primzahlen teilbar. Die dem Bruche $\frac{1}{7}$ entsprechende Periode 142857 enthält nicht den Faktor 7, die dem Bruche $\frac{1}{13}$ entsprechende Periode 076923 nicht den Faktor 13 usw. Eine Ausnahme macht aber gerade die kleinste ungerade Primzahl $p = 3$. Für diesen Modul gehört nämlich 10 zum Exponenten 1 und $10^1 - 1 = 9$ ist nicht nur durch 3, sondern auch durch 3^2 teilbar, für $p = 3$ (und $g = 10$) ist also $\mu = 2$ und die dem Nenner 3^m entsprechende Periodenlänge demnach 3^{m-2}. Als weitere Ausnahme ist im dekadischen System nur noch die Primzahl 487 bekannt, welche nach Desmarest (Théorie des nombres, Paris 1852, S. 295) außer 3 die einzige unter 1000 ist, für welche $\mu = 2$; so daß die Periode sowohl des Bruches $\frac{1}{487}$ wie auch die des Bruches $\frac{1}{487^2}$ 486stellig ist.

Läßt man für g andere Werte als 10 zu, so kann man allerdings eine ganze Reihe auch kleinerer Primzahlen angeben, bei denen $\mu > 1$. So haben wir z. B.

1. für $g = 18$ und $p = 7$:

$$18^1 \equiv 4, \quad 18^2 \equiv 2, \quad 18^3 \equiv 1 \qquad (\text{mod } 7),$$

18 gehört also für den Modul 7 zum Exponenten 3, und

$$18^3 - 1 = 7^3 \cdot 17$$

ist nicht nur durch 7, sondern durch 7^3 teilbar, so daß also $\mu = 3$ und in einem System mit der Grundzahl 18 die Perioden von $\frac{1}{7}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{7^3}$ 3stellig, die von $\frac{1}{7^{3+\lambda}}$ aber $3 \cdot 7^\lambda$stellig sind.

2. Für $g = 3$ und $p = 11$ ist

$$3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 5, \quad 3^4 \equiv 4, \quad 3^5 \equiv 1 \qquad (\text{mod } 11),$$

3 gehört also zum Exponenten 5 (mod 11) und, da $3^5 - 1 = 2 \cdot 11^2$, ist $\mu = 2$. Die Periode von $\frac{1}{11}$ und die von $\frac{1}{11^2}$ ist demnach 5stellig, die von $\frac{1}{11^{2+\lambda}}$ dagegen $5 \cdot 11^\lambda$ stellig. Weitere Beispiele findet man bei A. Holtze, Über periodische Dezimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlensystemen, Programm des Domgymnasiums zu Naumburg a. S., 1887. Vgl. auch Crelles Journal, Bd. 3, S. 301 u. Archiv für Math. u. Phys. (3) XIII, S. 107.

Bei dem Beweise des S. 126 stehenden Satzes hatten wir den Fall $p = 2$ ausgeschlossen. Dieser Wert von p kommt nicht in Betracht, wenn g gleich 10 oder überhaupt gleich einer geraden Zahl ist, weil ja p und g als relativ prim vorausgesetzt sind. Für ungerade Werte von g kann natürlich aber p auch gleich 2 sein, und der Fall $p = 2$ verlangt dann in der Tat eine besondere Behandlung. Das Ergebnis ist verschieden, je nachdem $g \equiv 1$ oder $g \equiv 3 \pmod 4$.

Es sei

1. $g = 4\gamma + 1$, wo γ irgend eine ganze Zahl bedeutet;

dann ist
$$g^1 \equiv 1 \pmod 2,$$
also
$$t = 1,$$
und
$$g^1 - 1 = 4\gamma$$

ist teilbar durch 2^μ, wo $\mu \geqq 2$.
$$g^2 - 1 = (g-1)(g+1) = 4\gamma \cdot 2 \cdot (2\gamma + 1)$$

ist teilbar durch $2^{\mu+1}$, aber keine höhere Potenz von 2.

Ferner ist
$$g^4 - 1 = (g^2 - 1)(g^2 + 1).$$

Da $g^2 \equiv 1 \pmod 4$, also $g^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, ist $g^2 + 1$ durch 2, aber keine höhere Potenz von 2, $g^{2^2} - 1$ also durch $2^{\mu+2}$, aber keine höhere Potenz von 2 teilbar. Ebenso erkennt man, daß
$$g^{2^3} - 1 = (g^4 - 1)(g^4 + 1)$$

sich durch $2^{\mu+3}$, aber keine höhere Potenz von 2 teilen läßt, und allgemein, daß $2^{\mu+\lambda}$ die höchste Potenz von 2 ist, welche in $g^{2^\lambda} - 1$ aufgeht. Setzt man nun noch $\lambda = m - \mu$, so folgt in derselben Weise wie S. 126, daß der daselbst für ungerade Primzahlen ausgesprochene Satz auch für $p = 2$ gilt.

Es sei

2. $$g = 4\gamma + 3,$$

wo γ wieder irgend eine ganze Zahl bedeutet.
$$g^1 - 1 = 4\gamma + 2$$

ist durch 2, aber keine höhere Potenz von 2 teilbar, deshalb
$$t = 1 \text{ und } \mu = 1.$$

Wenn $g+1=4(\gamma+1)$ durch 2^ϱ, wo $\varrho \geqq 2$, aber durch keine höhere Potenz von 2 teilbar ist, so folgt, daß in $g^2-1=(g-1)\cdot(g+1)$ $2^{\varrho+1}$, aber keine höhere Potenz von 2 aufgeht. Da $g^2 \equiv 1$, also $g^2+1 \equiv 2 \pmod 4$, läßt sich g^2+1 nur durch 2^1, $g^4-1=(g^2-1)(g^2+1)$ also durch $2^{\varrho+2}$, aber keine höhere Potenz von 2 teilen. In derselben Weise fortschließend, findet man, daß $g^{2^\lambda}-1$ durch $2^{\varrho+\lambda}$, aber keine höhere Potenz von 2 teilbar ist. Hieraus ergibt sich, indem man noch $\lambda = m-\varrho$ setzt, ähnlich wie S. 126 der Satz: Wenn $g \equiv 3 \pmod 4$ und wenn $g+1$ durch 2^ϱ, aber keine höhere Potenz von 2 teilbar ist ($\varrho \geqq 2$), so entspricht dem Nenner 2 eine 1ziffrige Periode, den Nennern $2^2, 2^3, \ldots 2^{\varrho+1}$ eine 2ziffrige Periode und dem Nenner 2^m, wenn $m \geqq \varrho+2$, eine $2^{m-\varrho}$ziffrige Periode.

Wir kommen nunmehr zu dem Fall, daß der Nenner n des in einen systematischen Bruch zu verwandelnden gewöhnlichen Bruches das Produkt mehrerer zueinander teilerfremden Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ ist (vgl. S. 124).

g gehöre für den Modul n_1 zum Exponenten t_1,
g „ „ „ „ n_2 „ „ t_2,
. . . .
g „ „ „ „ n_ν „ „ t_ν
und g „ „ „ „ $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_\nu$ zum Exponenten t.

Da aus $g^t \equiv 1 \pmod n$ die ν Kongruenzen folgen:

$$g^t \equiv 1 \pmod{n_1}, \quad g^t \equiv 1 \pmod{n_2}, \ldots g^t \equiv 1 \pmod{n_\nu},$$

muß nach Kap. I, § 12 C, S. 64 der Exponent t ein Vielfaches sowohl von t_1 wie von t_2 usw. wie von t_ν, also ein gemeinschaftliches Vielfaches von $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ sein. Jedes gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen ist aber ein Vielfaches des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (Kap. I, § 11 B). Kleiner als dieses kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $n_1, n_1, \ldots n_\nu$ kann also t keinesfalls sein. Wählen wir t ihm aber gleich, so ist g^t-1 sowohl durch n_1 wie durch $n_2, \ldots$ wie durch n_ν, also auch, weil $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ relativ prim, nach Kap. I, § 11 B durch $n = n_1 \cdot n_2 \ldots n_\nu$ teilbar. Wir können also den Satz aussprechen: Die Zahl t, zu welcher g für den Modul $n = n_1 \cdot n_2 \ldots n_\nu$ gehört, wenn $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ teilerfremde Zahlen bezeichnen, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Exponenten $t_1, t_2, \ldots t_\nu$, zu welchen g in bezug auf die Moduln $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ gehört.

Die Bedingung, daß die Faktoren $n_1, n_2, \ldots n_\nu$ relativ prim, ist sicher dann erfüllt, wenn sie Potenzen voneinander verschiedener Primzahlen sind.

Beispiele (im Dezimalsystem):

1. Dem Nenner 7 entspricht die Periodenlänge 6, dem Nenner 11 die Periodenlänge 2, also dem Nenner 77 die Periodenlänge 6.
2. Die dem Nenner $369 = 3^2 \cdot 41$ entsprechende Periodenlänge ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 1 und 5, also 5.
3. Die dem Nenner $297 = 3^3 \cdot 11$ entsprechende Periodenlänge ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 3 und 2, also 6 usw.

Während wir uns bisher mit der Untersuchung beschäftigt haben, welche Periodenlänge einem gegebenen Nenner entspricht, kann man nun auch umgekehrt sich die Frage vorlegen: welche Nenner n liefern systematische Brüche von gegebener Periodenlänge t? In anderen Worten: welche Zahlen n sind Teiler von $g^t - 1$, ohne Teiler von $g^\tau - 1$ zu sein, falls τ irgend eine ganze Zahl, die kleiner als t ist, bedeutet. Indem wir uns jetzt auf den Fall $g = 10$ beschränken, schließen wir aus den Zerlegungen[1]):

$$\begin{aligned}
10^1 - 1 &= 3^2, \\
10^2 - 1 &= 3^2 \cdot 11, \\
10^3 - 1 &= 3^3 \cdot 37, \\
10^4 - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 101, \\
10^5 - 1 &= 3^2 \cdot 41 \cdot 271, \\
10^6 - 1 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37, \\
10^7 - 1 &= 3^2 \cdot 239 \cdot 4649, \\
10^8 - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137, \\
10^9 - 1 &= 3^4 \cdot 37 \cdot 333667, \\
10^{10} - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091, \\
10^{11} - 1 &= 3^2 \cdot 21649 \cdot 513239, \\
10^{12} - 1 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 \quad \text{usw.},
\end{aligned}$$

daß die Periode

1) Vgl. Bernoulli, Recherche sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique

$$1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^T.$$

(Nouveaux mémoires de l'Académie Royale de Berlin 1771, S. 318); Reuschle, Neue zahlentheoretische Tabellen, Programm des Königl. Gymnasiums zu Stuttgart 1856, wo die Faktorenzerlegungen von $10^m - 1$ für eine ziemlich große Anzahl von Werten m mitgeteilt sind, und Bickmore, Nouvelles Annales (3) XV, S. 222—227.

1ziffrig ist für die Nenner 3, 9 (Teiler von 10^1-1),
2ziffrig für die Nenner 11, 33, 99 (Teiler von 10^2-1),
3ziffrig für die Nenner 27, 37, 111, 333, 999 (Teiler von 10^3-1),
4ziffrig für die Nenner 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999 (Teiler von 10^4-1),
5ziffrig für die Nenner 41, 123, 271, 369, 813, 2439, 11 111, 33 333, 99 999 (Teiler von 10^5-1),
6ziffrig für die Nenner 7, 13, 21, 39, 63, 77, 91, 117, 143, 189, 231, 259, 273, 297, 351, 407, 429, 481, 693, 777, 819, 1001, 1221, 1287, 1443, 2079, 2331, 2457, 2849, 3003, 3367, 3663, 3861, 4329, 5291, 6993, 8547, 9009, 10 101, 10 989, 12 987, 15 873, 25 641, 27 027, 30 303, 37 037, 47 619, 76 923, 90 909, 111 111, 142 857, 333 333, 999 999 (Teiler von 10^6-1)[1]).

§ 6. Rein periodische Brüche, welche aus gewöhnlichen Brüchen mit demselben Nenner, aber verschiedenen Zählern entstehen.

Die bei dem Divisionsverfahren, mittelst dessen wir S. 104 und S. 109 den gewöhnlichen Bruch $\frac{z}{n}$ (es werde wieder $z<n$ und n relativ prim zu z und zu g vorausgesetzt) in den periodischen systematischen Bruch $0,\overline{/q_1 q_2 \dots q_t}\dots$ umwandelten, auftretenden Reste r_0, $r_1, r_2, r_3, \dots r_{t-1}$ waren bezüglich die kleinsten Reste von z, zg, zg^2, $zg^3, \dots zg^{t-1}$ (mod n), insbesondere $r_0 = z$. Wenden wir dasselbe Divisionsverfahren auf den Bruch $\frac{r_1}{n}$ an, so erhalten wir, weil durch r_ν die Zahlen $r_{\nu+1}$ und $q_{\nu+1}$ und demnach alle r und alle q mit höherem Index eindeutig bestimmt sind, die Reste $r_1, r_2, r_3, \dots r_{t-1}, r_0$ und die Quotienten $q_2, q_3, q_4, \dots q_t, q_1$, so daß

$$\frac{r_1}{n} = 0,\overline{/q_2 q_3 q_4 \dots q_t q_1}\dots .$$

In derselben Weise ergibt sich:

$$\frac{r_2}{n} = 0,\overline{/q_3 q_4 q_5 \dots q_1 q_2}\dots$$

1) Die Nenner, welche 1—6ziffrige Perioden liefern, sind hier vollständig zusammengestellt, um als Material für Aufgaben (Verwandlungen gewöhnlicher Brüche in systematische) dienen zu können. Nenner, denen 7—12stellige Perioden entsprechen, lassen sich leicht aus den S. 130 mitgeteilten Faktorenzerlegungen von 10^7-1 bis $10^{12}-1$ bilden. Die obige Tabelle, welche die Exponenten gibt, zu denen 10 in bezug auf die in ihr enthaltenen Zahlen gehört, kann man auch zur Aufstellung von Teilbarkeitsregeln für diese Zahlen benutzen. Vgl. Kap. I, § 12 D.

usw., schließlich:

$$\frac{r_{t-1}}{n} = 0, \overline{{}' q_t q_1 q_2 \ldots q_{t-2} q_{t-1}} \ldots .$$

Die den Brüchen $\frac{z}{n}, \frac{r_1}{n}, \frac{r_2}{n}, \ldots \frac{r_{t-1}}{n}$ entsprechenden Perioden erhält man, wenn man die Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots q_t$ an den Umfang eines Kreises schreibt und diesen stets in derselben Richtung durchläuft, indem man zuerst mit q_1, dann mit q_2 usw., endlich mit q_t beginnt. Den Übergang von einer der Perioden zu einer anderen bezeichnet man deshalb als zyklische Vertauschung der Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots q_t$. Wir können demnach den Satz aussprechen:

Alle periodischen systematischen Brüche, deren Perioden durch zyklische Vertauschung aus der Periode des Bruches $\frac{z}{n}$ entstehen, sind gleich gemeinen Brüchen, deren Nenner n und deren Zähler die kleinsten Reste von $z, zg, zg^2, \ldots zg^{t-1}$ (mod n) sind.

Nach Kap. I, § 12 C (S. 65) ist t entweder gleich $\varphi(n)$ oder gleich einem Teiler von $\varphi(n)$. Falls $t = \varphi(n)$, so stellen die kleinsten Reste von $z, zg, zg^2, \ldots zg^{t-1}$ (mod n) die sämtlichen $\varphi(n)$ Zähler dar, welche kleiner als n und relativ prim zu n sind. So ist beispielsweise bei $g = 10$ für den Nenner $n = 7$ die Zahl $t = 6$, und deshalb ergeben sich durch zyklische Vertauschung aus

$$0, \overline{/142\,857} \ldots = \frac{1}{7}$$

die sämtlichen Brüche mit dem Nenner 7, deren Zähler kleiner als 7 sind, nämlich:

$$0, \overline{{}'428\,571} \ldots = \frac{3}{7}, \text{ weil } 3 \equiv 1 \cdot 10^1 \pmod 7,$$

$$0, \overline{{}'285\,714} \ldots = \frac{2}{7}, \text{ weil } 2 \equiv 1 \cdot 10^2 \pmod 7,$$

$$0, \overline{{}'857\,142} \ldots = \frac{6}{7}, \text{ weil } 6 \equiv 1 \cdot 10^3 \pmod 7,$$

$$0, \overline{{}'571\,428} \ldots = \frac{4}{7}, \text{ weil } 4 \equiv 1 \cdot 10^4 \pmod 7,$$

$$0, \overline{{}'714\,285} \ldots = \frac{5}{7}, \text{ weil } 5 \equiv 1 \cdot 10^5 \pmod 7.$$

Wenn t nicht gleich $\varphi(n)$, sondern gleich einem Teiler von $\varphi(n)$ ist, so gibt es außer den kleinsten Resten von $z, zg, zg^2, \ldots zg^{t-1}$ noch andere Zahlen, welche kleiner als n und relativ prim zu n sind. Bezeichnet z' eine solche, so liefert der Bruch $\frac{z'}{n}$ eine andere $t$ziffrige

Periode, aus welcher in gleicher Weise, nämlich auch durch zyklische Vertauschung, sich die Perioden derjenigen Brüche herleiten lassen, deren Zähler die kleinsten Reste von $z'g$, $z'g^2$, ... $z'g^{t-1}$ sind[1]). Erschöpfen auch diese noch nicht die Gesamtheit der Zahlen, welche relativ prim zu n und kleiner als n sind, und ist z'' ein von den bisherigen verschiedener Zähler, so erhält man durch zyklische Vertauschung aus der Periode des Bruches $\frac{z''}{n}$ wieder die Perioden derjenigen Brüche, deren Zähler die kleinsten Reste von $z''g$, $z''g^2$,... $z''g^{t-1}$ sind, usw. Da je t Zähler Perioden liefern, die durch zyklische Vertauschung auseinander ableitbar sind, gibt es für die Gesamtheit der irreduktiblen[2]) Brüche mit dem Nenner n im ganzen $\frac{\varphi(n)}{t}$ voneinander wesentlich verschiedene t-gliedrige Perioden.

So ist z. B. für den Nenner $n = 39$ die Zahl

$$\varphi(39) = \varphi(3) \cdot \varphi(13) = 2 \cdot 12 = 24.$$

Der Exponent t, zu welchem 10 für den Modul 39 gehört, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 1 und 6, zu welchen 10 für die Moduln 3 bezüglich 13 gehört, also $t = 6$. Die 24 Brüche mit dem Nenner 39, deren Zähler zu 39 relativ prim sind, ergeben demnach im ganzen $\frac{24}{6} = 4$ verschiedene 6ziffrige Perioden.

Der	Zyklus	025 641	gehört	zu	den	Zählern	1,	10,	22,	25,	16,	4,
"	"	051 282	"	"	"	"	2,	20,	5,	11,	32,	8,
"	"	948 717	"	"	"	"	37,	19,	34,	28,	7,	31,
"	"	974 358	"	"	"	"	38,	29,	17,	14,	23,	35.

Gauß, welcher in den Art. 312—318 seiner Disquisitiones Arithmeticae die Ergebnisse seiner zahlentheoretischen Untersuchungen auf die Umwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche angewendet hat, gibt im Anhange der Disquisitiones Arithmeticae eine Tabelle, welche die Perioden aller Brüche enthält, deren Nenner Primzahlen oder Primzahlpotenzen unter 100 sind. Aus dem Nachlaß von Gauß ist im 2. Bande der Gesammelten Werke (S. 411—434) die Tabelle bis zu den Primzahlen und Primzahlpotenzen unter 1000 fortgesetzt. Da, wie wir später[3]) sehen werden, ein Bruch, dessen Nenner

1) Daß alle diese Reste voneinander und von den Resten von z, zg, zg^2,... zg^{t-1} verschieden sind, ist Kap. I, § 12 C gezeigt.

2) D. h. derjenigen, welche sich nicht durch Heben auf einen Bruch mit kleinerem Nenner reduzieren lassen.

3) Kap. V, § 4 D.

das Produkt aus mehreren zueinander teilerfremden Zahlen ist, immer als Summe oder Differenz von Brüchen dargestellt werden kann, deren Nenner die einzelnen Faktoren sind, dient die Gaußsche Tabelle zur Periodenbestimmung jedes Bruches, dessen Nenner das Produkt irgend welcher Primzahlpotenzen unter 1000 ist. In der Programmabhandlung des Gymnasiums zu Baden-Baden vom Jahre 1898 hat J. Sachs die zu allen Nennern bis 250 gehörigen Perioden zusammengestellt[1]).

§ 7. Symmetrischer Bau gewisser Perioden.

Auf alle interessanten Eigentümlichkeiten der periodischen systematischen Brüche einzugehen, würde zu weit führen; wir wollen hier nur noch von einer handeln, welche sich schon bei vielen einfachen Beispielen der Beobachtung aufdrängt.

Ist der Exponent t, zu welchem g in bezug auf den Modul n gehört, eine gerade Zahl 2τ, so ist der (wieder als irreduktibel vorausgesetzte) Bruch

$$\frac{z}{n} = \frac{Q_t}{g^t - 1} = \frac{A g^\tau + B}{(g^\tau - 1)(g^\tau + 1)},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$A = q_1 g^{\tau-1} + q_2 g^{\tau-2} + \cdots + q_{\tau-1} g + q_\tau,$$
$$B = q_{\tau+1} g^{\tau-1} + q_{\tau+2} g^{\tau-2} + \cdots + q_{2\tau-1} g + q_{2\tau}.$$

Daraus folgt weiter:

$$z \cdot \frac{g^\tau + 1}{n} = \frac{A g^\tau + B}{g^\tau - 1}$$

oder

$$z \cdot \frac{g^\tau + 1}{n} = A + \frac{A + B}{g^\tau - 1}.$$

Allemal dann, aber auch nur dann, wenn $\frac{g^\tau + 1}{n}$ eine ganze Zahl ist, gilt dasselbe auch von der rechten Seite der Gleichung, also auch von $\frac{A+B}{g^\tau - 1}$. Da nun jede der beiden ganzen Zahlen A, B sicher kleiner ist als $g^\tau - 1$ (die Periode kann nicht aus lauter Ziffern $\overline{g-1}$ bestehen, weil in diesem Falle t gleich der ungeraden Zahl 1 wäre),

1) Im zweiten Teile dieser Programmarbeit werden die Dezimalbruch-Entwicklungen aller Brüche, nach ihrer Größe geordnet, deren Nenner $\leqq 250$ sind, bis auf 7 Stellen mitgeteilt.

muß $A + B < 2(g^\tau - 1)$ sein. Wenn also $\frac{A+B}{g^\tau - 1}$ eine ganze Zahl ist, kann es nur die Zahl 1 sein, und es folgt

$$A + B = g^\tau - 1,$$

d. h. $A + B$ ist gleich der aus τ Ziffern $(g - 1)$ bestehenden Zahl. Das ist aber nur dann möglich, wenn gleichzeitig

$$\begin{aligned} q_1 + q_{\tau+1} &= g - 1, \\ q_2 + q_{\tau+2} &= g - 1, \\ &\cdots\cdots \\ q_\tau + q_{2\tau} &= g - 1 \end{aligned}$$

ist. Wir kommen also zu dem Ergebnis:

Wenn der Exponent t, zu welchem g in bezug auf den Modul n gehört, eine gerade Zahl ist, und wenn $g^{\frac{1}{2}t} + 1$ sich durch n teilen läßt, zerfällt die Periode jedes Bruches, dessen Nenner gleich n und dessen Zähler zu n relativ prim ist, in zwei aus gleich viel Ziffern bestehende Teile derart, daß je eine Ziffer des ersten Teils und die an entsprechender Stelle stehende Ziffer des zweiten Teils die Summe $g - 1$ (bei Dezimalbrüchen also die Summe 9) ergeben.

Nebenbei folgt für solche Nenner n, die den Bedingungen dieses Satzes genügen:

$$\frac{z \cdot (g^\tau + 1)}{n} = A + 1,$$

so daß der Wert des periodischen systematischen Bruches

$$\frac{z}{n} = \frac{A+1}{g^{\frac{1}{2}t} + 1} \text{ wird.}$$

Es fragt sich jetzt nur noch, wann ist die Bedingung

$$g^{\frac{1}{2}t} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

erfüllt?

1. Es sei n gleich einer beliebigen Primzahl p, in bezug auf welche g zu einem geraden Exponenten t gehört. Da nach dieser Voraussetzung $g^t - 1$, aber nicht schon $g^{\frac{1}{2}t} - 1$ durch p teilbar ist, folgt aus der Gleichung:

$$g^t - 1 = (g^{\frac{1}{2}t} - 1)(g^{\frac{1}{2}t} + 1),$$

daß $g^{\frac{1}{2}t} + 1$ durch p teilbar sein muß.

2. Es sei $n = p^m$, gleich einer beliebigen Potenz einer ungeraden Primzahl. Gehört g in bezug auf die Primzahl p selber zum

Exponenten t', so hat der Exponent t, zu welchem g in bezug auf p^m gehört, die Form $t = t'p^\lambda$, wo λ Null oder eine ganze Zahl bedeutet (§ 5, S. 126). Wenn t gerade sein soll, so muß dasselbe auch von t' gelten. Nun ist

$$g^t - 1 = \left(g^{\frac{1}{2}t'p^\lambda} - 1\right)\left(g^{\frac{1}{2}t'p^\lambda} + 1\right).$$

Wenn der erste Faktor der rechten Seite durch p teilbar wäre, so müßte der Exponent $\frac{1}{2}t'p^\lambda$ ein Vielfaches von t' sein, wir hätten also

$$t'p^\lambda = 2t'\mu,$$

wo μ irgend eine ganze Zahl bedeutet, oder

$$p^\lambda = 2\mu.$$

Eine solche Gleichung kann aber nicht bestehen, weil p als ungerade vorausgesetzt ist. Also ist der erste Faktor nicht durch p teilbar, deshalb der zweite, $g^{\frac{1}{2}t} + 1$, teilbar durch $n = p^m$.

Für den Fall also, daß der Nenner n eine Primzahl oder eine beliebige Potenz einer ungeraden Primzahl ist, in bezug auf welche g zu einem geraden Exponenten gehört, gilt der S. 135 stehende Satz stets, d. h. ein solcher Nenner n ergibt immer eine aus zwei symmetrischen Hälften bestehende Periode.

So ist z. B. im Dezimalsystem

$$\frac{1}{19} = 0,\overline{052\ 631\ 578 \,\|\, 947\ 368\ 421}\ldots$$

und die Summe je zweier entsprechenden Ziffern tatsächlich

$$\begin{aligned} 0 + 9 &= 9, \\ 5 + 4 &= 9, \\ 2 + 7 &= 9 \text{ usw.}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{121} = 0,\overline{008\ 264\ 462\ 80 \,\|\, 991\ 735\ 537\ 19}\ldots,$$

$$\begin{aligned} 0 + 9 &= 9, \\ 0 + 9 &= 9, \\ 8 + 1 &= 9 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Es kann aber auch noch in anderen Fällen $g^{\frac{1}{2}t} + 1$ durch n teilbar sein. Wenn $n = 2^m$, so ist nicht immer $g^{\frac{1}{2}t} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Auf die (durchaus nicht schwierige) Aufstellung der hierfür erforder-

lichen Bedingungen wollen wir aber hier der Kürze wegen verzichten, zumal ja in dem uns vornehmlich interessierenden Falle $g = 10$ die Möglichkeit, daß $n = 2^m$, ausgeschlossen ist. Ebensowenig wollen wir näher auf die Prüfung der Bedingungen eingehen, unter denen für eine aus verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzte Zahl n die Kongruenz $g^{\frac{1}{2}t} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ besteht. Wir verweisen deswegen auf die schon zitierte Programmabhandlung von A. Holtze (Domgymnasium zu Naumburg a. S., Ostern 1887): „Über periodische Dezimalbrüche und ihr Analogon in anderen Zahlensystemen."

Als Beispiel für zusammengesetzte Zahlen, für welche die erwähnte Kongruenz im Dezimalsystem gültig ist, nennen wir nur noch die Zahlen von der Form $n = 11 \cdot p$, wo p eine von 11 verschiedene Primzahl bedeutet, in bezug auf welche 10 zu einem Exponenten 2τ gehört, der zwar durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist; z. B. $p = 7$, wo $2\tau = 6$; $p = 13$, wo $2\tau = 6$, oder $p = 19$, wo $2\tau = 18$. Da 10 in bezug auf 11 zum Exponenten 2 gehört, so ist für $n = 11 \cdot p$ der Exponent $t = 2\tau$. Nun ist $10^\tau - 1$ nicht durch p und, weil τ eine ungerade Zahl ist, auch nicht durch 11 teilbar, also muß $10^\tau + 1$ durch $n = 11 \cdot p$ teilbar sein, und tatsächlich ergeben z. B. die Nenner 77, 143, 209 aus zwei gleich langen Teilen bestehende Perioden, deren entsprechende Ziffern sich zu 9 ergänzen.

§ 8. Das Rechnen mit Näherungswerten.

A. Einleitung.

Wir haben bereits in § 4 dieses Kapitels (S. 119 u. 120) gesehen, daß man, wenn irgendwelche Rechnungen mit unendlichen periodischen systematischen Brüchen vorzunehmen sind, da man doch nur mit einer endlichen Anzahl von Stellen wirklich operieren kann, den unendlichen Bruch durch einen Näherungswert ersetzen muß.

Bezeichnet P den Wert eines periodischen systematischen Bruches, und sind $q_1, q_2, \dots q_n$ die n ersten Bruchstellen, so ist nach § 4

$$q_0, q_1 q_2 \dots q_n < P < q_0, q_1 q_2 \dots (q_n + 1).$$

Wählt man willkürlich einen der beiden endlichen systematischen Brüche als Näherungswert für P, so beträgt der Fehler höchstens $\frac{1}{g^n}$, bezüglich $\frac{1}{10^n}$, wenn wir uns, wie es in diesem Paragraphen durchgehends geschehen soll, auf den speziellen Wert $g = 10$, d. h. auf Dezimalbrüche beschränken. Man kann den möglichen Fehler noch auf die Hälfte herabdrücken, wenn man, falls $q_{n+1} < 5$, den unteren

Näherungswert und, falls $q_{n+1} \geqq 5$, den oberen Näherungswert wählt; denn im ersten Falle ist

$$q_0, q_1 q_2 \ldots q_n 0 < P < q_0, q_1 q_2 \ldots q_n 5,$$

im zweiten

$$q_0, q_1 q_2 \ldots q_n 5 \leqq P < q_0, q_1 q_2 \ldots (q_n + 1) 0$$

und der mögliche Fehler höchstens

$$\frac{5}{10^{n+1}} = \frac{0,5}{10^n}.$$

Später[1]) werden wir auch anderen als periodischen unendlichen Dezimalbrüchen eine Bedeutung beilegen und zeigen, daß, wenn man einen solchen nichtperiodischen unendlichen Dezimalbruch in derselben Weise mit der n^{ten} Stelle abbricht, die Abweichung von dem noch zu definierenden wahren Werte ebenfalls höchstens eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Stelle beträgt.

Wenn man mit solchen Näherungswerten irgend welche Rechnungen ausführt, wird man natürlich auch kein absolut genaues Resultat erzielen. In fast allen Aufgaben der angewandten Mathematik kommt es aber auch gar nicht auf ein solches als vielmehr darauf an, daß der Fehler eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Hat z. B. das Ergebnis einer Rechnung die Benennung „Mark", so wünscht man von der resultierenden Zahl, da Bruchteile von Pfennigen nicht zu realisieren sind, nur die beiden ersten Dezimalstellen, diese allerdings möglichst mit keinem größeren Fehler als einer halben Einheit der zweiten Stelle.

Es erhebt sich daher die Frage: Wie weit hat man die Genauigkeit bei den in die Rechnung eingehenden Zahlen zu treiben, und wie ist die Rechnung selbst einzurichten, um das Resultat unter Vermeidung jedes unnützen Arbeitsaufwandes auf eine bestimmte Anzahl von Stellen so genau zu erhalten, daß der Fehler eine gewisse Grenze nicht überschreitet?

Während wir bisher von Rechenoperationen mit Zahlen sprachen, die zwar von den eigentlich zu benutzenden abwichen, aber um einen Betrag, den wir beliebig klein machen können, indem wir eben hinreichend viele Dezimalstellen beibehalten, treten bei den Aufgaben der angewandten Mathematik auch Zahlen in die Rechnung ein, die mit einem Fehler behaftet sind, den unter eine beliebige Grenze herabzudrücken nicht in unserer Macht liegt. Es gilt dies z. B. von den Ergebnissen aller physikalischen Beobachtungen, von denen wir nie-

1) Kap. VI.

mals, wie sorgfältig sie auch angestellt werden mögen, mit Sicherheit behaupten können, daß sie absolut genau seien, bei denen wir uns vielmehr begnügen müssen, festzustellen, daß der Fehler eine gewisse, von der Art des Versuchs abhängige Größe nicht überschreitet. Wenn mit derartigen, aus Beobachtungen stammenden Zahlen irgend welche Rechnungen ausgeführt werden, so können die Resultate selbstverständlich nicht genau sein, und es ist uns auch nicht möglich, den Fehler beliebig klein zu machen. Für diesen Fall ergibt sich die Aufgabe, festzustellen, welche Genauigkeit das Resultat nur besitzen kann, und wie weit man einerseits die Zahlen der zuerst besprochenen Art, die etwa auch noch in die Rechnung eingehen, und andererseits die Rechnung selbst abkürzen darf, ohne die durch die Ungenauigkeit der Daten doch einmal bedingte Fehlergrenze noch merklich zu überschreiten. Eine erschöpfende Erledigung der hier aufgeworfenen Fragen liegt nicht im Plane dieses Buches. Wir werden uns darauf beschränken, die Hauptgesichtspunkte hervorzuheben, sowie die einfachsten und wichtigsten Fälle, diese allerdings möglichst eingehend, zu erörtern. Für das übrige müssen wir auf die Spezialliteratur[1]) verweisen.

Wir wenden uns zunächst zur Behandlung der ersten der beiden gekennzeichneten Aufgaben.

B. Das Rechnen mit solchen Näherungswerten, die man durch irgend einen Algorithmus auf beliebig viele Stellen erhalten kann.

I. Addition.

Wünscht man die Summe von n Dezimalzahlen bis auf m Stellen nach dem Komma, so behalte man zunächst in jedem Summanden $m+\mu$ Stellen bei, so daß sein Fehler $\leqq \frac{0{,}5}{10^{m+\mu}}$ oder $\leqq \frac{0{,}5}{10^{\mu}} \cdot \frac{1}{10^m}$ ist. Da bei der Addition der Näherungswerte sich, wenigstens im ungünstigsten Falle, die Fehler sämtlich addieren können, ist die Grenze für den Fehler der n-gliedrigen Summe $\frac{n \cdot 0{,}5}{10^{\mu}} \cdot \frac{1}{10^m}$. Durch Vergrößerung von μ kann diese Fehlergrenze beliebig klein gemacht werden. Wird nur verlangt, daß der Fehler nicht eine Einheit der m^{ten} Stelle überschreitet, und ist $n \leqq 20$, so genügt schon der Wert $\mu = 1$. Darf

1) Namentlich J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900. Von den übrigen hierher gehörigen Schriften zitieren wir nur noch die betreffenden Abschnitte in J. Tannery, Leçons d'arithmétique théorique et pratique, Paris, 2 éd. 1900; J. Grieß, Approximations numériques, Paris 1898; E. Kullrich, Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung, Programm der Realschule zu Schöneberg 1898.

aber bei gleicher Voraussetzung über die Anzahl der Summanden der Fehler höchstens $\frac{1}{10}$ Einheit der m^{ten} Stelle sein, so hat man $\mu = 2$ zu wählen. Diese Fehlergrenze bezieht sich auf die $(m + \mu)$ stellige Summe. Bei Aufgaben des praktischen Rechnens darf man aber gar nicht etwa beliebig viele Stellen beibehalten. Wenn z. B. die Einer die Benennung „Mark" haben, so muß man hinter der zweiten Dezimalstelle abbrechen, weil ein kleinerer Geldbetrag als 1 Pfennig nicht gezahlt werden kann, und wenn die Einer etwa „Kilogramm" sind und mit den vorhandenen Mitteln (Wagschale und Gewichtssätzen) kleinere Mengen als 1 Milligramm nicht abgewogen werden können, so darf man nicht mehr als 6 Stellen hinter dem Komma beibehalten. Bei der Reduktion von $m + \mu$ auf m Stellen tritt aber ein neuer Fehler hinzu, der von dem Werte der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Stelle abhängt. Die folgende kleine Tabelle gibt für jeden möglichen Wert der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Stelle die obere Grenze des hinzukommenden Fehlers an:

Wert der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Stelle.	Obere Grenze des hinzukommenden Fehlers.
0 oder 9	$\frac{0,1}{10^m}$
1 oder 8	$\frac{0,2}{10^m}$
2 oder 7	$\frac{0,3}{10^m}$
3 oder 6	$\frac{0,4}{10^m}$
4 oder 5	$\frac{0,5}{10^m}$

Diesen Fehler beliebig klein zu machen, liegt nicht in unserer Macht. Wenn wir durch passende Wahl von μ [vgl. vorige Seite] bewirkt haben, daß der erste Fehler höchstens $\frac{0,1}{10^m}$ beträgt, so ist der Gesamtfehler, je nach dem Werte der $(m + 1)^{\text{ten}}$ Dezimale, höchstens

$$\frac{0,2}{10^m}, \text{ bezüglich } \frac{0,3}{10^m}, \ \frac{0,4}{10^m}, \ \frac{0,5}{10^m} \ \text{ oder } \ \frac{0,6}{10^m}.$$

Im Falle die $(m + 1)^{\text{te}}$ Stelle eine 4 oder eine 5 ist, können wir es also auf keine Weise und wenn wir μ noch so groß wählen, dahin bringen, daß die obere Fehlergrenze nur eine halbe Einheit der m^{ten}

Stelle ausmacht. Dagegen können wir mit Sicherheit behaupten, daß, wenn wir jedem Summanden (vorausgesetzt, daß ihre Anzahl nicht größer als 20 ist) zwei Überstellen geben und nach der Addition die $(m+2)$ stellige Summe auf m Stellen reduzieren, der Fehler auf jeden Fall kleiner ist als $\frac{0,6}{10^m}$, also a fortiori kleiner als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle.

II. Für die **Subtraktion** gilt dasselbe wie für die Addition.

III. **Multiplikation.**

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, zwei Dezimalzahlen A, B, deren jede bis auf beliebig viele Stellen ermittelt werden kann, so miteinander zu multiplizieren, daß das Produkt eine vorgeschriebene Anzahl (m) Stellen mit einem möglichst kleinen Fehler enthält, und daß jeder für die gewünschte Genauigkeit unnütze Rechnungsaufwand vermieden wird. Die Multiplikation wird (I. Kap., § 10 E u. III. Kap., § 3 C) ausgeführt, indem man den Multiplikanden A mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators B multipliziert und die erhaltenen Teilprodukte addiert. Da man den Stellenwert der einzelnen Ziffern eines Produktes am schnellsten übersieht, wenn man mit Einern multipliziert, so ist es zweckmäßig, die beiden gegebenen Zahlen A, B zunächst so umzuformen, daß der Multiplikator B gerade eine Stelle vor dem Komma hat. Man erreicht das, indem man in der ursprünglichen Zahl B das Komma eine Anzahl Stellen nach rechts oder links rückt und, um den Wert des Produktes nicht zu ändern, im Multiplikanden A es um ebenso viele Stellen in der entgegengesetzten Richtung verschiebt. Das Endresultat ergibt sich durch Addition so vieler Teilprodukte, wie wir Ziffern des Multiplikators für die Rechnung verwendet haben. Da bei dieser Addition sich die Fehler der Teilprodukte sämtlich addieren können, so müssen wir, um das Gesamtprodukt auf m Dezimalstellen mit einem möglichst kleinen Fehler zu erhalten, die Teilprodukte auf mehr als m, etwa $m+\mu$ Stellen (vgl. I, Addition) berechnen, wo μ einen noch zu bestimmenden Wert hat. Gäbe man nun beim Beginn der Rechnung dem Multiplikanden auch gerade nur $m+\mu$ Stellen hinter dem Komma, so könnte im ersten Teilprodukte, das durch Multiplikation mit den Einern des Multiplikators erhalten wird, der Fehler im ungünstigsten Falle $\frac{0,5}{10^{m+\mu}} \cdot 9 = 4,5$ Einheiten der $(m+\mu)^{\text{ten}}$ Stelle betragen. Um diesen Fehler zu verkleinern, brechen wir den Multiplikanden erst nach der $(m+\mu+\mu')^{\text{ten}}$ Stelle (natürlich immer unter event. Erhöhung der letzten beibehaltenen Stelle) ab, so daß die Fehlergrenze des entstehenden Produktes

$$\frac{4,5}{10^{\mu'}} \cdot \frac{1}{10^{m+\mu}}$$

ist. Indem wir dann die $(m + \mu + \mu')$ stellige Zahl auf $m + \mu$ Stellen reduzieren, kommt aber ein Fehler hinzu (vgl. I, Addition), der im ungünstigsten Falle, wenn nämlich die $(m + \mu + 1)^{\text{te}}$ Stelle eine 4 oder eine 5 ist, $\frac{0,5}{10^{m+\mu}}$ betragen kann, und den zu verkleinern nicht in unserer Macht liegt. Da infolgedessen der Gesamtfehler des $(m + \mu)$ stelligen Teilproduktes, $\left(\frac{4,5}{10^{\mu'}} + 0,5\right)\frac{1}{10^{m+\mu}}$, doch nicht auf jeden Fall, wie groß wir μ' auch wählen mögen, geringer als eine halbe Einheit der $(m + \mu)^{\text{ten}}$ Stelle gemacht werden kann, begnügen wir uns damit, die Fehlergrenze auf eine Einheit der letzten Stelle herabzudrücken, und dazu reicht schon der Wert $\mu' = 1$ aus. Man kürze also bei Beginn der Rechnung den Multiplikanden auf $m + \mu + 1$ Stellen ab, so daß er die Form hat

$$A = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n + \frac{a'}{10}}{10^{m+\mu}} = \frac{A'}{10^{m+\mu}},$$

während der Multiplikator ist

$$B = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots.$$

Multipliziert man jetzt A' [1]) mit den Einern des Multiplikators, d. h. bildet man das Teilprodukt

$$\left(a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n + \frac{a'}{10}\right) \cdot b_0$$

und reduziert im Kopfe sogleich auf Ganze, so ist auch im ungünstigsten Falle der Fehler des Teilproduktes $A' \cdot b_0$ kleiner als $\frac{0,5}{10} \cdot 9 + 0,5$, also sicher kleiner als 1. Bei der Multiplikation mit $\frac{b_1}{10}$ kann man das letze Glied $\frac{a'}{10}$ des Multiplikanden fortlassen, indem man, falls $a' \geqq 5$, a_n auf $a_n + 1$ erhöht, und trotzdem gewiß sein, daß, wenn man sogleich wieder das Teilprodukt auf Ganze abkürzt, der Fehler kleiner als 1 bleibt. Multipliziert man nun mit $\frac{b_2}{10^2}$, so streicht man die Ziffer a_n des Multiplikanden usw., bis schließlich $\frac{b_n}{10^n}$ nur noch mit $a_1 \cdot 10^{n-1}$ zu multiplizieren ist, nachdem man eventuell, wenn nämlich $a_2 \geqq 5$, a_1 durch $a_1 + 1$ ersetzt hat. In jedem Teilprodukte ist der Fehler kleiner als 1, in der Summe der $(n + 1)$ Teilprodukte

1) Der Ersatz von A durch A', d. h. die Auffassung der Ziffern in der $(m + \mu)^{\text{ten}}$ Dezimalstelle von A als Einer, bezweckt hier nur eine kürzere und bequemere Ausdrucksweise.

also auf jeden Fall kleiner als $n+1$. Dieser Fehler rührt von der Abkürzung des Multiplikanden her. Brechen wir aber den Multiplikator mit der Ziffer $\frac{b_n}{10^n}$ ab, so lassen wir das Produkt

$$A' \cdot \left(\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots\right)$$

gänzlich fort. Da jedoch

$$A' < 10^n \quad \text{und} \quad \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots < \frac{1}{10^n},$$

so ist der durch Abkürzung des Multiplikators entstehende Fehler kleiner als $10^n \cdot \frac{1}{10^n} = 1$, der Gesamtfehler des auf die angegebene Weise gebildeten und auf Ganze reduzierten Produktes $A' \cdot B$ also kleiner als $n+2$ und der des $(m+\mu)$ stelligen Produktes $A \cdot B$ kleiner als $\frac{n+2}{10^{m+\mu}}$. Indem man dasselbe zum Schluß auf m Stellen reduziert, kommt noch ein Fehler hinzu, der höchstens $\frac{0{,}5}{10^m}$ betragen kann (siehe I, Addition). Der mögliche Fehler des m stelligen Produktes ist also kleiner als $\left(\frac{n+2}{10^\mu} + 0{,}5\right)\frac{1}{10^m}$. Den ersten Summanden der Klammer können wir, durch passende Wahl von μ, beliebig klein machen, nicht aber den zweiten. Wir können es also nicht auf jeden Fall erreichen, daß der Fehler kleiner als eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Stelle wird. Begnügen wir uns damit, die Fehlergrenze auf eine Einheit der m^{ten} Stelle herabzudrücken, so brauchen wir μ nur so zu bestimmen, daß $\frac{n+2}{10^\mu} \leqq \frac{1}{2}$. Für $n \leqq 3$ würde schon der Wert $\mu = 1$ ausreichen. Um aber durch eine Regel alle in der Praxis vorkommenden Fälle umfassen zu können, wählen wir $\mu = 2$, was für alle Werte von n, die $\leqq 48$, genügt. Aus den vorstehenden Erörterungen ergibt sich demnach für die im Anfange der Nr. III (S. 141) gestellte Aufgabe die folgende Lösung:

Sollen zwei Dezimalzahlen, deren jede man auf beliebig viele Stellen angeben kann, so multipliziert werden, daß das Produkt m Stellen hinter dem Komma besitzt und der mögliche Fehler höchstens eine Einheit der letzten Stelle beträgt, so setze man zunächst im Multiplikator das Komma hinter die erste, von Null verschiedene Ziffer, verschiebe im Multiplikanden das Komma um genau ebenso viele Stellen wie im Multiplikator, aber nach der entgegengesetzten Richtung, und behalte zunächst im Multiplikanden hinter dem Komma $m+3$ Stellen und im Multiplikator so viele Dezimalen bei, daß Multiplikand und Multiplikator im ganzen gleichviel

Stellen besitzen. Man beginnt die Multiplikation mit der ersten Stelle, den Einern, des Multiplikators und reduziert das erhaltene, zunächst $(m+3)$ stellige, Teilprodukt sofort im Kopfe auf $(m+2)$ Dezimalen. Man kürzt sodann den Multiplikanden, eventuell unter Erhöhung der letzten Ziffer, auf $(m+2)$ Stellen und multipliziert mit der ersten Dezimale des Multiplikators; das erhaltene Produkt reduziert man sofort wieder auf $m+2$ Stellen. So fährt man fort, bis man mit allen aufgeschriebenen Ziffern des Multiplikators multipliziert hat. Addiert man darnach die erhaltenen $(m+2)$ stelligen Teilprodukte und kürzt zum Schluß die Summe auf m Stellen, so hat man den gewünschten Wert des Produktes bis auf einen Fehler, welcher sicher kleiner ist als eine Einheit der m^{ten} Stelle.

Ordnet man die Rechnung so an, daß man die erste Stelle des Multiplikators unter die letzte des Multiplikanden schreibt, die zweite Stelle unter die vorletzte usw., so hat man bei Bildung der Teilprodukte immer mit der Stelle des Multiplikanden zu beginnen, die genau über der betreffenden Stelle des Multiplikators steht.

IV. **Division.** Die Zahlen P und A seien bis auf beliebig viele Dezimalen angebbar. Es soll der Quotient $P:A$ mit einer vorgeschriebenen Anzahl (n) von Dezimalen so bestimmt werden, daß einerseits der Fehler der n stelligen Dezimalzahl möglichst klein ist und andrerseits jeder unnütze Rechenaufwand vermieden wird. Zur Erleichterung der Fehlerbestimmung setzen wir in A das Komma hinter die erste von Null verschiedene Ziffer; natürlich muß dann in P das Komma um die gleiche Anzahl Stellen in demselben Sinne verschoben werden. In dem so veränderten Dividenden behalten wir $n+2$ Dezimalstellen bei. Die Untersuchung wird nämlich zeigen, daß eine geringere Anzahl von Stellen die Genauigkeit beeinträchtigen, eine größere Anzahl aber unnötig sein würde. Es sei dementsprechend[1])

$$P = p_m \cdot 10^m + p_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + p_1 \cdot 10 + p_0$$
$$+ \frac{p_1'}{10} + \frac{p_2'}{10^2} + \cdots + \frac{p_n'}{10^n} + \frac{p_{n+1}'}{10^{n+1}} + \frac{p_{n+2}'}{10^{n+2}}.$$

1) Enthält der Dividend keine Ganzen, ist er etwa von der Form

$$0, \overbrace{0 \ldots 0}^{(\nu \text{ Nullen})} p_{\nu+1}' p_{\nu+2}' \cdots,$$

so kann man das $10^{\nu+1}$fache des Dividenden $p_{\nu+1}', p_{\nu+2}' \ldots$ durch denselben Divisor teilen, den Quotienten auf $n-(\nu+1)$ Stellen bestimmen und zum Schluß durch $10^{\nu+1}$ dividieren.

Die Koeffizienten p, p' sind sämtlich kleiner als 10, nur soll p_m die aus den beiden ersten Ziffern zusammengesetzte Zahl in dem Falle bedeuten, daß die erste Ziffer des Divisors, die von der gleichvielten des Dividenden verschieden ist, einen größeren Wert als diese hat. Der Quotient B ist alsdann von der Form:

$$b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_0 + \frac{b_1'}{10} + \frac{b_2'}{10^2} + \cdots,$$

wo die Ziffer b_m sicher von Null verschieden ist.

Damit in dem ersten zu bildenden Teilprodukte P_1 die $(n+2)^{\text{te}}$ Dezimale noch möglichst genau sei, schreiben wir den Divisor zunächst bis zu derjenigen Stelle auf, die, mit $b_m 10^m$ multipliziert, eine $(n+3)^{\text{te}}$ Stelle liefert, d. h. bis zur $(m+n+3)^{\text{ten}}$ Stelle, so daß der Divisor im Anfange lautet:

$$A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{m+n+2}}{10^{m+n+2}} + \frac{a_{m+n+3}}{10^{m+n+3}}.$$

Da wir P mit der $(n+2)^{\text{ten}}$, A mit der $(m+n+3)^{\text{ten}}$ Stelle abgebrochen haben, sind die Fehler von P bezüglich A sicher nicht größer als $\pi = \frac{0{,}5}{10^{n+2}}$ bezüglich $\alpha = \frac{0{,}5}{10^{m+n+3}}$. Mit dem ersten Gliede des Quotienten $b_m 10^m$ bildet man das erste Teilprodukt

$$P_1 = A \cdot b_m \cdot 10^m.$$

Dasselbe ist eine $(n+3)$ stellige Zahl, die wir aber im Kopfe sofort auf $n+2$ Stellen reduzieren. In der $(n+3)$ stelligen Zahl ist der Fehler sicher nicht größer als $\alpha \cdot 9 \cdot 10^m = \frac{4{,}5}{10^{n+3}} = \frac{0{,}45}{10^{n+2}}$. Beim Abkürzen auf $n+2$ Stellen kann höchstens der Fehler $\frac{0{,}5}{10^{n+2}}$ dazukommen, so daß die obere Grenze für den Fehler von P_1 den Wert $\pi_1 = \frac{0{,}95}{10^{n+2}}$ hat. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Ziffer b_m selbst genau ist. Auf die Berechtigung dieser Voraussetzung kommen wir noch zurück. Man bildet nunmehr die Differenz $P - P_1 = R_1$. Da bei der Subtraktion im ungünstigsten Falle sich die Fehler von P und P_1 addieren können, ist der größte Wert des Fehlers von R_1

$$\varrho_1 = \pi + \pi_1 = \frac{0{,}5 + 0{,}95}{10^{n+2}}.$$

Die erste Ziffer des Quotienten $R_1 : A$ liefert das zweite Glied $b_{m-1} \cdot 10^{m-1}$ des Resultats. Um das nächste Teilprodukt

$$P_2 = A \cdot b_{m-1} \cdot 10^{m-1}$$

auf $(n+3)$ Stellen zu erhalten, brauchen wir in A nur $m+n+2$ Stellen, wir können also die letzte Stelle des Divisors, unter eventueller Erhöhung der vorletzten, fortlassen. Bezeichnen wir den so abgekürzten Divisor mit A_1, so ist der maximale Wert α_1 des Fehlers von A_1 gleich $\frac{0,5}{10^{m+n+2}}$. Unter der Voraussetzung, daß auch b_{m-1} genau ist, beträgt der größte Wert des Fehlers in dem $(n+3)$ stelligen Produkte $A_1 \cdot b_{m-1} \cdot 10^{m-1}$

$$\frac{0,5}{10^{m+n+2}} \cdot 9 \cdot 10^{m-1} = \frac{0,45}{10^{n+2}}.$$

Bei der Abkürzung auf $n+2$ Stellen kann ein Fehler von höchstens $\frac{0,5}{10^{n+2}}$ hinzukommen, so daß der mögliche Fehler von P_2 kleiner ist als $\pi_2 = \frac{0,95}{10^{n+2}}$ und der mögliche Fehler von $R_1 - P_2 = R_2$ kleiner als $\varrho_2 = \varrho_1 + \pi_2 = \frac{0,5 + 2 \cdot 0,95}{10^{n+2}}$. Bei der nächsten Division kann der Divisor um eine weitere Stelle, auf A_2, gekürzt werden, so daß der maximale Wert seines Fehlers $\alpha_2 = \frac{0,5}{10^{m+n+1}}$ beträgt usw.

Man bestimmt also die einzelnen Ziffern des Quotienten der Reihe nach durch die folgenden Divisionen:

$$\begin{array}{ll} P : A = b_m \cdot 10^m; & R_1 : A_1 = b_{m-1} \cdot 10^{m-1}; \\ \underline{P_1} & \underline{P_2} \\ R_1 & R_2 \\ & \\ R_2 : A_2 = b_{m-2} \cdot 10^{m-2}; \ldots & R_i : A_i = b_{m-i} \cdot 10^{m-i}. \\ \underline{P_3} & \underline{P_{i+1}} \\ R_3 & R_{i+1} \end{array}$$

Dabei soll, wenn $i > m$, für b_{m-i} gesetzt werden b'_{i-m} und für 10^{m-i}

$$\frac{1}{10^{i-m}}.$$

Die größten Werte, welche die Fehler von A_i bezüglich R_i haben können, sind

$$\alpha_i = \frac{0,5}{10^{m+n+3-i}} \quad \text{bezüglich} \quad \varrho_i = \frac{0,5 + i \cdot 0,95}{10^{n+2}}.$$

Indem wir voraussetzen, daß die Ziffern $b_m, b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots b_{m-i+1}$ sämtlich richtig sind, wollen wir nunmehr untersuchen, welchen Einfluß die Fehler von R_i und A_i auf die Genauigkeit der Ziffer b_{m-i} ausüben können.

Da wir nur wissen, daß der wahre Wert von R_i zwischen $R_i - \varrho_i$ und $R_i + \varrho_i$, der von A_i zwischen $A_i - \alpha_i$ und $A_i + \alpha_i$ liegt, so können wir mit Sicherheit nur behaupten, daß der noch fehlende Teil des Quotienten, $b_{m-i} \cdot 10^{m-i} + \cdots$, kleiner als

$$O_i = \frac{R_i + \varrho_i}{A_i - \alpha_i}$$

und größer als

$$U_i = \frac{R_i - \varrho_i}{A_i + \alpha_i}$$

ist.

Nun ergibt sich:

$$O_i - U_i = 2 \cdot \frac{A_i \varrho_i + R_i \alpha_i}{A_i^2 - \alpha_i^2} = 2 \cdot \frac{\varrho_i + \frac{R_i}{A_i}\alpha_i}{A_i\left(1 - \frac{\alpha_i^2}{A_i^2}\right)}.$$

Da $\frac{R_i}{A_i} < 10^{m-i+1}$, so ist der größte Wert, den der Zähler des Bruches haben kann,

$$\frac{0{,}5 + i \cdot 0{,}95}{10^{n+2}} + \frac{0{,}5}{10^{n+2}} = \frac{1 + i \cdot 0{,}95}{10^{n+2}}.$$

α_i wächst mit wachsendem i, aber selbst, wenn wir den Quotienten bis zur $(n+2)^{\text{ten}}$ Stelle berechnen, d. h. bis zu $i = m + n + 2$ gehen, ist α_i erst $= \frac{0{,}5}{10} = \frac{1}{20}$. Da nun $A_i > 1$, so ist sicher $\frac{\alpha_i^2}{A_i^2} < \frac{1}{400}$ und deshalb der Nenner des oben für $O_i - U_i$ gefundenen Bruches größer als $\frac{399}{400}$, folglich

$$O_i - U_i < 2 \cdot \frac{1 + i \cdot 0{,}95}{10^{n+2}} \cdot \frac{400}{399}.$$

Für kleine Werte von i können sich demnach O_i und U_i höchstens um einige Einheiten in der $(n+2)^{\text{ten}}$ Stelle, für die größten praktisch in Betracht kommenden Werte von i nur um einige Einheiten in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Stelle unterscheiden, so daß wir, solange $m + n$ nicht den Wert 20 überschreitet, $O_i - U_i < \frac{5}{10^{n+1}}$ voraussetzen dürfen.

Im allgemeinen werden deshalb, für $i \leqq m + n$,

$$O_i = b_{m-i} 10^{m-i} + \cdots$$

und

$$U_i = b_{m-i} 10^{m-i} + \cdots$$

mit derselben Ziffer b_{m-i} beginnen. Dann aber muß auch die erste

Ziffer von $R_i : A_i$ dieselbe sein wie die erste Ziffer des wahren Wertes des noch fehlenden Teiles des Quotienten; denn $R_i : A_i$ und der noch fehlende Teil des Quotienten liegen beide zwischen O_i und U_i. Abgesehen von dem sogleich zu besprechenden Ausnahmefalle werden erst

$$O_{m+n+1} = \frac{b_{n+1}^{(0)}}{10^{n+1}} + \cdots$$

und

$$U_{m+n+1} = \frac{b_{n+1}^{(u)}}{10^{n+1}} + \cdots$$

sich schon in der ersten Stelle unterscheiden können. Die Ziffer b'_{n+1}, welche man durch die Division $R_{m+n+1} : A_{m+n+1}$ findet, kann dann aber von dem wahren Werte nicht mehr abweichen, als sich die beiden Zahlen $b_{n+1}^{(0)}$ und $b_{n+1}^{(u)}$ voneinander unterscheiden, d. h. der Fehler ist sicher kleiner als 5 Einheiten der $(n+1)^{\text{ten}}$ Stelle. Kürzt man sodann den Quotienten auf n Stellen ab, so kann noch ein Fehler von höchstens 5 Einheiten der $(n+1)^{\text{ten}}$ Stelle hinzukommen, so daß der gesamte Fehler des berechneten n stelligen Quotienten sicher nicht größer als eine Einheit der letzten (n^{ten}) Stelle ist.

In besonderen Fällen kann es nun allerdings geschehen, daß auch schon für Werte von i, die $\leqq m + n$, O_i und U_i nicht mit derselben Ziffer beginnen[1]). Da aber $O_i - U_i < \frac{0,5}{10^n}$, so kann die erste Ziffer von O_i (wenn $i \leqq m + n$), sich niemals um mehr als eine Einheit von der ersten Ziffer von U_i unterscheiden. Wenn man in diesem Falle, auf dessen Eintreten man dadurch hingewiesen wird, daß sich R_i nur in den letzten Stellen von einem ganzen Vielfachen von $10^{m-i} \cdot A$ unterscheidet, für b_{m-i} die erste Ziffer von O_i und für alle folgenden Stellen (bis zur n^{ten} Dezimalstelle inklus.) Nullen setzt, so unterscheidet sich das so gefundene Resultat von dem wahren Werte des Quotienten um weniger als eine halbe Einheit der n^{ten} Stelle.

Die im vorhergehenden angestellten Überlegungen erläutern wir nunmehr an zwei Beispielen.

1. Es soll der Quotient

$$3,14\,159\,265 \ldots : 1,41\,421\,356 \ldots$$

auf 4 Dezimalstellen berechnet werden.

1) Es kann z. B.

$$O_i = 40,001 \ldots$$

und

$$U_i = 39,998 \ldots$$

sein.

Da hier $m = 0$, $n = 4$, so hat man im Dividenden $n + 2 = 6$, im Divisor zunächst $m + n + 3 = 7$ Dezimalstellen beizubehalten, also zu setzen:

$$P = 3{,}141\,593, \qquad A = 1{,}4\,142\,136.$$
$$\left(\pi = \frac{0{,}5}{10^6}\right) \qquad \left(\alpha = \frac{0{,}5}{10^7}\right).$$

$$(P = 3{,}141\,593) : (A = 1{,}4\,142\,136) = 2$$
$$\underline{(P_1 = 2{,}828\,427)}$$
$$R_1 = 0{,}313\,166 \qquad \left(\varrho_1 = \frac{0{,}5 + 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$(R_1 = 0{,}313\,166) : (A_1 = 1{,}414\,214) = 0{,}2$$
$$\underline{(P_2 = 0{,}282\,843)}$$
$$R_2 = 0{,}030\,323 \qquad \left(\varrho_2 = \frac{0{,}5 + 2 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$(R_2 = 0{,}030\,323) : (A_2 = 1{,}41\,421) = 0{,}02$$
$$\underline{(P_3 = 0{,}028\,284)}$$
$$R_3 = 0{,}002\,039 \qquad \left(\varrho_3 = \frac{0{,}5 + 3 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$(R_3 = 0{,}002\,039) : (A_3 = 1{,}4\,142) = 0{,}001$$
$$\underline{(P_4 = 0{,}001\,414)}$$
$$R_4 = 0{,}000\,625 \qquad \left(\varrho_4 = \frac{0{,}5 + 4 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$(R_4 = 0{,}000\,625) : (A_4 = 1{,}414) = 0{,}0004$$
$$\underline{(P_5 = 0{,}000\,566)}$$
$$R_5 = 0{,}000\,059 \qquad \left(\varrho_5 = \frac{0{,}5 + 5 \cdot 0{,}95}{10^6}\right);$$

$$(R_5 = 0{,}000\,059) : (A_5 = 1{,}41) = 0{,}000\,04$$
$$\underline{(P_6 = 0{,}000\,056)}$$
$$R_6 = 0{,}000\,003 \qquad \left(\varrho_6 = \frac{0{,}5 + 6 \cdot 0{,}95}{10^6}\right).$$

Noch die nächste Stelle zu berechnen, ist zwecklos, weil ja der Fehler in R_6 möglicherweise schon etwa 6 Einheiten der 6. Dezimale betragen könnte. Auf 5 Stellen heißt der Quotient also $B = 2{,}22\,144$. Die 5. Stelle ist bereits unsicher, ihr Fehler aber kleiner als

$$2 \cdot \frac{1 + 5 \cdot 0{,}95}{10^6} \cdot \frac{400}{399},$$

d. h. kleiner als 1,2 Einheiten der 5. Stelle. Indem wir noch B auf 4 Stellen abkürzen, kommt ein Fehler von 4 Einheiten der 5. Stelle

hinzu, so daß, wenn wir $B = 2,2214$ setzen, der mögliche Fehler kleiner ist als 0,52 Einheiten der letzten (4.) Stelle.

2. Es soll der Quotient

$$(P = 211,8281) : (A = 8,242\,344)$$

auf 2 Dezimalstellen berechnet werden.

Hier ist

$$m = 1, \quad n = 2, \quad \text{also} \quad n + 2 = 4, \quad m + n + 3 = 6.$$

$$\begin{array}{l} (P = 211,8281) : (A = 8,242\,344) = 2 \cdot 10^1 \\ \underline{(P_1 = 164,8469)} \\ R_1 = 46,9812 \qquad \left(\varrho_1 = \frac{0,5 + 0,95}{10^4}\right); \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (R_1 = 46,9812) : (A_1 = 8,24\,234) = 5 \\ \underline{(P_2 = 41,2117)} \\ R_2 = 5,7695 \qquad \varrho_2 = \left(\frac{0,5 + 2 \cdot 0,95}{10^4}\right). \end{array}$$

$$(R_2 = 5,7695) : (A_2 = 8,2423)$$

ergibt zwar den Quotienten 0,69 ..., es ist aber R_2 nur um eine Einheit der 4. Stelle kleiner als $A_2 \cdot 0,7$.

Da $O_2 = \frac{5,7695 + 0,0\,0024}{8,2423 - 0,0\,0005} > 0,7$, so haben wir hier den Fall, daß O_2 und U_2 mit einer verschiedenen Ziffer, nämlich mit 7 bezüglich 6 beginnen. Nach der vorher gegebenen Vorschrift werden wir als Näherungswert des gesuchten Quotienten 25,70 wählen. Da

$$O_2 - U_2 < 2 \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,95}{10^4} \cdot \frac{400}{399},$$

d. h. kleiner als 6 Einheiten der 4. Stelle ist, so beträgt in dem Resultate 25,70 der Fehler auch sicher weniger als 0,0006.

In den beiden durchgeführten Beispielen haben wir absichtlich die einzelnen Divisionen voneinander getrennt, um die Art der Abkürzung deutlicher hervortreten zu lassen. Selbstverständlich wird man in der Praxis die Rechnung zusammenziehen, jeden der Reste $R_1, R_2, \ldots$ nur einmal hinschreiben und die Reduktion von A auf A_1, von A_1 auf A_2 usw. an dem ersten Divisor A selbst vornehmen.

V. **Radizieren.** Die Aufgabe, aus einer gegebenen Dezimalzahl α die Quadratwurzel zu ziehen, bezüglich, wenn die Quadratwurzel in unserem Zahlenbereiche nicht existiert, nach willkürlicher

Annahme einer ganzen Zahl ν, zwei Dezimalzahlen $\frac{a}{10^\nu}$ und $\frac{a+1}{10^\nu}$ so zu finden, daß

$$\left(\frac{a}{10^\nu}\right)^2 < \alpha < \left(\frac{a+1}{10^\nu}\right)^2,$$

haben wir bereits (Kap. III, § 3 F, S. 107) auf die Kap. I, § 10 G, S. 46 ff. gelöste Aufgabe zurückgeführt, die ganze Zahl a so zu bestimmen, daß

$$a^2 \leqq A' < (a+1)^2,$$

wo A' die größte ganze in $\alpha \cdot 10^{2\nu}$ enthaltene Zahl bedeutet. Wir wollen jetzt zeigen, daß das Kap. I, § 10 G angegebene Verfahren, welches etwas langwierig wird, wenn A' eine große Zahl ist, sich erheblich abkürzen läßt, daß man nämlich, falls die gesuchte Zahl a $2n+1$ bezüglich $2n+2$ Ziffern enthält, das erwähnte Verfahren nur zur Bestimmung der ersten $(n+1)$ bezüglich $(n+2)$ Ziffern nötig hat, während man die letzten n Ziffern durch eine einfache Division finden kann.

Der durch wirkliche Wurzelausziehung gefundene, aus $(n+1)$ bezüglich $(n+2)$ Ziffern und n angehängten Nullen bestehende Teil des Radikanden heiße A und der nach Ermittlung der letzten Ziffer von A gebliebene Rest R, so daß also

$$A \geqq 10^{2n}$$

und

$$A' = A^2 + R.$$

Wir dividieren nunmehr den Rest R durch $2A$, wobei sich der Quotient q und der Rest r ergeben möge; es besteht also die Gleichung

$$\frac{R}{2A} = q + \frac{r}{2A} \quad \left(\frac{r}{2A} < 1\right)$$

oder

$$R = 2Aq + r.$$

Aus

$$A^2 < A' < (A + 1 \cdot 10^n)^2$$

und

$$R = A' - A^2$$

folgt

$$R < (A + 10^n)^2 - A^2$$

und weiter

$$\frac{R}{2A} < 10^n + \frac{10^{2n}}{2A}$$

und, wegen

$$A \geqq 10^{2n},$$

$$\frac{R}{2A} < 10^n + \frac{1}{2}.$$

q, die größte in $\frac{R}{2A}$ enthaltene ganze Zahl, kann also nicht größer als 10^n sein.

Wir wollen jetzt beweisen, daß stets

$$(A+q-1)^2 < A' < (A+q+1)^2.$$

Da

$$2A > r,$$

ist auch

$$(q+1)^2 + 2A > r$$

und

$$2Aq + q^2 + 2q + 1 + 2A > R$$

und weiter

$$A^2 + 2Aq + q^2 + 2q + 1 + 2A > A',$$

d. h. aber

$$(A+q+1)^2 > A'.$$

Wäre

$$(A+(q-1))^2 \geqq A',$$

so müßte auch sein

$$2A(q-1) + (q-1)^2 \geqq R$$

und

$$2A(q-1) + (q-1)^2 \geqq 2Aq + r$$

oder

$$(q-1) + \frac{(q-1)^2}{2A} \geqq q + \frac{r}{2A}.$$

Diese Relation ist aber unmöglich; denn aus $q \leqq 10^n$ und $A \geqq 10^{2n}$ folgt:

$$\frac{(q-1)^2}{2A} < \frac{10^{2n}}{2 \cdot 10^{2n}}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{(q-1)^2}{2A} < \frac{1}{2}.$$

Auf jeden Fall ist also

$$(A+(q-1))^2 < A' < (A+(q+1))^2.$$

Je nachdem nun

$$r \gtreqless q^2,$$

ist auch

$$R \gtreqless 2Aq + q^2$$

und

$$A' \gtreqless (A+q)^2.$$

Wenn demnach

1. $r = q^2$, so ist $A' = (A+q)^2$,

wenn 2. $r > q^2$, so ist $(A+q)^2 < A' < (A+q+1)^2$

und

wenn 3. $r < q^2$, so ist $(A+q-1)^2 < A' < (A+q)^2$.

Es läßt sich übrigens auch leicht zeigen (vgl. Lloyd Tanner, Note on approximate evolution, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXIII, 1892), daß unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen stets

$$\left(A + \frac{R}{2A} - \frac{1}{2}\right)^2 < A' < \left(A + \frac{R}{2A}\right)^2.$$

Damit ist A' zwischen die Quadrate zweier Zahlen eingeschlossen, die sich nur um $\frac{1}{2}$ unterscheiden, aber diese Zahlen sind im allgemeinen keine ganzen Zahlen.

In ähnlicher Weise kann man auch die letzten Stellen einer Kubikwurzel durch eine einfache Division finden (vgl. die soeben zitierte Note von L. Tanner). Wir gehen darauf nicht näher ein, weil man sich beim Ausziehen der Kubikwurzel aus einer vielziffrigen Zahl doch gewöhnlich anderer, später (Kap. V, § 5 E) zu besprechender Methoden bedient.

C. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen, deren Fehler nicht beliebig klein gemacht werden können.

Sind die Zahlen $a, b, c, \ldots$ durch irgend welche Beobachtungen, z. B. Messungen, Wägungen oder dergleichen gefunden, so werden sie im allgemeinen nicht die genauen Werte der zu bestimmenden Größen sein. Man wird vielmehr nur behaupten können, daß die letzteren zwischen $a - \alpha$ und $a + \alpha$, bezüglich $b - \beta$ und $b + \beta$, $c - \gamma$ und $c + \gamma$ liegen, wo α, β, γ im Vergleich zu a, b, c kleine, sich aus der Art der Beobachtung ergebende Zahlen bedeuten. Wenn man nun mit den gefundenen Zahlen $a, b, c, \ldots$ irgend welche Rechnungen vornimmt, deren Ergebnis durch $f(a, b, c, \ldots)$ bezeichnet werde, so kann natürlich, selbst wenn man alle Rechnungen vollständig und ohne jede Abkürzung ausführt, infolge der möglichen Ungenauigkeit von $a, b, c, \ldots$ auch dieses Ergebnis $f(a, b, c, \ldots)$ mit einem Fehler behaftet sein. Für einen beliebigen Rechnungsausdruck $f(a, b, c, \ldots)$ den möglichen Fehler anzugeben, ist an dieser Stelle nicht möglich.[1]) Wir beschränken uns daher auf die einfachsten und wichtigsten speziellen Fälle.

(I) $$x = f(a, b, c, \ldots) = a + b + c + \cdots.$$

1) Unter Voraussetzung der Elemente der Differentialrechnung findet man, indem man $f(a + \alpha, b + \beta, c + \gamma)$ in eine Reihe entwickelt, für den möglichen Fehler den Wert $\varphi = \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \alpha + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \beta + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \gamma$. In dieser Formel sind die oben im Texte abgeleiteteten als Spezialfälle enthalten.

Der wahre Wert von x liegt zwischen

$$a + b + c - \alpha - \beta - \gamma \quad \text{und} \quad a + b + c + \alpha + \beta + \gamma,$$

d. h. der mögliche Fehler ist höchstens gleich der Summe $\alpha + \beta + \gamma$ der Fehler von a, b, c.

(II) $$x = f(a, b) = a - b.$$

Der wahre Wert von x liegt zwischen

$$a - \alpha - (b + \beta) = a - b - \alpha - \beta \quad \text{und} \quad a + \alpha - (b - \beta) = a - b + \alpha + \beta,$$

der größte Wert des möglichen Fehlers beträgt $\alpha + \beta$.

(III) $$x = f(a, b) = a \cdot b.$$

Der wahre Wert von x liegt zwischen

$$(a - \alpha)(b - \beta) = ab - a\beta - b\alpha + \alpha\beta$$

und

$$(a + \alpha)(b + \beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

der mögliche Fehler ist also höchstens

$$\xi = b\alpha + a\beta + \alpha\beta.$$

Das Resultat nimmt eine noch einfachere Form an, wenn man statt des absoluten Fehlers ξ, den wir bisher nur berücksichtigt haben, den relativen Fehler einführt, d. h. den Quotienten aus dem Fehler einer Zahl dividiert durch die Zahl selbst. Wir erhalten

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}.$$

Wirklich brauchbar sind nur solche aus Beobachtungen stammende Zahlen a, b, deren relative Fehler $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}$ klein sind. Ist aber diese Voraussetzung erfüllt, so kann man ohne erhebliche Ungenauigkeit auf der rechten Seite der letzten Gleichung das Produkt der beiden kleinen Zahlen $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}$ vernachlässigen, und man erkennt, daß der relative Fehler eines Produktes gleich der Summe der relativen Fehler der einzelnen Faktoren ist. Dieser Satz kann ohne Schwierigkeit auf ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren ausgedehnt werden. Setzt man die einzelnen Faktoren einander gleich, so findet man weiter den Satz, daß der relative Fehler einer Potenz mit ganz-

zahligem Exponenten n gleich dem n-fachen des relativen Fehlers der Basis ist.

(IV) $$x = f(a, b) = \frac{a}{b}.$$

Der größte Wert, welchen x möglicherweise haben kann, ist $\frac{a+\alpha}{b-\beta}$, der kleinste $\frac{a-\alpha}{b+\beta}$. Nun ist

$$\frac{a+\alpha}{b-\beta} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha + a\beta}{b(b-\beta)}$$

und

$$\frac{a}{b} - \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{b\alpha + a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Unter der Voraussetzung, daß $\frac{\beta}{b}$ sehr klein ist, erhält man als maximalen Fehler der Zahl x:

$$\xi = \frac{b\alpha + a\beta}{b^2}$$

und findet den relativen Fehler des Quotienten:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{b\alpha + a\beta}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Der relative Fehler eines Quotienten ist also höchstens gleich der Summe der relativen Fehler von Zähler und Nenner.

(V) $$x = f(a) = \sqrt{a}.$$

Der wahre Wert von x liegt zwischen $\sqrt{a-\alpha}$ und $\sqrt{a+\alpha}$.
Nun ist

$$\sqrt{a-\alpha} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha}{a}} \quad \text{angenähert} \quad = \sqrt{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{a}\right);$$

denn

$$\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{a}\right)^2 = 1 - \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2,$$

wo unter der Voraussetzung, daß $\frac{\alpha}{a}$ eine kleine Zahl ist, $\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2$ ohne erheblichen Fehler vernachlässigt werden kann.

Ebenso ergibt sich:

$$\sqrt{a+\alpha} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{1 + \frac{\alpha}{a}} \quad \text{angenähert} \quad = \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{a}\right).$$

Der absolute Fehler von x beträgt also höchstens $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a} \cdot \sqrt{a}$ und der relative Fehler höchstens $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a}$, ist also gleich der Hälfte des relativen Fehlers des Radikanden. Ähnlich läßt sich der Fehler einer Wurzel mit beliebigem Wurzelexponenten finden.

VI. In I bis V haben wir, wenigstens für die einfachsten Formen von $f(a, b, c, \ldots)$, den größten Wert berechnet, den der Fehler ξ des Resultats infolge der Ungenauigkeiten der Zahlen $a, b, c, \ldots$ möglicherweise haben kann. Diesen Fehler zu verkleinern, liegt nicht in der Macht des Rechners; es wird deshalb häufig gar keinen Zweck haben, den Rechnungsausdruck $f(a, b, c, \ldots)$ in aller Vollständigkeit zu ermitteln. Ist z. B. $\xi = 0{,}001$, so wäre es durchaus überflüssig, $f(a, b, c, \ldots)$ etwa auf 5 oder mehr Dezimalstellen berechnen zu wollen. Man wird vielmehr stets zunächst die Größe des aus der Ungenauigkeit von $a, b, c, \ldots$ herrührenden möglichen Fehlers ξ von $f(a, b, c, \ldots)$ bestimmen und damit die Anzahl Dezimalen feststellen, bis auf welche $f(a, b, c, \ldots)$ zu berechnen, überhaupt nur einen Zweck hat. Darnach kann man die Berechnung von $f(a, b, c, \ldots)$ sowie die in $f(a, b, c, \ldots)$ etwa noch vorkommenden mit beliebiger Genauigkeit angebbaren Dezimalzahlen $p, q, r, \ldots$ nach den im Abschnitt B dieses Paragraphen besprochenen Methoden so weit abkürzen, daß man die vorher festgestellte Anzahl von Dezimalstellen mit einem möglichst kleinen noch hinzukommenden Fehler erhält.

Das einzuschlagende Verfahren erläutern wir an einem einfachen Beispiele aus der Physik. Zwischen dem Radius r, dem Reduktionsfaktor C einer Tangentenbussole und der Horizontalkomponente H des Erdmagnetismus besteht die Relation

$$H = \frac{C \cdot \pi}{5 \cdot r},$$

wo H in der Einheit

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

des c-g-s-Systems, C in Amperes ausgedrückt ist, während π hier zur Abkürzung für die Zahl 3,14159265 steht.

Durch eine Messung mittels eines Voltameters, welches in denselben Stromkreis wie die Tangentenbussole eingeschaltet ist, habe sich ergeben $C = 5{,}1$ Amp. mit einem möglichen Fehler von 0,1 Amp., r sei $= 16{,}4$ cm mit einem möglichen Fehler von 0,05 cm. Der aus der Ungenauigkeit von C und r herrührende mögliche Fehler von $\frac{C}{r}$ beträgt nach IV, S. 155

$$\frac{16{,}4 \cdot 0{,}1 + 5{,}1 \cdot 0{,}05}{16{,}4^2} = \frac{1{,}895}{268{,}96},$$

angenähert

$$= 0{,}007.$$

Da nun $H = \frac{C}{r} \cdot \frac{\pi}{5}$, so folgt, daß, wenn wir auch alle Rechnungen mit größter Genauigkeit ausführen und für π die 8stellige

Dezimalzahl setzen würden, der unvermeidliche mögliche Fehler von H doch $0{,}007 \cdot \frac{\pi}{5}$, d. h. etwas mehr als 4 Einheiten der dritten Dezimalstelle betragen würde. Es ist also durchaus überflüssig, mehr als 3 Stellen zu berechnen. Nun ergibt sich bei der Division auf 3 Stellen:

$$\frac{5{,}1}{16{,}4} = 0{,}311 \text{ mit einem Fehler, der } < 0{,}001.$$

Setzen wir also

$$\frac{C}{r} = 0{,}311, \text{ so ist der Fehler } < 0{,}008,$$

und in

$$\frac{C}{5r} = 0{,}0622 \text{ ist der Fehler } < 0{,}0016.$$

Wir bilden jetzt das Produkt

$$0{,}0622 \cdot 3{,}14159265$$

und benutzen dabei vom zweiten Faktor nur so viel Stellen, daß wir im Produkte 4 Dezimalen erhalten.

$$\begin{array}{l} \underline{0{,}0622 \cdot 3{,}141} \\ 0{,}1866 \\ \phantom{0{,}18}62 \\ \phantom{0{,}18}25 \\ \underline{\phantom{0{,}186}1} \\ 0{,}1954. \end{array}$$

Bei der abgekürzten Multiplikation haben wir in der 2., 3., 4. Zeile je einen Fehler gemacht, welcher sicher kleiner ist als eine halbe Einheit der vierten Stelle, in der Summe also einen Fehler, welcher kleiner ist als $\frac{1{,}5}{10^4}$; der durch Fortlassen der 4., 5. usw. Stelle des zweiten Faktors entstandene Fehler ist $< \frac{40}{10^6}$ oder $< \frac{0{,}4}{10^4}$; der durch Abkürzung entstandene Fehler beträgt also höchstens 1,9 Einheiten der vierten Stelle, der aus der Ungenauigkeit der Zahl 0,0622 aber entstehende mögliche Fehler $\frac{16 \cdot \pi}{10^4}$, d. h. etwa 50 Einheiten der vierten Stelle, der mögliche Gesamtfehler des Resultates 0,1954 demnach 52 Einheiten der vierten Stelle, so daß wir auf Grund der angestellten Messungen nur behaupten können, daß H zwischen

$$0{,}1902 \frac{g^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot s} \quad \text{und} \quad 0{,}2006 \frac{g^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

liegt.

IV. Kapitel.

Die relativen Zahlen.

§ 1. Definition der relativen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen haben wir (Kap. I, § 1) definiert, indem wir von Mengen ausgingen, deren sämtliche Elemente für den im Vordergrunde unseres Interesses stehenden Zweck als gleichwertig angesehen werden dürfen, die gebrochenen Zahlen (Kap. II, § 1), indem wir Mengen betrachteten, zwischen deren Elementen die Beziehung bestand, daß für den betreffenden Zweck ein gewisses Vielfaches irgend eines Elements einem bestimmten Vielfachen irgend eines andern Elements gleichwertig ist. In beiden Fällen konnten wir die Menge durch eine Zahl und einen Gattungsnamen vollkommen genügend kennzeichnen. Wenn nun zu der Menge noch andere Elemente hinzutreten, die zwar untereinander, aber nicht zu den zuerst genannten in der angegebenen Beziehung stehen, so brauchen wir zu der Beschreibung der Menge im allgemeinen zwei Zahlen und zwei Gattungsnamen. Häufig treten in den Anwendungen der Arithmetik insbesondere solche Mengen auf, deren Elemente in zwei Gruppen derart zerfallen, daß jedem Elemente der einen Gruppe ein bestimmtes der andern entgegengesetzt ist, das soll heißen: das gleichzeitige Auftreten dieser beiden entsprechenden Elemente ist für den in Betracht kommenden Zweck gleichbedeutend mit dem Nichtvorhandensein beider. Es mögen zunächst einige Beispiele solcher Mengen angeführt werden:

1. Die Veränderungen im Vermögen einer Person bilden eine Menge, als deren Elemente wir Vielfache und Bruchteile von Mark Einnahme wie Vielfache und Bruchteile von Mark Ausgabe betrachten können. Wenn es nur auf den schließlichen Vermögensstand ankommt, so heben sich irgend ein Vielfaches oder ein Bruchteil von Mark Einnahme in dem erwähnten Sinn gegen das gleiche Vielfache bezüglich den gleichen Bruchteil von Mark Ausgabe auf.

2. Kann sich ein materieller Punkt auf einer geraden Linie von einem Anfangspunkte aus nach beiden Seiten bewegen, so bilden die Vielfachen und Bruchteile von Metern Bewegung nach der einen und nach der andern Seite hin eine Menge, in welcher, wenn es nur auf die schließliche Entfernung vom Anfangspunkte

ankommt, eine Bewegung von $\frac{z}{n}$ Metern nach der einen Richtung und eine von $\frac{z}{n}$ Metern nach der andern Richtung entgegengesetzte, sich aufhebende Elemente sind.

3. Auf einen materiellen Punkt mögen nach einer und nach der genau entgegengesetzten Richtung irgend welche Kräfte wirken. Für die zustande kommende Bewegung sind eine Kraft in der einen Richtung und die genau gleich große in der andern Richtung in dem erwähnten Sinne entgegengesetzte Größen.

Die Forderung, auch alle derartigen Mengen durch eine Zahl und einen Gattungsnamen zu charakterisieren, veranlaßt uns zur Einführung einer neuen Art von Zahlen. Der einfacheren Ausdrucksweise wegen wollen wir uns zunächst einmal auf Mengen beschränken, bei welchen die Elemente jeder der beiden Gruppen für sich als gleichwertig zu betrachten sind und jedem Element einer der beiden Gruppen irgend eins der andern entgegengesetzt ist. Als erste Gruppe bezeichnen wir diejenige, deren Gattungsnamen wir zum Namen der gesamten Menge auswählen.

Wir abstrahieren jetzt wieder (vgl. Kap. I, § 1 und Kap. II, § 1) von allen besonderen Eigenschaften der Elemente unserer Menge, bleiben uns aber außer des Unterschiedenseins der einzelnen Dinge voneinander noch der Beziehung des Entgegengesetztseins von je einem Element der ersten Gruppe und einem der zweiten Gruppe bewußt und bezeichnen dasjenige, was bei dieser Art der Abstraktion aus einem Element der ersten Gruppe wird, mit 1^* und das, was aus einem Element der zweiten Gruppe wird, mit $1'$. 1^* und $1'$ sind also Zeichen für irgend zwei als abgeschlossene Ganze zu betrachtende Dinge, an denen uns weiter nichts interessiert, als daß das gleichzeitige Auftreten von 1^* und $1'$ mit dem Nichtvorhandensein beider gleichbedeutend ist. Analog wie Kap. I, § 1 bezeichnen wir die kollektive Zusammenfassung von 1^* und 1^* in unserem Bewußtsein mit 2^*, die von $1'$ und $1'$ mit $2'$, die von 1^* und 1^* und 1^* mit 3^*, die von $1'$ und $1'$ und $1'$ mit $3'$ usw. Ohne weiteres ist klar, daß 2^* und $2'$, 3^* und $3'$ usw. in dem angegebenen Sinn entgegengesetzte Größen sind, sich in irgend einer Menge also gegenseitig aufheben. Die durch die beschriebene Abstraktion und die kollektive Zusammenfassung gewonnenen Begriffe $1^*, 2^*, 3^*, \ldots, 1', 2', 3', \ldots$ nennen wir jetzt auch Zahlen, und zwar im Gegensatze zu den Kap. I, § 1 definierten absoluten Zahlen „relative“ Zahlen[1]), insbesondere

1) Statt dessen sagt man in der elementaren Arithmetik häufig auch „algebraische“ Zahlen. Da aber in den späteren Kapiteln der Arithmetik unter algebraischen Zahlen etwas anderes verstanden wird, dürfte es zweckmäßiger sein, dieses Wort hier zu vermeiden.

die den Elementen der ersten Gruppe (deren Gattungsname der Name der gesamten Menge werden soll) entsprechenden „positive", die den Elementen der zweiten Gruppe entsprechenden „negative" Zahlen. Bedeutet a irgend eine natürliche Zahl, so nennt man a den absoluten Wert oder absoluten Betrag sowohl von a^* wie auch von a', und man schreibt (nach Weierstraß) $|a^*| = a$, $|a'| = a$. Der bequemen Unterscheidung wegen werden wir in diesem Kapitel die relativen Zahlen durch griechische Buchstaben, ihre absoluten Werte durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnen.

Der Fall, daß die Elemente jeder der beiden Gruppen nicht einander gleichwertig sind, unter ihnen aber die vorher erwähnten Wertrelationen bestehen, läßt sich leicht auf den eben behandelten zurückführen. Indem wir die vorkommenden Brüche (nach Kap. II, § 2) in solche mit gleichem Nenner verwandeln, können wir alle Elemente als Vielfache eines bestimmten darstellen, und so gelangen wir analog zum Begriffe der gebrochenen relativen Zahl. Das gleichzeitige Auftreten von $\left(\frac{z}{n}\right)^*$ und $\left(\frac{z}{n}\right)'$ in einer Menge ist wieder gleichbedeutend mit dem Nichtvorhandensein beider.

Enthält nun eine Menge $\frac{z_1}{n}$ Elemente der ersten und $\frac{z_2}{n}$ Elemente der zweiten Art (die Brüche denken wir uns von vornherein in gleichnamige umgewandelt), und heben wir wirklich je zwei entsprechende Elemente der beiden Gruppen gegeneinander auf, soweit es möglich ist, so muß einer der folgenden drei Fälle eintreten:

I. Wenn $z_1 = z_2$, so bleibt nichts übrig; der Menge kommt die Zahl Null zu.

II. Wenn $z_1 > z_2$, etwa $z_1 = z_2 + u$, so bleiben u Elemente $\frac{1}{n}$ der ersten Gruppe übrig. Die Menge ist alsdann bestimmt durch die Zahl $\left(\frac{u}{n}\right)^*$ und den der ersten Gruppe zukommenden Gattungsnamen. Eine solche Menge ist aber von genau derselben Art wie die in Kap. I und Kap. II behandelten Mengen, wir können sie also statt durch die positive Zahl $\left(\frac{u}{n}\right)^*$ auch durch die absolute Zahl $\frac{u}{n}$ charakterisieren. Der Unterschied ist einzig und allein der, daß, wenn wir eine positive Zahl gebrauchen, zum Ausdruck gebracht wird, daß auch Elemente entgegengesetzter Art in Betracht kommen können, während bei Anwendung absoluter Zahlen diese Möglichkeit ausgeschlossen wird. Wenn dieser, für das Rechnen selbst unerhebliche, Unterschied nicht besonders hervorgehoben werden soll, dürfen wir die positiven Zahlen durch die absoluten ersetzen, und wir werden deshalb auch von nun an für die positiven Zahlen im allgemeinen die einfachere Bezeichnung 1, 2, 3 usw. anwenden.

III. Wenn $z_2 > z_1$, etwa $z_2 = z_1 + v$, so bleiben v Elemente $\frac{1}{n}$ der zweiten Gruppe übrig, und die Menge ist gekennzeichnet durch die Zahl $\left(\frac{v}{n}\right)'$ und den Gattungsnamen der ersten Art.[1])

Jede der von uns jetzt behandelten Mengen läßt sich also tatsächlich charakterisieren durch Null oder durch eine relative (positive oder negative) Zahl und den Gattungsnamen einer der beiden (von vornherein ein- für allemal gewählten) Gruppen. Als gleichwertig sind zwei Mengen nur dann zu betrachten, wenn sie nach Ausführung der vorher angegebenen Reduktionen (des Forthebens je zweier entsprechenden Elemente entgegengesetzter Art) aus der gleichen Anzahl von Elementen derselben Art bestehen, und dementsprechend nennen wir zwei relative Zahlen nur dann gleich, wenn sie den gleichen absoluten Betrag besitzen und von derselben Art sind.

So haben wir uns überzeugt, daß die relativen Zahlen, insbesondere auch die negativen, in ganz ähnlicher Weise wie die absoluten Erzeugnisse unserer geistigen, nämlich abstrahierenden und kollektivisch zusammenfassenden Tätigkeit sind. Selbstverständlich können negative Zahlen nur dann verwendet werden, wenn das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, das mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzustellen ist[2]). Wir gehen jetzt dazu über, für die neuen Zahlen die Rechenoperationen zu definieren und deren Gesetze aufzusuchen.

§ 2. Addition.

A. Definition der Summe.

Irgend welche relative Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ können immer als die gewissen Mengen $A, B, C, \ldots$ der jetzt betrachteten Art zukommenden Zahlen angesehen werden. Sind die relativen Zahlen nicht sämtlich ganzzahlig, so denken wir sie uns in Brüche mit dem gemeinsamen Nenner n verwandelt und jede der Mengen $A, B, C, \ldots$ nur aus Elementen $\frac{1}{n}$ oder $\left(\frac{1}{n}\right)'$ zusammengesetzt, so daß irgend zwei der in den Mengen vorkommenden Elemente entweder gleichwertig oder entgegengesetzt sind. Unter der Summe[3]) $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ verstehen

1) Selbstverständlich könnte man sie auch vollkommen ausreichend beschreiben durch die Zahl $\frac{v}{n}$ und den Gattungsnamen der zweiten Gruppe. Wir wollen ja aber der Menge gerade den Gattungsnamen einer bestimmten, von uns von vornherein ein- für allemal ausgewählten Gruppe geben.

2) Bemerkung von Gauß in seiner Selbstanzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda. Ges. Werke II, S. 174.

3) Eine Summe relativer Zahlen nennt man häufig eine „algebraische" Summe. Vgl. Anm. 1, S. 159.

wir, ganz ebenso wie Kap. I, § 3 A, die Zahl σ, welche der durch Vereinigung der Mengen $A, B, C, \ldots$ entstehenden Menge S zukommt.

I. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sämtlich Zahlen derselben Art, d. h. entweder sämtlich positiv oder sämtlich negativ. Wenn

$$|\alpha| = a, \quad |\beta| = b, \quad |\gamma| = c \quad \text{usw.},$$

so enthält die Menge $a + b + c + \cdots$ Elemente der gleichen Art. Daraus ergibt sich die Regel: **Die Summe mehrerer relativen Zahlen derselben Art ist eine Zahl von gleicher Art, deren absoluter Betrag gleich der Summe der absoluten Beträge der Summanden ist.**

II. Es seien α, β Zahlen verschiedener Art, etwa α positiv, β negativ. In der durch Vereinigung von A und B entstandenen Menge S heben wir so viele Elemente gegeneinander auf, wie es möglich ist. Wenn $a = b$, bleibt nichts übrig; wenn $a > b$, so bleiben $a - b$ Elemente der ersten Art, wenn $b > a$, $b - a$ Elemente der zweiten Art übrig. **Der absolute Betrag der Summe zweier relativen Zahlen verschiedener Art ist also gleich der Differenz der absoluten Beträge der beiden Summanden, und die Summe ist positiv oder negativ, je nachdem der positive oder der negative Summand den größeren absoluten Betrag hat.**

III. Unter den $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seien beliebig viele positiv, die andern negativ. Da sowohl die Elemente $\left(\frac{1}{n}\right)$ wie auch die Elemente $\left(\frac{1}{n}\right)'$ untereinander gleichwertig sind, also jedes beliebige $\left(\frac{1}{n}\right)$ gegen irgend ein $\left(\frac{1}{n}\right)'$ aufgehoben werden kann, und da die einer Menge zukommende Zahl von der Anordnung der Elemente unabhängig ist, können wir die Summation in beliebiger Reihenfolge ausführen, z. B. so, daß wir zuerst die positiven, dann die negativen für sich addieren und nach II. die Summe der beiden Teilsummen bilden.

B. Folgerungen aus der Definition.

I. Wenn man in einer Summe relativer Zahlen jede einzelne durch ihren entgegengesetzten Wert ersetzt, so behält die Summe ihren absoluten Wert, geht aber in die Zahl entgegengesetzter Art über.

II. Wenn in einer zweigliedrigen Summe der eine Summand seinen Wert behält, der zweite aber durch eine von ihm verschiedene Zahl ersetzt wird, so nimmt auch die Summe einen anderen Wert an.

§ 3. Subtraktion.

Unter der Differenz $\alpha - \beta$ der beiden relativen Zahlen α, β haben wir diejenige Zahl γ zu verstehen, welche zu β addiert α ergibt. Daß nicht mehr als eine solche Zahl γ existieren kann, folgt aus § 2 B, II. Ist β eine positive Zahl b, so ergibt sich aus der Identität

$$b + (\alpha + b') = \alpha,$$

daß die gesuchte Differenz $\gamma = \alpha + b'$. Ist aber β eine negative Zahl b', so folgt in derselben Weise aus $b' + (\alpha + b) = \alpha$, daß $\gamma = \alpha + b$. Die Differenz zweier relativen Zahlen ist also stets gleich der Summe aus dem Minuenden und der zum Subtrahenden entgegengesetzten Zahl. Da im Gebiete der relativen Zahlen zu jeder Zahl die entgegengesetzte existiert, und da sich zwei relative Zahlen immer addieren lassen, ist jetzt also auch die Subtraktion stets möglich. Wie die Einführung der gebrochenen Zahlen (Kap. II, § 4, S. 85) für die Division die Beschränkung beseitigte, daß der Dividend ein Vielfaches des Divisors sein mußte (Kap. I, § 6 B), so werden wir durch Einführung der relativen Zahlen jetzt von der Bedingung befreit, daß in einer Subtraktionsaufgabe der Minuend stets größer als der Subtrahend sein müsse.

Aus dem allgemeinen Satze von der Unabhängigkeit einer Summe von der Reihenfolge der einzelnen Additionen ergibt sich, daß man eine Summe relativer Zahlen addieren kann, indem man die Summanden einzeln addiert.

Statt eine Summe relativer Zahlen zu subtrahieren, kann man den der Summe entgegengesetzten Wert, also nach § 2 B, I den Ausdruck, den man erhält, wenn man jeden Summanden durch seinen entgegengesetzten Wert ersetzt, addieren.

In diesen Sätzen stecken als Spezialfälle die Formeln Kap. I, § 4 B, (I)—(VI), S. 15, wie man sofort erkennt, wenn man die daselbst auftretenden Differenzen als algebraische Summen schreibt. Im Gebiete der relativen Zahlen ist die Gültigkeit dieser Formeln nicht mehr an die Bedingung geknüpft, daß in jeder der vorkommenden Differenzen der Minuend größer als der Subtrahend ist.

Die Gleichung

$$a - b = a + b',$$

insbesondere für den Fall $a = 0$,

$$0 - b = 0 + b' = b'$$

hat zu der jetzt allgemein üblichen Bezeichnungsweise der negativen Zahlen geführt. Schreibt man für $0 - b$ kürzer $-b$, so folgt $b' = -b$, und deshalb bezeichnet man tatsächlich eine negative Zahl durch das vor die entsprechende absolute Zahl gesetzte Zeichen „—". Dieses Zeichen ist also hier aus einem Operationszeichen zu einem die Art der Zahl charakterisierenden „Vorzeichen" geworden, das dieselbe Funktion hat wie der von uns bisher verwendete Strich, dessen wir uns auch noch gelegentlich, wenn es zweckmäßig erscheint, in den nächsten Paragraphen bedienen werden.

Da die positive Zahl a analog als Ergebnis der Summation $0 + a$ aufgefaßt werden kann, setzt man vor eine absolute Zahl, wenn man sie ausdrücklich als positiv hervorheben will, das Zeichen „+".

Ein Ausdruck, welcher durch Addition und Subtraktion aus relativen Zahlen gebildet ist, wie z. B.

$$a + b' - c' - d + e',$$

ist also hiernach zu schreiben:

$$(+a) + (-b) - (-c) - (+d) + (-e),$$

oder, wenn man die vorkommenden Subtrahenden als Summanden schreibt:

$$(+a) + (-b) + (+c) + (-d) + (-e).$$

Um ein Übermaß von Zeichen und Klammern zu vermeiden, hat man das Übereinkommen getroffen, eine Summe relativer Zahlen zu schreiben, indem man die Summanden, jeden mit seinem Vorzeichen, ohne Operationszeichen einfach nebeneinander setzt, so daß unser Ausdruck die Form annimmt:

$$+a - b + c - d - e.$$

Die Zeichen $+$, $-$ sind also hier als Vorzeichen, nicht als Operationszeichen aufzufassen. Bei dieser Art zu schreiben darf selbstverständlich das Zeichen $+$ vor den positiven Summanden nicht fortbleiben; ohne ein Mißverständnis herbeizuführen, läßt man es nur vor dem ersten Summanden weg, indem man festsetzt, daß, wenn vor der ersten Zahl kein Vorzeichen steht, der positive Wert gemeint sein soll. Die den vorher ausgesprochenen Sätzen von der Addition bezüglich Subtraktion einer algebraischen Summe entsprechenden Gleichungen

$$x + (a + b' + c + d' + e') = x + a + b' + c + d' + e'$$

und

$$x - (a + b' + c + d' + e') = x + a' + b + c' + d + e$$

sind jetzt zu schreiben:

$$x + (a - b + c - d - e) = x + a - b + c - d - e$$

und

$$x - (a - b + c - d - e) = x - a + b - c + d + e.$$

Für das praktische Rechnen pflegt man diese Gleichungen zu formulieren: Eine Klammer, vor welcher ein Pluszeichen steht, kann ohne weiteres fortgelassen werden, eine Klammer, vor welcher ein Minuszeichen steht, nur dann, wenn man jedem Gliede, das sich in der Klammer befand, das entgegengesetzte Vorzeichen gibt[1]).

§ 4. Größenvergleichung der relativen Zahlen.

Nach Kap. I, § 2 nennen wir eine absolute Zahl a größer als eine absolute Zahl b (bezüglich b kleiner als a), wenn es eine absolute Zahl z derart gibt, daß $a = b + z$, in anderen Worten, wenn die Differenz $a - b$ eine absolute Zahl ist. Ganz entsprechend definieren wir jetzt, die relative Zahl α soll größer als die relative Zahl β (bezüglich β kleiner als α) heißen, wenn die stets existierende und eindeutig bestimmte Differenz $\alpha - \beta$ einen positiven Wert hat. Sind α und β beide positiv, so ist die Definition dieselbe wie für absolute Zahlen. Bedeutet α irgend eine positive Zahl a, β irgend eine negative Zahl b', so ist

$$\alpha - \beta = a - b' = a + b,$$

also sicher positiv, d. h. jede beliebige positive Zahl ist größer als irgend eine negative Zahl. Wenn α und β beide negativ, $\alpha = a'$, $\beta = b'$, und $a > b$, so ist $\beta - \alpha = b' - a' = b' + a$ eine positive Zahl, also $\beta > \alpha$ oder $\alpha < \beta$, d. h. von zwei negativen Zahlen ist diejenige die größere, welche den kleineren absoluten Betrag hat. Leicht ergibt sich weiter, daß jede positive Zahl größer, jede negative Zahl kleiner als Null ist.

Nach der soeben gegebenen Definition bedeutet

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha > \beta, & \text{daß} & \alpha - \beta = p_1, \\ \beta > \gamma, & \text{daß} & \beta - \gamma = p_2, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{wo } p_1, p_2 \text{ irgend welche} \\ \text{positiven Zahlen bedeuten.} \end{array}$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt:

$$\alpha - \gamma = p_1 + p_2,$$

d. h. aus $\alpha > \beta$ und $\beta > \gamma$ folgt, daß $\alpha > \gamma$ (vgl. Kap. I, § 3 C, II).

1) Natürlich ist hier vorausgesetzt, daß es sich nur um Additionen und Subtraktionen, nicht aber um Multiplikationen und Divisionen von Klammerausdrücken handelt.

Da nach unserer Definition zwar

$$\alpha + b > \alpha,$$

aber

$$\alpha + b' < \alpha,$$

gilt der Satz Kap. I, § 3 C, I, daß eine Summe mehrerer Zahlen immer größer ist als irgend einer ihrer Summanden, nicht mehr allgemein im Gebiete der relativen Zahlen.

Den § 2 B, II ausgesprochenen Satz können wir jetzt genauer so formulieren, daß, wenn zwei zweigliedrige Summen nur in dem einen Summanden übereinstimmen, diejenige den größeren Wert hat, in welcher der andere Summand der größere ist; denn, wenn $\beta > \gamma$, also $\beta - \gamma$ gleich einer positiven Zahl p ist, so wird auch

$$(\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma) = \beta - \gamma = p, \quad \text{also} \quad \alpha + \beta > \alpha + \gamma.$$

Unmittelbar aus der Definition des Größerseins ergibt sich ferner die Gültigkeit des Satzes Kap. I, § 3 C, IV auch für relative Zahlen, daß, wenn

$$\alpha > \beta$$

und

$$\gamma > \delta,$$

auch

$$\alpha + \gamma > \beta + \delta.$$

Um die Größenbeziehungen unter irgend welchen relativen Zahlen räumlich zu veranschaulichen, denken wir uns an einen beliebigen Punkt einer geraden Linie die Zahl Null geschrieben, die positiven Zahlen an Punkte zur rechten, die negativen an Punkte zur linken Seite des ersten Punktes gesetzt, und zwar so, daß von je zwei ungleichen positiven oder negativen Zahlen diejenige, welche den größeren absoluten Betrag hat, in eine größere Entfernung vom Anfangspunkte kommt. Alsdann sind die sämtlichen hingeschriebenen relativen Zahlen in dem Sinne nach der Größe geordnet, daß jede Zahl größer ist als irgend eine links von ihr stehende, aber kleiner als irgend eine rechts von ihr befindliche.

§ 5. Multiplikation.

A. Definition und Gleichungen.

Durch die Kap. I, § 5 A aufgestellte Definition haben wir die Bedeutung jedes Produktes bestimmt, dessen Multiplikator eine absolute Zahl und dessen Multiplikand irgend eine Größe ist, die man zu einer Größe der gleichen Art addieren kann. Dieser Definition ent-

sprechend ist, wenn a, b irgendwelche ganzen absoluten Zahlen[1]) bedeuten,

$$(+a)\cdot b = \overbrace{+a+a+\cdots+a}^{(b \text{ Summanden})} = +ab$$

und

$$(-a)\cdot b = \overbrace{-a-a-\cdots-a}^{(b \text{ Summanden})} = -ab.$$

Da für das Rechnen die positiven Zahlen mit den absoluten gleichbedeutend sind (vgl. § 1, S. 160), können wir auch schreiben:

$$(+a)\cdot(+b) = +a\cdot b$$

und

$$(-a)\cdot(+b) = -a\cdot b.$$

Wie wir nun einerseits für eine Summe von b Summanden, deren jeder gleich a ist, die Bezeichnung $a \cdot b$ und andererseits für eine Menge von b Objekten, von deren besonderen Eigenschaften wir absehen, an denen uns weiter nichts interessiert, als daß jedes dem durch „1" bezeichneten entgegengesetzt ist, das Zeichen b' oder $-b$ eingeführt haben, so wollen wir jetzt eine Summe von b Summanden, deren jeder den zu α entgegengesetzten Wert hat, durch $\alpha \cdot b'$ bezüglich $\alpha\cdot(-b)$ bezeichnen; d. h. wir setzen zur Abkürzung für die Summe $\overbrace{a'+a'+\cdots+a'}^{(b \text{ Summanden})}$ oder $\overbrace{-a-a-\cdots-a}^{(b \text{ Summanden})}$, deren Wert nach § 2 $-ab$ ist, auch das Symbol $a\cdot b'$ oder $a\cdot(-b)$ und für die Summe $\overbrace{a+a+\cdots+a}^{(b \text{ Summanden})}$, deren Wert $+ab$ ist, auch das Symbol $a'\cdot b'$ bezüglich $(-a)\cdot(-b)$, so daß wir allgemein unter dem Zeichen $\alpha\cdot\beta$ diejenige Zahl φ verstehen, deren absoluter Betrag gleich dem Produkt der absoluten Beträge von α und β und welche positiv oder negativ ist, je nachdem α und β Zahlen gleicher oder Zahlen entgegengesetzter Art sind[2]).

1) Kap. II, § 4 ist gezeigt, wie die Multiplikation gebrochener Zahlen auf die ganzer Zahlen zurückgeführt wird.

2) Für die Bildung einer Zahl φ aus zwei Zahlen α, β in der oben angegebenen Art sei folgendes Beispiel aus der Physik angeführt: Bezeichnen α und β die elektrischen Ladungen zweier materiellen Punkte, in passenden Einheiten ausgedrückt, wobei einem positiven Werte von α oder β Glas-Elektrizität, einem negativen Harz-Elektrizität entsprechen soll, so stellt die nach der im Texte gegebenen Vorschrift gebildete Zahl $\varphi = \alpha\cdot\beta$ die Anzahl der Krafteinheiten dar, mit welcher die beiden elektrischen Massen aufeinander wirken, wenn sie den Abstand 1 haben, wobei ein positiver Wert von φ Abstoßung, ein negativer Anziehung bedeutet.

Wenn β eine positive Zahl bedeutet, so ist die so gebildete Zahl φ identisch mit dem Produkte der Zahlen α, β.

Weiter ist leicht zu zeigen, daß, wenn α und β beliebige relative Zahlen sind, für die Rechenoperation, durch welche φ aus α und β entsteht, dieselben Gesetze gelten, die wir Kap. I, § 5 B und C für die Multiplikation absoluter Zahlen abgeleitet haben. Die Gültigkeit des kommutativen Gesetzes, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, und die des assoziativen, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, ist evident. Um auch die Richtigkeit der Formel

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

(distributives Gesetz) nachzuweisen, müssen wir die Fälle, daß α, β, γ positiv oder negativ sind, einzeln durchgehen.

Es sei 1.

$$\alpha = -a, \quad \beta = -b, \quad \gamma = +c,$$

dann ist (nach § 2 A, I)

$$\alpha + \beta = -(a + b),$$

also

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = -[(a + b) \cdot c]$$

(nach der vorher gegebenen Definition); andererseits

$$\alpha \cdot \gamma = -ac, \quad \beta \cdot \gamma = -bc \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = -(ac + bc).$$

Da für absolute Zahlen $(a + b)c = ac + bc$, so ist im Falle 1. das distributive Gesetz bewiesen.

Es sei 2.

$$\alpha = -a, \quad \beta = +b, \quad (a > b) \quad \text{und} \quad \gamma = -c,$$

dann ist (§ 2 A, II)

$$\alpha + \beta = -a + b = -(a - b),$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = +[(a - b) \cdot c],$$

andrerseits

$$\alpha \cdot \gamma = +ac, \quad \beta \cdot \gamma = -bc, \quad \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = +(ac - bc),$$

und da für absolute Zahlen

$$(a - b)c = ac - bc,$$

so gilt auch im Falle 2. das distributive Gesetz.

Für die noch fehlenden Fälle ist der Beweis ganz ähnlich zu führen. Da nun alle Formeln des Kap. I, § 5 C aus dem kommutativen, dem assoziativen und dem distributiven Gesetze hergeleitet worden sind, ohne daß es nötig war, auf die Bedeutung des Produktes

zurückzugehen, so gelten alle diese Formeln jetzt auch für die Rechenoperation, durch welche die mit $\alpha \cdot \beta$ bezeichnete Zahl aus α und β entsteht. Wir brauchen deshalb beim Rechnen mit dem Symbol $\alpha \cdot \beta$ nicht zu unterscheiden, ob α und β absolute oder relative Zahlen sind; dadurch rechtfertigt sich die Wahl des Zeichens $\alpha \cdot \beta$ für die in der beschriebenen Art aus α und β entstehende Zahl, sowie der Name Produkt, den wir dieser Zahl $\alpha \cdot \beta$, und der Name Multiplikation, den wir der Rechenoperation, durch welche sie entstanden ist, jetzt auch beilegen wollen. Daß bei keiner andern Definition des Symbols $\alpha \cdot \beta$ die Multiplikationsgesetze gültig bleiben, ist leicht zu erkennen.

Durch wiederholte Anwendung des distributiven Gesetzes (vgl. Kap. I, § 5 C) ergibt sich die allgemeinere Formel:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)(\beta_1 + \cdots + \beta_n) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \cdots + \alpha_m\beta_1 \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + \alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_n + \cdots + \alpha_m\beta_n,\end{aligned}$$

in Worten: Zwei Summen relativer Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen mit jedem Summanden der andern multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert. In diesem Satze sind als Spezialfälle die Formeln Kap. I, § 5 C, I—VI enthalten, wenn man die daselbst auftretenden Differenzen als algebraische Summen auffaßt. So ermöglicht es uns also auch hier die Einführung der relativen Zahlen, mehrere Formeln zu einem einzigen Satze zusammenzufassen.

B. Ungleichungen.

I. Es sei

$$\beta > \gamma, \quad \text{d. h.} \quad \beta = \gamma + p,$$

wo p eine positive Zahl bedeutet. Für irgend eine relative Zahl α ist dann

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\gamma + p) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot p.$$

Wenn nun α positiv, so ist auch $\alpha \cdot p$ positiv, also $\alpha\beta > \alpha\gamma$; wenn aber α negativ, dann ist $\alpha \cdot p$ negativ, deshalb $\alpha\beta < \alpha\gamma$. Eine Ungleichung darf man also ohne weiteres mit einer positiven Zahl multiplizieren, mit einer negativen nur dann, wenn man die Zeichen „größer“ und „kleiner“ miteinander vertauscht. Sind α und p beide von Null verschieden, so kann auch $\alpha \cdot p$ nicht Null sein. Wenn also α nicht gleich Null ist und β und γ voneinander verschieden sind, so haben sicher auch $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ ungleiche Werte, woraus wir

weiter schließen, daß, wenn $\alpha\beta = \alpha\gamma$, entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = \gamma$ sein muß.

II. Wenn

$$\alpha > \beta$$

und

$$\gamma > \delta,$$

so kann je nach den Werten von α, β, γ, δ entweder $\alpha\gamma > \beta\delta$ oder auch $\alpha\gamma < \beta\delta$ sein.

§ 6. Division.

Entsprechend der für absolute Zahlen Kap. I, § 6 A gegebenen Definition verstehen wir unter dem Quotienten $(\beta : \alpha)$ der beiden relativen Zahlen β, α die Zahl, welche mit α multipliziert β ergibt, so daß $(\beta : \alpha) \cdot \alpha = \alpha \cdot (\beta : \alpha) = \beta$. Daß, wenn α von Null verschieden ist, nur eine solche Zahl existieren kann, folgt aus § 5 B, I. Die § 5 A aufgestellte Definition des Produktes ergibt sofort, daß der absolute Wert von $(\beta : \alpha)$ gleich dem Quotienten der absoluten Werte von β und α und daß $(\beta : \alpha)$ positiv oder negativ ist, je nachdem β und α Zahlen gleicher oder entgegengesetzter Art sind. Die Division ist (nach Einführung der gebrochenen Zahlen, Kap. II, § 4) stets ausführbar, wenn wir nur für den Divisor α den Wert Null ausschließen. Da die Formeln Kap. I, § 6 B, I—VIII nur aus den Grundgesetzen der Multiplikation und aus der Eindeutigkeit des Quotienten hergeleitet worden sind (vgl. Anm. 2, S. 24), dürfen wir ohne weiteres jetzt auch ihre Gültigkeit für relative Zahlen behaupten.

§ 7. Potenzieren und Radizieren.

A. Der Exponent sei eine positive ganze Zahl m.

Die Bedeutung von

$$\alpha^m = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}^{(m \text{ Faktoren})}$$

ist nach der Definition des Produktes relativer Zahlen vollkommen bestimmt. Wenn α positiv, so ist auch α^m stets positiv; wenn aber α negativ, so ist, je nachdem m gerade oder ungerade, α^m positiv oder negativ; z. B.

$$(+1)^m = +1,$$

aber

$$(-1)^m = +1, \quad \text{wenn } m \text{ gerade,}$$
$$= -1, \quad \text{wenn } m \text{ ungerade.}$$

B. Der Exponent sei eine positive gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$.

Entsprechend der Kap. II, § 5 B, S. 87 gegebenen Definition haben wir unter $\alpha^{\frac{m}{n}}$ zu verstehen $(\sqrt[n]{\alpha})^m$.

I. α sei eine positive Zahl.

1. n ungerade.

Es gibt keine negative Zahl, deren n^{te} Potenz gleich α ist, und sicher (vgl. Kap. I, § 8 A) nicht mehr als eine positive. Entweder existiert eine derartige positive Zahl x, und dann ist $\alpha^{\frac{m}{n}} = x^m$, oder es lassen sich (Kap. II, § 5 C, III, S. 92 u. ff.) zwei positive Zahlen x_1 und x_2 so finden, daß $x_1^n < \alpha < x_2^n$ und daß $x_2 - x_1$ kleiner als eine beliebig klein gegebene positive Zahl δ ist. Wie S. 95 auseinander gesetzt, kann man in diesem Falle, wenn es nicht auf absolute Genauigkeit ankommt, die in unserem Zahlenbereiche nicht vorhandene Zahl $\alpha^{\frac{m}{n}}$ durch eine der beiden Zahlen x_1^m oder x_2^m ersetzen.

2. n gerade.

Existiert eine positive Zahl x, so daß $x^n = \alpha$, so ist in diesem Falle auch $(-x)^n = \alpha$. Das Symbol $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$ hat alsdann die beiden Werte $+x$ und $-x$, und $\alpha^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$, falls m ungerade ist, die beiden Werte $+x^m$ und $-x^m$, falls m gerade ist, nur den einen Wert $+x^m$. Gibt es eine solche Zahl x nicht, so bestehen außer den Ungleichungen

$$x_1^n < \alpha < x_2^n \qquad (x_2 - x_1 < \delta)$$

auch noch die Ungleichungen

$$(-x_1)^n < \alpha < (-x_2)^n,$$

wo

$$(-x_1) - (-x_2) = x_2 - x_1 < \delta.$$

II. α sei eine negative Zahl.

1. n ungerade.

Entweder gibt es eine einzige negative Zahl $-x$, deren n^{te} Potenz gleich α ist, und dann haben wir $\alpha^{\frac{m}{n}} = (-x)^m$, oder es lassen sich zwei negative Zahlen $(-x_1)$ und $(-x_2)$ angeben, deren Differenz dem absoluten Werte nach unter einer beliebig klein angenommenen Grenze δ liegt, so daß

$$(-x_2)^n < \alpha < (-x_1)^n.$$

2. n gerade.

Es existiert keine relative Zahl ξ, so daß $\xi^n = \alpha$, auch keine relative Zahl ξ_1, so daß $\xi_1^n < \alpha$; denn eine gerade Potenz jeder positiven und jeder negativen Zahl hat einen positiven Wert, ist also sicher größer als die negative Zahl α. Wir können in diesem Falle die durch das Symbol $\alpha^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}$ angedeutete Aufgabe selbst dann nicht lösen, wenn wir α durch eine von α wenig verschiedene Zahl ersetzen. Das Zeichen $\alpha^{\frac{m}{n}}$ hat also für einen negativen Wert von α und einen geradzahligen Wert von n im Gebiete der relativen Zahlen keinen Sinn.

III. Formeln für die Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Die Gültigkeit der Formeln für das Rechnen mit Wurzeln (Kap. I, § 8) bezüglich mit Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, beruhte einerseits auf den für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten gültigen Sätzen, andererseits aber auch auf der Eindeutigkeit der Wurzeln im Gebiete der absoluten Zahlen. Da die letztere Eigenschaft den Potenzen mit gebrochenen Exponenten im Bereiche der relativen Zahlen nicht mehr allgemein zukommt, $\alpha^{\frac{m}{n}}$ vielmehr, wenn α positiv, n gerade und m ungerade ist, zwei Werte besitzt, die zwar denselben absoluten Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben, so gelten auch die Formeln in bezug auf die Vorzeichen nicht ohne weiteres, wenigstens nicht in demselben Sinne wie im Gebiete der absoluten Zahlen. So ist beispielsweise

$$256^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{256})^3 = (\pm 4)^3 = \pm 64,$$

aber

$$256^{\frac{6}{8}} = (\sqrt[8]{256})^6 = (\pm 2)^6 = + 64.$$

Die Gleichung

$$256^{\frac{6}{8}} = 256^{\frac{3}{4}}$$

gilt jetzt also nur in dem Sinne, daß der einzige Wert, welchen die linke Seite besitzt, gleich einem der beiden Werte der rechten Seite ist. Dasselbe ist von der Gleichung

$$(\sqrt[4]{81})^2 = \sqrt[4]{81^2}$$

oder

$$81^{\frac{2}{4}} = (81^2)^{\frac{1}{4}}$$

zu sagen; denn die linke Seite hat nur den Wert $+ 9$, die rechte

aber die beiden Werte ± 9[1]). Bei Benutzung der Formeln, in denen Wurzeln oder Potenzen mit gebrochenen Exponenten vorkommen, hat man also darauf zu achten, ob die beiden Seiten der Gleichung ein- oder mehrdeutige Symbole sind, und im letzteren Falle zu prüfen, welche Werte einander gleich sind.

Wenn α positiv und n eine gerade Zahl ist, bezeichnet man den positiven Wert von $\sqrt[n]{\alpha}$ als den Hauptwert[2]) der Wurzel. Es liegt die Frage nahe, ob wohl die Formeln für die Wurzeln, bezüglich die Potenzen mit gebrochenen Exponenten, sämtlich richtig bleiben, wenn man für jede zweiwertige Wurzel den Hauptwert setzt. Dazu ist das Folgende zu bemerken:

1. Wenn in einer der Formeln nur gerade Wurzelexponenten auftreten, so müssen sämtliche Radikanden positiv sein, damit die Wurzeln im Bereiche der relativen Zahlen überhaupt einen Sinn haben, und dann hat man nach der getroffenen Festsetzung für alle Wurzeln die positiven Werte zu nehmen. Da aber das Produkt und der Quotient zweier positiven Zahlen auch wieder positiv sind (Summen und Differenzen von Wurzeln kommen in den Formeln nicht vor), werden beide Seiten der Gleichungen positiv, die Formeln gelten also auch in bezug auf das Vorzeichen.
2. Wenn in einer der Formeln nur Wurzeln mit ungeraden Exponenten vorkommen, so sind die Wurzeln im Gebiete der relativen Zahlen sämtlich eindeutig; es ist dann der Kap. I, § 8 B, S. 30 gegebene Beweis anwendbar, die Formeln sind also gültig.
3. Eine Formel, in welcher gerade und ungerade Wurzelexponenten vorkommen, braucht nicht richtig zu sein, falls man für die Wurzeln mit geradzahligen Exponenten die Hauptwerte wählt. So gilt unter dieser Bedingung nicht mehr die Formel

$$\sqrt[n \cdot r]{\alpha^r} = \sqrt[n]{\alpha}$$

(vgl. Kap. I, § 8 B), wenn α negativ, n ungerade und r gerade ist, denn der Hauptwert der linken Seite ist positiv, die rechte Seite aber negativ, z. B. ist der Hauptwert von

$$\sqrt[6]{(-8)^2} = +2,$$

dagegen

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

---

1) Bei diesen Bemerkungen ist selbstverständlich hier vorausgesetzt, daß man den Bereich der reellen Zahlen nicht verläßt.

2) Im Falle $\alpha > 0$ bleibt diese Festsetzung auch bei der später (Kap. VII) vorzunehmenden Erweiterung des Zahlenbereiches gültig, während unter den verschiedenen Werten, welche eine Wurzel mit ungeradem Exponenten aus einem negativen Radikanden alsdann besitzt, der einzige in unserem jetzigen Zahlbereich vorhandene nicht der Hauptwert ist.

Erschöpfend werden wir die Frage nach der Gültigkeit dieser Formeln erst nach einer weiteren Ausdehnung unseres Zahlengebietes (Kap. VII, § 4 B) erledigen können.

C. Der Exponent sei eine negative Zahl.

Nach Kap. I, § 7 B und Kap. II, § 5 A u. B ist, falls $p > q$,

$$\alpha^p : \alpha^q = \alpha^{p-q},$$

und falls $p < q$,

$$\alpha^p : \alpha^q = 1 : \alpha^{q-p}\text{[1]}),$$

also z. B.

$$\alpha^8 : \alpha^5 = \alpha^{8-5} = \alpha^3$$

und

$$\alpha^5 : \alpha^8 = 1 : \alpha^{8-5} = 1 : \alpha^3.$$

Würde man auch im zweiten Falle rein formal nach der für den ersten geltenden Regel verfahren, so käme man auf die Gleichung $\alpha^5 : \alpha^8 = \alpha^{5-8} = \alpha^{-3}$. Die rechte Seite derselben hat zunächst keinen Sinn; denn wir haben Potenzen bisher nur für positive Exponenten definiert. Der Wunsch aber, den Quotienten $\alpha^p : \alpha^q$, gleichgültig ob $p > q$ oder $p < q$, nach ein und derselben Regel behandeln zu dürfen, hat darauf geführt, dem noch sinnlosen Symbole α^{-x} die Bedeutung $1 : \alpha^x$ beizulegen[2]). Zweckmäßig wird diese Auffassung von $1 : \alpha^x$ als einer Potenz mit der Basis α und dem Exponenten $-x$ aber nur sein, wenn man mit dem so definierten Symbol α^{-x} genau ebenso rechnen darf wie mit Potenzen, deren Exponenten positiv sind, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn für die Potenzen mit negativen Exponenten bei der soeben gegebenen Definition dieselben Gesetze (vgl. Kap. I, § 7 B und Kap. II, § 5 B) gelten wie für die mit

---

1) p und q dürfen ganze oder gebrochene Zahlen sein. Im letzteren Falle gelten die Formeln in dem vorher (§ 7 B, III) angegebenen Sinne.

2) Auch um die Potenz mit negativem Exponenten zu definieren, kann man von der Korrespondenz der arithmetischen Reihe 1, 2, 3, ... m und der geometrischen $a^1, a^2, a^3, \ldots a^m$ ausgehen (vgl. Kap. II, § 5 B, S. 88, Anm. 1). Setzt man beide Reihen mit derselben Differenz 1, bezüglich demselben Quotienten a über das Anfangsglied nach links fort, so erhält man:

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3, \ldots, \text{ bezüglich } \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, \ldots.$$

Soll auch jetzt irgend ein Glied der geometrischen Reihe als Potenz von a betrachtet werden dürfen, deren Exponent das entsprechende Glied der arithmetischen Reihe ist, so muß gesetzt werden:

$$a^0 = 1,\ a^{-1} = \frac{1}{a},\ a^{-2} = \frac{1}{a^2} \text{ usw.}$$

positiven Exponenten. Daß das wirklich zutrifft, ist jetzt leicht zu zeigen. Man braucht nur für α^{-x} den Wert $\frac{1}{\alpha^x}$ einzuführen, an den Potenzen mit positiven Exponenten die als erlaubt bewiesenen Umformungen vorzunehmen und schließlich wieder zu Potenzen mit negativen Exponenten überzugehen. So ist z. B.

$$\alpha^{-x} \cdot \beta^{-x} = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{1}{\beta^x} = \frac{1}{\alpha^x \cdot \beta^x} = \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^x} = (\alpha \cdot \beta)^{-x};$$

ferner:

$$\alpha^{-x} \cdot \alpha^{-y} = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{1}{\alpha^y} = \frac{1}{\alpha^{x+y}} = \alpha^{-(x+y)} = \alpha^{-x-y};$$

$$\alpha^{+x} \cdot \alpha^{-y} = \alpha^x \cdot \frac{1}{\alpha^y} = \frac{1}{\alpha^{y-x}} = \alpha^{-(y-x)} = \alpha^{+x-y}, \quad (x < y);$$

$$\left(\alpha^{-x}\right)^{-y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^x}\right)^y} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^{xy}}\right)} = \alpha^{xy} = \alpha^{(-x)\cdot(-y)} \text{ usw.}$$

Ebenso leicht ist der Beweis zu führen, daß auch die übrigen Formeln Kap. I, § 7 B, I—V gültig bleiben, wenn die in ihnen vorkommenden Exponenten sämtlich oder zum Teil negativ sind. Da aber ausschließlich auf diesen Formeln alles Rechnen mit Potenzen beruht, brauchen wir jetzt tatsächlich beim Umformen irgend welcher Ausdrücke keinen Unterschied mehr zu machen, ob in den vorkommenden Potenzen der Exponent einen positiven oder einen negativen Wert hat, und damit ist die vorher aufgestellte Definition der Potenzen mit negativen Exponenten als zweckmäßig gerechtfertigt.

§ 8. Logarithmieren.

Im Bereiche der absoluten Zahlen haben wir x den Logarithmus der Zahl a für die Basis g genannt, wenn $g^x = a$. Um an dieser Stelle unnötige Komplikationen zu vermeiden, beschränken wir uns vorläufig auf eine positive Basis g und nennen ξ den Logarithmus von α, wenn $g^\xi = \alpha$. Im Gebiete der relativen Zahlen kann aber g^ξ zweiwertig sein (§ 7 B, I, 2), wenn nämlich ξ ein Bruch ist, der zum Zähler eine ungerade und zum Nenner eine gerade Zahl hat. Damit zu jedem Logarithmus nur ein einziger Numerus gehöre, fügen wir jetzt zur Definition des Logarithmus die Bedingung hinzu, daß, wenn g^ξ zweiwertig ist, der Hauptwert von g^ξ gleich α sein solle[1]). So

1) Der innere Grund für diese Festsetzung, daß nämlich nur die Hauptwerte einer Potenz Werte ein- und derselben Funktion sind, während die negativen Werte ganz verschiedenen Funktionen, je nach dem Nenner des Exponenten angehören, kann erst nach Einführung der komplexen Zahlen eingesehen werden. Alsdann werden wir auch den Logarithmus einer beliebigen komplexen Zahl für eine beliebige komplexe Basis definieren. Vgl. Kap. VII, § 4 D u. E.

nennen wir z. B. $\frac{1}{2}$ den Logarithmus nur von $+3$ für die Basis 9, trotzdem $9^{\frac{1}{2}} = \pm 3$. Eine negative Zahl besitzt infolgedessen in unserem Zahlenbereiche keinen Logarithmus.

Für $\xi = 0$ ist $g^{\xi} = 1$, der Logarithmus von 1 ist also für jede Basis gleich Null. Falls $g > 1$, ist für positive Werte von ξ die Potenz $g^{\xi} > 1$, für negative $g^{\xi} < 1$; wenn aber $g < 1$, so ist für positive Werte von ξ die Potenz $g^{\xi} < 1$ und für negative $g^{\xi} > 1$. Für die Basen, die größer als 1 sind — und solche verwendet man jetzt ausschließlich beim praktischen Rechnen —, entspricht also einer Zahl, die größer als 1 ist, ein positiver Logarithmus und einer positiven Zahl, die kleiner als 1 ist, ein negativer Logarithmus. Da die Potenzformeln auch für negative Exponenten gültig bleiben, gelten die aus ihnen hergeleiteten Formeln für das Rechnen mit Logarithmen (Kap. I, § 8 C) auch, wenn die Logarithmen sämtlich oder zum Teil negativ sind.

V. Kapitel.

Rechenoperationen im Bereiche der rationalen Zahlen.

Einleitung: Die bisher eingeführten Zahlen, nämlich die ganzen und die gebrochenen, die positiven und die negativen, bezeichnet man mit einem gemeinsamen Namen als „rationale Zahlen". In den Kap. I—IV haben wir uns davon überzeugt, daß die vier Grundoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (mit alleiniger Ausnahme der Division durch Null), an den rationalen Zahlen stets ausführbar sind, d. h. immer wieder auf eine bestimmte rationale Zahl führen. Die rationalen Zahlen bilden also einen abgeschlossenen Bereich, aus welchem man bei Beschränkung auf die vier Grundoperationen nicht herauskommt. Für die Anwendungen der Mathematik reicht man im allgemeinen mit diesem Gebiete der rationalen Zahlen vollkommen aus. Wir wollen deshalb, bevor wir zur Einführung neuer Zahlen, die sich für die theoretische Einsicht allerdings als durchaus notwendig erweisen wird, übergehen, in diesem Kapitel eine Reihe von Rechenoperationen behandeln, die mittels der rationalen Zahlen ausführbar sind.

§ 1. Kombinatorik[1]).

A. Permutationen.

Behufs Bildung des Zahlbegriffs sind wir Kap. I, § 1 von Mengen ausgegangen, die aus Dingen bestehen, von deren besonderer Beschaffenheit wir vollständig abstrahiert haben. Da wir also die verschiedenen Dinge

1) Die Kombinatorik hat im 18. und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in der mathematischen Literatur eine größere Rolle gespielt als in den letzten Jahrzehnten. Wenn einzelne kombinatorische Aufgaben auch bereits im 4. Jahrhundert v. Chr. von den Griechen Xenokrates und Aristoteles behandelt worden sind, wenn der indische Astronom Bhâskara (12. Jahrhundert n. Chr.) auch sogar schon die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung zu bestimmter Klasse und die Anzahl der Permutationen mit lauter ungleichen oder teilweise gleichen Elementen kennt, so gelten doch als eigentliche Begründer dieser Disziplin erst Pascal, Leibniz, Wallis, dann namentlich Jacob Bernoulli (Ars conjectandi, Basel 1713) und A. de Moivre (Probabilities, London

für den in Betracht kommenden Zweck als durchaus gleichartig auffaßten (was uns natürlich um so leichter wird, je weniger die in jedem Falle doch vorhandenen Unterschiede von uns wahrgenommen werden können), war die Reihenfolge der Dinge einer Menge vollkommen gleichgültig oder vielmehr, es hatte gar keinen Sinn, von einer Reihenfolge zu sprechen. Betrachten wir die Dinge oder „Elemente" einer Menge nicht mehr als gleichartig, sehen also nicht von allen besonderen Eigenschaften ab, so kommt es häufig vor, daß in mancher Hinsicht ihre Aufeinanderfolge von Wichtigkeit ist, z. B. wenn es sich um die Ziffern einer dekadischen Zahl, die Schüler einer Klasse usw. handelt. Wir legen uns deshalb die Frage vor, welche und wie viele Reihenfolgen bei einer gegebenen Menge von Elementen möglich sind. Die Gesamtheit der in Betracht kommenden Elemente nennt man, wenn unser Interesse auf ihre Reihenfolge gerichtet ist, eine Permutation der Elemente. Die Anzahl der bei denselben n Elementen möglichen Permutationen bezeichnen wir durch P_n. Ohne weiteres sieht man, daß $P_1 = 1$ und $P_2 = 2$. Um alle möglichen Permutationen dreier Elemente zu erhalten, greift man irgend eins der drei Elemente heraus. Dieses wird in so vielen Permutationen an der ersten Stelle stehen können, als für die beiden übrig bleibenden Reihenfolgen möglich sind, d. h. in $P_2 = 2$ Permutationen. Da nun jedes der drei Elemente den ersten Platz einnehmen kann, erhalten wir im ganzen $P_3 = 3P_2 = 3 \cdot 2$ Permutationen. In ähnlicher Weise findet man $P_4 = 4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$, $P_5 = 5P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ usw., so daß sich die Vermutung aufdrängt, daß allgemein P_n gleich dem Produkte aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n ist. Von der Richtigkeit dieser Vermutung überzeugt man sich durch den Schluß von n auf $n + 1$[1]. Wie soeben ergibt sich nämlich zunächst, daß $P_{n+1} = (n+1)P_n$, und wenn nun als bewiesen angenommen wird, daß

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n,$$

so folgt:

$$P_{n+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \cdot (n+1),$$

d. h. die Formel gilt auch für die nächstgrößere ganze Zahl $n + 1$, und da sie für $n = 2$ sicher richtig ist, gilt sie für jede positive ganze Zahl n. Zur Abkürzung bezeichnet man das Produkt aller natür-

---

1718). Mehrere zusammenfassende Darstellungen der Kombinatorik stammen aus dem Ende des 18. und dem Anfange des 19. Jahrhunderts, aus neuerer Zeit nur das Lehrbuch der Kombinatorik von E. Netto, Leipzig 1901, auf welches wir hinsichtlich aller der Fragen verweisen, auf die wir in diesem Buche nicht näher eingehen können. Einige auf dem Gebiete der Kombinatorik im 19. Jahrhundert tätig gewesene Autoren werden wir noch im Laufe unserer Darstellung zu zitieren haben.

1) Vgl. Kap. I, § 3 B, S. 10.

lichen Zahlen von 1 bis n mit $n!$, gelesen: n Fakultät[1]), so daß wir unser Ergebnis in der kurzen Form

1. $$P_n = n!$$

darstellen können. Mit wachsendem n nimmt die Zahl $n!$ sehr schnell zu. Es ist

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720,$$
$$7! = 5040, \quad 8! = 40\,320, \quad 9! = 362\,880, \quad 10! = 3\,628\,800 \text{ usw.}$$

Fassen wir nicht mehr alle n Elemente als ungleichartig auf, sehen wir vielmehr n_1 der Elemente ($n_1 < n$) als gleich an, so sind alle die Permutationen nicht mehr voneinander verschieden, welche sich nur in der Aufeinanderfolge dieser n_1 Elemente unterscheiden, während die übrigen $n - n_1$ dieselbe Stelle innehaben; je $n_1!$ Permutationen reduzieren sich also auf eine, und die Anzahl der voneinander verschiedenen beträgt nur noch $\frac{n!}{n_1!}$. Werden jetzt noch n_2 weitere Elemente ($n_1 + n_2 \leqq n$) als einander gleich betrachtet, so fallen wieder je $n_2!$ Permutationen in eine zusammen, nämlich die, welche sich nur durch die Stellung dieser n_2 Elemente unterscheiden; die Anzahl der voneinander verschiedenen Permutationen wird also

2. $$\frac{n!}{n_1!\,n_2!} \text{ usw.}$$

Erklärung: Eine Vertauschung von nur 2 Elementen in einer Permutation wird eine Transposition genannt.

3. **Satz:** Von jeder Permutation von n Elementen kann man durch höchstens $(n-1)$ Transpositionen zu einer beliebigen andern Permutation derselben Elemente gelangen.

Beweis: Stimmen die beiden Permutationen I und II etwa in den ν ersten Elementen ($0 \leqq \nu < n$) überein, aber nicht mehr im $(\nu+1)^{\text{ten}}$, so vertausche man in I das $(\nu+1)^{\text{te}}$ Element mit demjenigen unter den letzten $(n-\nu)$ Elementen, welches in II an der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Stelle steht. Auf diese Weise kommt man von I zu einer Permutation I′, welche mit II in den $(\nu+1)$ ersten Stellen übereinstimmt. Nun wandelt man in gleicher Art I′ in eine Permutation um, in welcher an den $(\nu+2)$ ersten Plätzen sich dieselben Elemente befinden wie in II usw. Im äußersten Falle sind $(n-1)$ Transpositionen unbedingt erforderlich.

Erklärung: Die Elemente einer Permutation pflegt man durch verschiedene Buchstaben $a, b, c, \ldots$ oder durch einen Buchstaben

1) Die Bezeichnung $n!$ rührt her von Ch. Kramp (Arithmétique universelle ou l'Algèbre, 1808).

mit verschiedenen Indices a_1, a_2, a_3, ... oder auch einfach durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... zu bezeichnen. Bei diesen Bezeichnungsarten wird unwillkürlich eine bestimmte Permutation vor den übrigen ausgezeichnet, bei der Wahl von Buchstaben nämlich die alphabetische Reihenfolge, bei der Wahl von Zahlen die natürliche Aufeinanderfolge. Eine irgendwie von vornherein bestimmte Reihenfolge wollen wir als Hauptpermutation bezeichnen und von zwei Elementen dasjenige das höhere nennen, welches in dieser Hauptpermutation an einer späteren Stelle steht. Wenn in irgend einer andern Permutation ein höheres Element einem niedrigeren vorangeht, so nennt man die gegenseitige Stellung dieser beiden Elemente eine „Inversion". In der Hauptpermutation gibt es selbstverständlich keine Inversion. Wählt man als Hauptpermutation die alphabetische Reihenfolge, so enthält beispielsweise die Permutation *ebcad* die sechs Inversionen *eb*, *ec*, *ea*, *ed*, *ba*, *ca*.

Satz: Durch eine in einer Permutation vorgenommene Transposition wird die Anzahl der Inversionen stets um eine ungerade Zahl geändert.

Beweis: Die zu vertauschenden Elemente seien x und y. Bezeichnet man die Gesamtheit der in der gegebenen Permutation vor x stehenden Elemente mit A, die der zwischen x und y stehenden mit B und die der hinter y befindlichen mit C, so geht durch die Vertauschung von x und y die Permutation

$$A \quad x \quad B \quad y \quad C \tag{I}$$

über in

$$A \quad y \quad B \quad x \quad C. \tag{II}$$

Die Anzahl der Inversionen unter den Elementen von A, B und C ist selbstverständlich in beiden Permutationen die gleiche, ebenso auch die Anzahl der Inversionen zwischen den Elementen von A und x, zwischen x und den Elementen von C, zwischen den Elementen von A und y und zwischen y und den Elementen von C. Zu vergleichen haben wir also nur die Anzahl der Inversionen in

$$x \quad B \quad y$$

und

$$y \quad B \quad x.$$

B enthalte ν Elemente, von denen ξ niedriger, also $\nu - \xi$ höher als x, η niedriger, also $\nu - \eta$ höher als y seien. Dann ist die Anzahl der Inversionen

$$\text{in} \quad x \quad B \quad \text{und} \quad B \quad y \quad \text{zusammen} \quad \xi + \nu - \eta,$$
$$\text{in} \quad y \quad B \quad \text{und} \quad B \quad x \quad \text{zusammen} \quad \eta + \nu - \xi.$$

Die Differenz beider Anzahlen ist der absolute Wert von $2(\xi - \eta)$, also jedenfalls eine gerade Zahl. Da nun aber entweder xy oder yx eine Inversion ergibt, unterscheiden sich die Anzahlen der Inversionen in (I) und (II) um eine ungerade Zahl.

Die Gesamtheit der Permutationen von n Elementen teilt man in zwei Klassen. Zur ersten rechnet man alle die, in denen die Anzahl der Inversionen eine gerade Zahl ist, man nennt sie „gerade Permutationen", zur zweiten alle die, in denen die Anzahl der Permutationen eine ungerade Zahl ist, man nennt sie „ungerade Permutationen". Zur Klasse der geraden Permutationen gehört die Hauptpermutation, sowie alle die Permutationen, welche sich aus ihr durch eine gerade Anzahl von Transpositionen herleiten lassen; der Klasse der ungeraden Permutationen gehören alle diejenigen an, zu welchen man von der Hauptpermutation durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen gelangen kann.

Satz: Die Anzahl der geraden Permutationen wie die der ungeraden Permutationen beträgt $\frac{1}{2}n!$

Beweis: Man denke sich in jeder geraden Permutation dieselbe Transposition ausgeführt, z. B. in allen die beiden ersten Elemente vertauscht. Auf diese Weise erhält man lauter voneinander verschiedene ungerade Permutationen. Die Gesamtzahl der ungeraden Permutationen muß also mindestens ebenso groß sein wie die der geraden. Da man aber in gleicher Art schließt, daß auch die Gesamtzahl der geraden Permutationen mindestens ebenso groß sein muß wie die der ungeraden, so folgt, daß beide Anzahlen einander gleich sind, jede also $\frac{1}{2}n!$ beträgt.

Vielfach hat man auch „Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung" behandelt, d. h. solche, bei welchen gewisse Elemente von gewissen Stellen ausgeschlossen sind. L. Euler (Mémoires de St. Pétersbourg, III, für 1809 u. 1810, herausgeg. 1811, S. 57) hat z. B. untersucht, wie viele Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, ... n so beschaffen sind, daß keins der Elemente auf seinem natürlichen Platze steht. M. Cantor und Baur (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2 (1857), S. 103 u. S. 267) haben sich mit der Aufgabe beschäftigt: Gegeben sind $2n$ Elemente, von denen je zwei gleich sind, $a_1, a_1; a_2, a_2; \ldots a_n, a_n$. Auf wie viele Arten können sie so permutiert werden, daß nicht zwei gleiche Elemente unmittelbar aufeinander folgen? usw. Wegen der Lösung dieser und anderer hierher gehöriger Probleme verweisen wir auf das bereits zitierte Lehrbuch der Kombinatorik von E. Netto, Leipzig 1901.

Bildet man aus den gegebenen n Elementen Mengen oder „Komplexionen", deren jede nicht sämtliche Elemente, sondern nur eine be-

stimmte Anzahl von ihnen enthält, so bekommt man die Variationen und die Kombinationen von n Elementen.

B. Variationen.

I. Variationen ohne Wiederholung.

Unter einer Variation k^{ter} Klasse von n Elementen ohne Wiederholung versteht man eine Komplexion, die aus k unter den n als verschieden vorausgesetzten Elementen besteht, und bei welcher unser Interesse auch auf die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Komplexion gerichtet ist, so daß zwei solche Komplexionen auch dann als verschieden gelten, wenn sie aus denselben Elementen, aber in verschiedener Reihenfolge zusammengesetzt sind. So können wir z. B. die dreiziffrigen dekadischen Zahlen, welche nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede höchstens einmal enthalten, als Variationen dritter Klasse ohne Wiederholung der fünf Elemente 1, 2, 3, 4, 5 ansehen. Wir stellen uns die Aufgabe, die Anzahl $V_n^{(k)}$ der Variationen k^{ter} Klasse ohne Wiederholung von n Elementen zu bestimmen. Offenbar ist $V_n^{(1)} = n$. Die sämtlichen Variationen zweiter Klasse erhält man, wenn man an die erste Stelle irgend eins der n Elemente, an die zweite Stelle irgend eins der $(n-1)$ übrigen setzt, also wird $V_n^{(2)} = n \cdot (n-1)$. Irgend eine Variation $(k+1)^{\text{ter}}$ Klasse entsteht, wenn man ein beliebiges der n Elemente an die erste Stelle setzt und auf die übrigen k Plätze eine beliebige Variation k^{ter} Klasse der $(n-1)$ andern Elemente. Daraus folgt $V_n^{(k+1)} = n \cdot V_{n-1}^{(k)}$. Wenn man nun schon weiß, daß für irgend einen ganzzahligen Wert von k, welcher $< n$,

$$V_n^{(k)} = n(n-1)\;(n-2)\;\ldots\;(n-(k-1)),$$

also

$$V_{n-1}^{(k)} = (n-1)(n-2)(n-3)\;\ldots\;(n-k) \text{ ist,}$$

so schließen wir jetzt mittels der Gleichung

$$V_n^{(k+1)} = n \cdot V_{n-1}^{(k)},$$

daß

$$V_n^{(k+1)} = n\,(n-1)\,(n-2)\;\ldots\;(n-k).$$

Die Formel gilt also auch für den um 1 größeren Wert $k+1$. Da sie nun tatsächlich für $k=2$ richtig ist, so haben wir für jeden ganzzahligen Wert $k\,(\leq n)$ bewiesen, daß

$$V_n^{(k)} = n\,(n-1)\,(n-2)\;\ldots\;(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Die Anzahl der sämtlichen aus 1, 2, 3, 4, 5 zu bildenden und

aus lauter verschiedenen Ziffern bestehenden dreiziffrigen Zahlen ist demnach $V_5^{(3)} = \frac{5!}{2!} = 60$.

Für $k = n$ gehen die Variationen in die Permutationen der n Elemente über, und es wird

$$V_n^{(n)} = n! = P_n.$$

Die Permutationen sind also nur ein besonderer Fall der Variationen[1]).

II. Variationen mit Wiederholung.

Es seien die n Elemente, aus denen wir unsere Komplexionen bilden, nicht sämtlich voneinander verschieden; μ_1 Elemente seien a_1, μ_2 Elemente $a_2, \ldots$ μ_m Elemente a_m, wobei

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = n.$$

Eine Komplexion, welche irgend k von diesen n Elementen enthält, wird (wieder unter der Voraussetzung, daß die Reihenfolge der Elemente innerhalb der Komplexion von Bedeutung ist) zu den Variationen k^{ter} Klasse mit Wiederholung von n Elementen gerechnet. Die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ können voneinander verschieden sein. Kommen unter ihnen auch solche vor, die kleiner als k sind, so spricht man von Variationen k^{ter} Klasse mit „beschränkter Wiederholung“. Sind dagegen die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ sämtlich mindestens gleich k, dürfen also in jeder Komplexion beliebig viele der k Plätze, auch alle k, von einem der Elemente $a_1, a_2, \ldots a_m$ eingenommen werden, so heißen die Variationen „Variationen mit unbeschränkter Wiederholung“ oder kürzer „Variationen mit Wiederholung“. Wegen der Variationen mit beschränkter Wiederholung, die wir hier nicht ausführlich behandeln können, verweisen wir auf E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, § 23 ff. Um alle Variationen k^{ter} Klasse mit unbeschränkter Wiederholung zu erhalten, ordnen wir die uns zur Verfügung stehenden n Elemente in folgender Weise:

$$\begin{array}{ll} 1) & a_1,\ a_2, \ldots a_m, \\ 2) & a_1,\ a_2, \ldots a_m, \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k) & a_1,\ a_2, \ldots a_m. \end{array}$$

1) L. Öttinger (Arch. d. Math. u. Phys. 15. Bd., S. 241, 1850) tritt deshalb sehr lebhaft dafür ein, daß man nur zwei kombinatorische Grundoperationen unterscheiden solle, die Variationen, die er „Versetzungen“ nennt, und die Kombinationen, die er als „Verbindungen“ bezeichnet. Aus pädagogischen Gründen dürfte es sich aber empfehlen, den besonderen Fall der Permutationen vorweg zu nehmen und bei der allgemein üblichen Dreiteilung der kombinatorischen Operationen zu bleiben.

Wenn auch einige der $a_1, a_2, \ldots a_m$ öfter als k mal vorkommen sollten, so brauchen wir zur Bildung der Variationen k^{ter} Klasse doch nicht mehr als die angegebenen Elemente. Man setze nun an die erste Stelle irgend ein Glied der ersten Reihe, an die zweite unabhängig hiervon irgend ein Glied der zweiten Reihe usw., an die k^{te} Stelle irgend ein Element der k^{ten} Reihe. Da dies auf $\overbrace{m \cdot m \cdots m}^{(k \text{ Faktoren})} = m^k$ Arten geschehen kann, ist die Anzahl der Variationen k^{ter} Klasse mit unbeschränkter Wiederholung von n Elementen, unter denen es gerade m voneinander verschiedene gibt, gleich m^k. Auf den Wert von n kommt es also gar nicht an, es ist nur nötig, daß $n \geqq m \cdot k$; k muß selbstverständlich kleiner als n, kann aber größer als m sein.

Beispiel: Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 lassen sich $5^3 = 125$ dreiziffrige Zahlen bilden, wenn in einer Zahl an verschiedenen Stellen auch gleiche Ziffern stehen dürfen.

C. Kombinationen.

I. Kombinationen ohne Wiederholung.

Wenn uns in der einzelnen Komplexion die Reihenfolge der Elemente gleichgültig ist, zwei Komplexionen also nicht mehr als verschieden gelten, falls sie aus denselben Elementen, aber in verschiedener Reihenfolge bestehen, so nennt man die Komplexion eine „Kombination“, und zwar eine „Kombination ohne Wiederholung“, wenn die n Elemente, aus denen wir die zur Bildung der Komplexion verwendeten k Elemente entnehmen, sämtlich voneinander verschieden sind. Da je $k!$ Variationen k^{ter} Klasse ohne Wiederholung, welche sich nur durch die Reihenfolge ihrer Elemente unterscheiden, sich auf eine einzige Kombination reduzieren (die wir uns immer so geordnet denken können, daß keine Inversion vorkommt), so wird die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k^{ten} Klasse

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

oder auch

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Bei der Vertauschung von k mit $n-k$ bleibt die rechte Seite ungeändert, also

$$C_n^{(n-k)} = C_n^{(k)}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich auch aus der Überlegung, daß jedesmal, wenn man aus n Elementen k zu einer Gruppe

vereinigt, $(n-k)$ übrig bleiben, daß sich also aus n Elementen ebenso viele Kombinationen zu $(n-k)$ Elementen bilden lassen wie zu k Elementen.

Die Zahl

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!},$$

die wir soeben als Wert von $C_n^{(k)}$ gefunden haben, tritt in vielen mathematischen Entwicklungen auf. Man hat deshalb für sie ein abkürzendes Zeichen $\binom{n}{k}$, gelesen: n über k, eingeführt[1]).

Unter den Zahlen $\binom{n}{k}$ bestehen sehr viele Relationen[2]); wir beschränken uns auf die Herleitung der einfachsten und wichtigsten.

a) In der Gleichung

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

die zunächst nur gilt, wenn $1 \leqq k \leqq n-1$, hat die linke Seite auch noch eine Bedeutung für $k=n$, es ist nämlich $\binom{n}{n}=1$. Legen wir dem an sich bedeutungslosen Symbol $\binom{n}{0}$ den Wert 1 bei, so besteht die Gleichung auch für $k=0$ und $k=n$.

b) Es ist

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

Erster Beweis: Bringt man $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k-1}$ auf den gemeinsamen Nenner $k!$, so wird

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)+n(n-1)\cdots(n-k+2)k}{k!}\\&=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1+k)}{k!}\\&=\binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Die $C_{n+1}^{(k)}=\binom{n+1}{k}$ Kombinationen von $(n+1)$ Elementen zur k^{ten} Klasse ohne Wiederholung teile man in zwei Gruppen. In die erste bringe man alle die Kombinationen,

1) L. Euler schrieb erst $\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]$, später $\left(\frac{n}{k}\right)$; den Bruchstrich hat dann Rabe (Journ. f. Math., Bd. 42 (1851), S. 350) wieder fortgelassen.

2) Vgl. E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik, § 156, auch H. Schubert, Niedere Analysis (Leipzig 1902), I. Teil, § 4.

welche das $(n+1)^{\text{te}}$ Element nicht enthalten; ihre Anzahl ist $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$. Die zweite Gruppe enthält dann alle die Kombinationen, welche aus dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Elemente und irgend einer Kombination ohne Wiederholung der ersten n Elemente zur Klasse $(k-1)$ bestehen; deren Anzahl beträgt $C_n^{(k-1)} = \binom{n}{k-1}$.

Also

$$C_{n+1}^{(k)} = C_n^{(k)} + C_n^{(k-1)}$$

oder

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.\,^{1)}$$

Aus der soeben bewiesenen Formel b) kann man eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen:

1. Es ist

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1;$$
$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1.$$

Das Symbol $\binom{n}{k}$ stellt also für $n = 2$ und $n = 3$ bei $0 \leqq k \leqq n$ ganze Zahlen dar. Mittels der Formel b) ergibt sich durch den Schluß von n auf $n+1$, daß $\binom{n}{k}$ für jeden positiven ganzzahligen Wert von n und jeden ganzzahligen Wert von k, der zwischen 0 und n liegt, eine ganze Zahl ist, was natürlich auch schon aus $\binom{n}{k} = C_n^{(k)}$ zu schließen war.

2. Die wiederholte Anwendung der Formel b) liefert die Gleichungen:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$
$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2},$$
$$\binom{n-2}{k-2} = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n-k+2}{2} = \binom{n-k+1}{2} + \binom{n-k+1}{1},$$
$$\binom{n-k+1}{1} = \binom{n-k}{1} + \binom{n-k}{0},$$

1) Viele Formeln der Kombinationslehre lassen sich nach ähnlicher Methode beweisen, nämlich durch verschiedene Zerlegungen der sämtlichen Kombinationen einer bestimmten Klasse in Gruppen.

deren Addition ergibt:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-2}+\cdots+\binom{n-k+1}{2}+\binom{n-k}{1}+1.$$

Für den letzten Summanden 1 kann man auch $\binom{n-k-1}{0}$ schreiben.

3. Aus Formel b) können wir auch die folgenden Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},\\
\binom{n-1}{k} &= \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1},\\
\binom{n-2}{k} &= \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\binom{k+1}{k} &= \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1},\\
\binom{k}{k} &= \binom{k-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

Durch Addition folgt:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\cdots+\binom{k}{k-1}+\binom{k-1}{k-1},$$

oder auch, wenn man k für $k-1$ setzt und die Summanden der rechten Seite in umgekehrter Reihenfolge schreibt:

$$\binom{n}{k+1}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n-2}{k}+\binom{n-1}{k}.$$

Die auf der rechten Seite stehenden Zahlen bezeichnet man als die „figurierten Zahlen“ k^{ter} Ordnung.

Die Gleichung besagt, daß die Summe der ersten $n-k$ figurierten Zahlen k^{ter} Ordnung gleich der $(n-k)^{\text{ten}}$ figurierten Zahl $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Die ν ersten figurierten Zahlen der ersten, bezüglich der zweiten, bezüglich der dritten Ordnung sind:

I) $\binom{1}{1}=1,\ \binom{2}{1}=2,\ \binom{3}{1}=3,\ \binom{4}{1}=4,\ \ldots\ \binom{\nu}{1}=\nu;$

II) $\binom{2}{2}=1,\ \binom{3}{2}=3,\ \binom{4}{2}=6,\ \binom{5}{2}=10,\ldots\binom{\nu+1}{2}=\frac{(\nu+1)\nu}{1\cdot2};$

III) $\binom{3}{3}=1,\ \binom{4}{3}=4,\ \binom{5}{3}=10,\ \binom{6}{3}=20,\ldots\binom{\nu+2}{3}=\frac{(\nu+2)(\nu+1)\nu}{1\cdot2\cdot3}.$

Die figurierten Zahlen zweiter und dritter Ordnung stehen in

Beziehung zu gewissen geometrischen Figuren[1]). Wenn man jede Seite (a) eines gleichseitigen Dreiecks in ν gleiche Abschnitte $\left(\alpha = \frac{a}{\nu}\right)$ teilt und die von dem Schnittpunkte gleich weit entfernten Teilpunkte je zweier Seiten durch (zur dritten Seite parallele) Gerade miteinander verbindet, so zerfällt das gegebene Dreieck in eine Anzahl (ν^2) gleichseitiger Dreiecke mit der Seite α. Die Zahl der Eckpunkte sämtlicher Teildreiecke beträgt

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \nu + (\nu + 1) = \binom{\nu + 2}{2},$$

ist also gleich der $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ figurierten Zahl zweiter Ordnung. Dieser Beziehung wegen heißen die figurierten Zahlen zweiter Ordnung auch Dreieckszahlen.

Teilt man drei in einer Ecke zusammenstoßende Kanten eines regelmäßigen Tetraeders in je ν gleiche Abschnitte (α), legt durch je drei von dieser Ecke gleich weit entfernte Teilpunkte Ebenen und zerlegt dann wie vorher jedes der ausgeschnittenen ν Dreiecke (die Grundfläche eingerechnet) in gleichseitige Dreiecke mit der Seite α, so beträgt die Anzahl der sämtlichen Eckpunkte

$$1 + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{\nu + 2}{2} = \binom{\nu + 3}{3},$$

ist also gleich der $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ figurierten Zahl dritter Ordnung. Deswegen heißen die figurierten Zahlen dritter Ordnung auch Tetraedralzahlen.

Weiter gehen wir auf die figurierten Zahlen nicht ein, da ihnen in der neueren Mathematik nicht mehr dieselbe Bedeutung wie im 16. bis 18. Jahrhundert beigelegt wird. Vgl. Baltzer, Elemente, 1. Bd., 2. Buch § 28.

II. Kombinationen mit Wiederholung.

Eine Kombination k^{ter} Klasse von n Elementen gehört zu den Kombinationen mit Wiederholung, wenn die n Elemente, aus denen man k zu ihrer Bildung herausgegriffen hat, nicht sämtlich voneinander verschieden sind. Es mögen wieder wie in B II (S. 183) von den n Elementen μ_1 gleich a_1, μ_2 gleich a_2, ... μ_m gleich a_m und

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = n$$

1) Die Veranschaulichung dieser Zahlen durch geometrische Gebilde stammt aus der pythagoreischen Schule. Vgl. Cantor I, S. 157. Auch spätere griechische Mathematiker haben sich vielfach mit den figurierten Zahlen beschäftigt; Diophant hat eine besondere Abhandlung über „Polygonalzahlen" verfaßt; vgl. Cantor I, S. 454.

sein. k muß natürlich einen kleineren Wert als n, kann aber einen größeren als m, die Anzahl der voneinander verschiedenen Elemente, haben. Wir behandeln hier nur den Fall der Kombinationen mit unbeschränkter Wiederholung, in welchem die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ alle mindestens gleich k sind, so daß beliebig viele der k Plätze einer Komplexion, auch alle k, von untereinander gleichen Elementen eingenommen werden können. Um alle Kombinationen k^{ter} Klasse dieser Elemente zu erhalten, gehen wir von der schon in B II benutzten Anordnung aus:

$$\begin{array}{ll}
1) & a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_m, \\
2) & a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_m, \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
k) & a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_m,
\end{array}$$

nehmen aus der ersten Reihe irgend ein Glied a_{μ_1}, aus der zweiten jetzt aber nicht mehr ein ganz beliebiges, sondern entweder das gerade unter a_{μ_1} stehende oder ein rechts von diesem befindliches, a_{μ_2}, aus der dritten Reihe entweder das gerade unter a_{μ_2} stehende oder ein rechts von diesem befindliches, a_{μ_3}, usw. Da in jeder auf diese Art gebildeten Kombination die Elemente so geordnet sind, daß niemals ein höheres Element einem niederen vorangeht, sind wir sicher, in der beschriebenen Weise alle Kombinationen k^{ter} Klasse, aber jede nur einmal zu erhalten. Um ihre Anzahl zu bestimmen, bilden wir alle nach genau der gleichen Vorschrift möglichen Komplexionen k^{ter} Klasse aus dem Tableau

$$\begin{array}{ll}
1) & a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \; a_m, \\
2) & a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots \; a_{m+1}, \\
3) & a_3, \; a_4, \; a_5, \; \ldots \; a_{m+2}, \\
\cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
k) & a_k, \; a_{k+1}, \; a_{k+2}, \; \ldots \; a_{k+m-1},
\end{array}$$

das aus dem vorigen entsteht, wenn man die erste Reihe unverändert läßt, in der zweiten jeden Index um 1, in der dritten jeden Index um 2, ... in der k^{ten} jeden Index um $k-1$ erhöht. Die so entstehenden Komplexionen sind aber die sämtlichen Kombinationen k^{ter} Klasse der voneinander verschiedenen Elemente $a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots a_{m+k-1}$, deren jede nur einmal auftritt, nämlich in derjenigen Anordnung ihrer Elemente, in welcher keine Inversion vorkommt. Da jeder aus dem ersten Tableau gebildeten Komplexion eine aus dem zweiten zusammengesetzte entspricht und umgekehrt, stimmt die Anzahl der Kombinationen k^{ter} Klasse einer Reihe von Elementen, die derart in m Gruppen von mindestens je k zerfallen, daß die Elemente jeder Gruppe einander gleich, die verschiedener Gruppen aber ungleich sind, überein

mit der Anzahl der Kombinationen der sämtlich voneinander verschiedenen Elemente $a_1, a_2, \ldots a_{m+k-1}$ zur Klasse k, ist also gleich

$$C_{m+k-1}^{(k)} = \binom{m+k-1}{k}.$$

Der Grundgedanke des soeben vorgetragenen Beweises findet sich zuerst bei H. F. Scherk, Journ. f. Math., Bd. III (1828), S. 97 und dann wieder bei F. A. Förstemann, Journ. f. Math., Bd. XIII (1835), S. 237.

D. Eine Anwendung der Kombinatorik.

Die Hauptanwendungen der Kombinatorik werden wir in den nächsten Paragraphen dieses Kapitels behandeln (Binomischer, Polynomischer Satz, § 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung, § 6). An dieser Stelle wollen wir nur kurz auf eine schon früher (Kap. I, § 3 B, S. 12) erwähnte Aufgabe eingehen, nämlich die Frage, auf wie viele Arten eine Summe oder ein Produkt von n verschiedenen Summanden bezüglich Faktoren berechnet werden kann, wenn man bei jedem Schritte immer nur zwei aufeinander folgende Summanden (bezüglich Faktoren) zu einer Summe (bezüglich einem Produkt) zusammenfaßt und eine solche Summe (bezüglich Produkt) für die folgende Rechnung stets als einzelnes Glied ansieht. Das Problem ist behandelt worden von E. Catalan (Journ. de Mathématiques pures et appliquées, publ. par Liouville, Bd. 3 (1838), S. 515 und Bd. 6 (1841), S. 74), O. Rodrigues (dasselbe Journal, Bd. 3 (1838), S. 549) und unabhängig von diesen Autoren von E. Schröder, Zeitschr. f. Math., Bd. 15 (1870), S. 361 und Bd. 16 (1871), S. 179.

Läßt sich die Summe[1]) der n voneinander verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ bei unveränderter Reihenfolge der Summanden auf u_n Arten bilden, so ist die Zahl, welche angibt, auf wie viele Arten bei allen möglichen Reihenfolgen die Summation ausgeführt werden kann, $v_n = n! \cdot u_n$. Für $n = 4$ sind beim Festhalten an der Reihenfolge a_1, a_2, a_3, a_4 die folgenden, durch Klammern gekennzeichneten Methoden der Summenbildung möglich:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \{a_1 + [a_2 + (a_3 + a_4)]\}, \\
&2) \quad \{a_1 + [(a_2 + a_3) + a_4]\}, \\
&3) \quad [(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)], \\
&4) \quad \{[(a_1 + a_2) + a_3] + a_4\}, \\
&5) \quad \{[a_1 + (a_2 + a_3)] + a_4\}.
\end{aligned}$$

1) Wir sprechen im folgenden nur von der Addition; bei Ersatz der Worte: „Summand, Summe“ durch „Faktor, Produkt“ bleiben alle Schlüsse gültig.

Für u_{n+1} läßt sich leicht eine Rekursionsformel ableiten. Bei jeder möglichen Berechnung einer $(n+1)$ gliedrigen Summe besteht der letzte Schritt notwendig in der Zusammenfassung zweier Summanden, von denen der erste durch Addition aus den ersten i, der zweite durch Addition aus den letzten $n+1-i$ Gliedern auf irgend eine Weise entstanden ist, wo i einen der Werte $1, 2, 3, \ldots n$ hat.

Da die i gliedrige Summe auf u_i, die $(n+1-i)$ gliedrige auf u_{n+1-i} Arten (immer bei unveränderter Reihenfolge der Summanden) gebildet werden kann, so ergeben sich für einen bestimmten Wert von i gerade $u_i \cdot u_{n+1-i}$ Möglichkeiten der Summenbildung; für alle zulässigen Werte von i beträgt also die Anzahl der Möglichkeiten

$$u_{n+1} = u_1 \cdot u_n + u_2 \cdot u_{n-1} + u_3 \cdot u_{n-2} + \cdots + u_{n-1} \cdot u_2 + u_n \cdot u_1 .$$

Offenbar ist

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1,$$

also

$$u_3 = u_1 u_2 + u_2 u_1 = 2,$$

$$u_4 = u_1 u_3 + u_2 u_2 + u_3 u_1 = 2 + 1 + 2 = 5 \text{ usw.}$$

Aus der soeben angegebenen Rekursionsformel läßt sich zwar unschwer eine independente Darstellung von u_n herleiten. Wir hätten dazu aber eine Reihenentwicklung nötig, deren Kenntnis an dieser Stelle nicht vorausgesetzt werden kann. Wir wollen deshalb die einfache Methode mitteilen, welche **Rodrigues** in dem schon zitierten Aufsatze zur direkten Bestimmung von v_n gegeben hat.

Auf welche der v_n möglichen Arten man auch die Summe von n Gliedern bilden möge, so sind stets, wenn immer nur zwei Glieder zu Teilsummen zusammengefaßt werden, im ganzen $(n-1)$ Schritte, d. h. solche Zusammenfassungen zweier Glieder zu einer Teilsumme, erforderlich. Wenn man zur Berechnung der n gliedrigen Summe irgend eine bestimmte Methode gewählt hat, kann ein $(n+1)^{\text{tes}}$ Glied bei jedem der $(n-1)$ Schritte hinzugenommen werden, und zwar in vierfacher Weise, nämlich als erster oder als zweiter Summand der ersten Teilsumme oder als erster oder als zweiter Summand der zweiten Teilsumme, im ganzen also auf $4(n-1)$ Arten; endlich kann aber auch der $(n+1)^{\text{te}}$ Summand mit der fertigen Summe der n ersten Summanden, und zwar auf zwei Arten, zu einer Summe vereinigt werden. Jeder bestimmten Art der Bildung einer n gliedrigen Summe entsprechen also

$$4(n-1) + 2 = 4n - 2$$

Möglichkeiten, eine Summe aus $(n+1)$ Summanden zu bilden; deshalb ist

$$v_{n+1} = (4n - 2)\,v_n$$

oder

$$\begin{aligned} v_n &= (4n - 6)\,v_{n-1}, \\ v_{n-1} &= (4n - 10)\,v_{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_4 &= 10\,v_3, \\ v_3 &= 6\,v_2, \\ v_2 &= 2. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation der letzten $(n - 1)$ Gleichungen ergibt sich:

$$v_n = (4n - 6)(4n - 10)\cdots 10 \cdot 6 \cdot 2.$$

Catalan und Rodrigues haben in den zitierten Arbeiten auch darauf hingewiesen, daß das soeben behandelte Problem eng mit der Frage zusammenhängt: Auf wie viele Arten kann man ein ebenes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen?

Wegen weiterer Anwendungen der Kombinatorik auf Spiele usw. verweisen wir auf W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Leipzig 1901.

§ 2. Die einfachsten Rechnungen mit rationalen Funktionen.

A. Definition der ganzen rationalen Funktion.

Aus beliebigen rationalen Zahlen $a, b, c, \ldots x, y, z, \ldots$ sei durch Addition, Subtraktion, Multiplikation ein Ausdruck F gebildet worden. Da jede Subtraktion auch als Addition der entgegengesetzten Zahl aufgefaßt werden darf, können wir F auch durch bloße Anwendung der Addition und Multiplikation entstanden denken. Das Produkt zweier algebraischen Summen läßt sich immer als algebraische Summe darstellen; wir können infolgedessen den Ausdruck F stets in die Form einer algebraischen Summe bringen, deren einzelne Glieder die Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots x^\xi y^\eta z^\zeta \ldots$ haben, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \xi, \eta, \zeta, \ldots$ positive ganze Zahlen bedeuten. Wenn nun bei einer bestimmten Entwicklung, einer Aufgabe oder einem Beweise, $a, b, c, \ldots$ feste Werte behalten, während $x, y, z, \ldots$ verschiedene Werte annehmen dürfen, so wird jedem bestimmten Wertsystem $x, y, z, \ldots$ auch ein bestimmter Wert des aus ihnen gebildeten Ausdrucks F entsprechen und verschiedenen Wertsystemen $x, y, z, \ldots$ im allgemeinen auch verschiedene Werte von F. Man nennt alsdann F eine „Funktion“ der veränderlichen (oder variablen) Zahlen $x, y, z, \ldots$, und zwar wenn, wie hier vorausgesetzt, x, y, z behufs Bildung von F keiner

andern Rechenoperation als der Addition und der Multiplikation unterworfen worden sind, eine **ganze rationale Funktion**. Wollen wir es zum Ausdruck bringen, daß unser Interesse hauptsächlich auf die Variablen x, y, z gerichtet ist, so schreiben wir das Produkt $a^\alpha b^\beta c^\gamma x^\xi y^\eta z^\zeta$ auch in der kürzeren Form $C_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta$, indem wir es dahingestellt sein lassen, wie die als „Koeffizient" bezeichnete Zahl $C_{\xi\eta\zeta}$ aus a, b, c zusammengesetzt ist[1]). Nach der Anzahl der Veränderlichen, von denen eine Funktion F abhängt, spricht man von Funktionen einer, zweier, dreier usw. Variablen.

B. Addition und Subtraktion.

Die Summe und die Differenz zweier ganzen rationalen Funktionen stellen sich ohne weiteres als algebraische Summen von Produkten der Form $C_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta$ dar. Man vereinfacht den Ausdruck, indem man die Glieder, in welchen die Exponenten ξ, η, ζ dieselben Werte haben, zu einem einzigen Gliede zusammenzieht:

$$C_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta \pm C'_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta \pm C''_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta \pm \cdots$$
$$= (C_{\xi\eta\zeta} \pm C'_{\xi\eta\zeta} \pm C''_{\xi\eta\zeta} \pm \cdots)\, x^\xi y^\eta z^\zeta,$$

wofür man auch kürzer

$$K_{\xi\eta\zeta} x^\xi y^\eta z^\zeta$$

schreibt, wenn unser Interesse nicht auf die Zusammensetzung der Koeffizienten

$$K_{\xi\eta\zeta} = C_{\xi\eta\zeta} \pm C'_{\xi\eta\zeta} \pm C''_{\xi\eta\zeta} \pm \cdots$$

gerichtet ist. Die so reduzierte Form der ganzen rationalen Funktion bezeichnet man als ihre Normalform. Wenn in derselben eine Variable in der n^{ten}, aber keiner höheren Potenz vorkommt, so sagt man, die Funktion sei in bezug auf diese Variable vom n^{ten} Grade.

C. Multiplikation. Binomischer und polynomischer Lehrsatz.

Das Produkt zweier ganzen rationalen Funktionen bringt man ohne weiteres auf die Normalform einer ganzen rationalen Funktion (Kap. I, § 5 C; Kap. II, § 4; Kap. IV, § 5 A). Sind mehrere ganze rationale Funktionen miteinander zu multiplizieren, so verfährt man schrittweise, indem man zunächst das Produkt der beiden ersten bildet,

1) $C_{\xi\eta\zeta}$ kann aus a, b, c auch durch andere Rechenoperationen als durch Addition und Multiplikation entstanden sein, ohne daß F den Charakter einer ganzen rationalen Funktion von x, y, z verliert.

dann das erhaltene Produkt mit der dritten multipliziert usw. Wir wollen hier für einige spezielle, oft vorkommende Produkte die Umwandlung in eine algebraische Summe behandeln.

I. Es sei das aus n Faktoren bestehende Produkt vorgelegt:

$$(a+x_1)\cdot(a+x_2)\cdot(a+x_3)\cdots(a+x_{n-1})\cdot(a+x_n).$$

Statt zu verfahren, wie eben angegeben, können wir das Resultat auch durch folgende Überlegung finden: Jedes Glied der zu suchenden Summe ist ein Produkt aus n Faktoren, und zwar enthält es als einen Faktor einen der beiden Summanden des ersten Binoms, als einen zweiten Faktor einen der beiden Summanden des zweiten Binoms usw. Nehmen wir aus jedem Binom den ersten Summanden, so entsteht das Glied a^n; nehmen wir aus $(n-1)$ Binomen den ersten Summanden, aus dem n^{ten} dann noch übrig bleibenden den zweiten, so bekommen wir die Glieder

$$a^{n-1}x_1, \quad a^{n-1}x_2, \ldots, a^{n-1}x_{n-1}, \quad a^{n-1}x_n.$$

Nehmen wir aus $(n-2)$ Binomen den ersten Summanden, aus den beiden dann noch übrig bleibenden den zweiten, so entstehen die Glieder

$$a^{n-2}x_1x_2, \quad a^{n-2}x_1x_3, \ldots, a^{n-2}x_{n-1}x_n.$$

So weiter schließend, erkennt man, daß das vorgelegte Produkt gleich der Summe ist

$$\begin{aligned}a^n &+ a^{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+a^{n-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)+\cdots\\&+a^{n-\nu}(x_1x_2\cdots x_\nu+\cdots+x_{n-\nu+1}\cdots x_{n-1}x_n)+\cdots\\&+a(x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2x_3\cdots x_n)+x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

in welcher als Koeffizient von $a^{n-\nu}$ die Summe aller Produkte von je ν der n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auftritt, deren Anzahl gleich der Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur ν^{ten} Klasse (§ 1 C, I), also gleich $\binom{n}{\nu}$ ist. Setzen wir insbesondere

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x,$$

so wird

$$\begin{aligned}(a+x)^n = a^n &+ \binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\cdots+\binom{n}{\nu}a^{n-\nu}x^\nu+\cdots\\&+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\binom{n}{1}ax^{n-1}+x^n.\end{aligned}$$

Diese wichtige Formel, welche die n^{te} Potenz eines Binoms in Form einer Summe darstellt, heißt der **binomische Lehrsatz**[1]).

Die Koeffizienten der rechten Seite $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \cdots$, welche wir § 1 C, I als Anzahlen der Kombinationen ohne Wiederholung gefunden haben, werden wegen ihres Vorkommens in der Binomialformel auch Binomial-Koeffizienten genannt.

Für die kleineren Werte von n kann man $(a+x)^n$ durch sukzessives Ausmultiplizieren finden:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 \quad \text{usw.}$$

Hat man bereits erkannt, daß für diese Exponenten 2, 3, 4, ... die Koeffizienten der rechten Seite die Kombinationszahlen $\binom{n}{\nu}$ sind, so kann man die Gültigkeit der Binomialformel für einen beliebigen positiven ganzen Wert von n auch leicht durch den Schluß von n auf $n+1$ zeigen und hat damit einen zweiten Beweis dieses wichtigen Satzes.

Wenn nämlich

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{\nu}a^{n-\nu}x^\nu$$
$$+ \binom{n}{\nu+1}a^{n-\nu-1}x^{\nu+1} + \cdots + \binom{n}{n-1}ax^{n-1} + x^n,$$

so folgt durch Multiplikation beider Seiten mit $(a+x)$:

$$(a+x)^{n+1} = a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right]a^n x + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right]a^{n-1}x^2 + \cdots$$
$$+ \left[\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu-1}\right]a^{n-\nu+1}x^\nu + \left[\binom{n}{\nu+1} + \binom{n}{\nu}\right]a^{n-\nu}x^{\nu+1} + \cdots$$
$$+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2}\right]a^2x^{n-1} + \left[1 + \binom{n}{n-1}\right]ax^n + x^{n+1},$$

1) Die Koeffizienten der Entwicklung von $(a+x)^n$ finden sich zuerst in der Arithmetica integra von Michael Stifel (1544), welcher die Binomialformel zwar nicht ausdrücklich hinschreibt, die Koeffizienten aber bereits zur Lösung der inversen Aufgabe, der Wurzelausziehung, benutzt. Vgl. Cantor II, S. 433—434.

oder, da nach § 1 C, I b

$$\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu - 1} = \binom{n+1}{\nu}:$$

$$(a + x)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n x + \cdots + \binom{n+1}{\nu} a^{n-\nu+1} x^\nu + \cdots$$
$$+ \binom{n+1}{n} a x^n + x^{n+1}.$$

Gilt also die Binomialformel für irgend einen Wert des Exponenten, so gilt sie auch für den um 1 größeren Wert. Da sie aber für $n = 2$ richtig ist, haben wir ihre Gültigkeit für jeden positiven ganzzahligen Wert von n erwiesen.

Folgerungen:

1. Für $a = 1$ und $x = 1$ ergibt die Binomialformel

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\nu} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1.$$

2. Mittels des binomischen Satzes lassen sich sehr leicht einige Sätze beweisen, die wir früher (vgl. S. 28, 86 u. 87) auf anderem Wege etwas umständlicher gefunden haben.

a) Wenn $z > 1$, so kann z^n durch hinreichend große Werte von n beliebig groß gemacht werden.

Beweis: Es sei

$$z = 1 + p,$$

wo p eine bestimmte positive Zahl bedeutet. Nach dem binomischen Satze wird

$$z^n = (1 + p)^n = 1 + np + \binom{n}{2} p^2 + \cdots + p^n,$$

also

$$z^n > 1 + np.$$

Da durch hinreichend große Werte von n das Produkt np beliebig groß gemacht werden kann, ist unsere Behauptung erwiesen.

b) Wenn $z < 1$, so kann z^n durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden.

Beweis: Wenn $z < 1$, so ist $y = \frac{1}{z} > 1$, und weil y^n bei hinreichend großen Werten von n jede beliebige Grenze überschreiten kann, läßt sich $z^n = \frac{1}{y^n}$ beliebig klein machen.

II. Es soll

$$(a+b+c)^n = \overbrace{(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdots(a+b+c)}^{(n\ \text{Faktoren})}$$

in eine Summe verwandelt werden.

Irgend ein Glied der gesuchten Summe entsteht, indem man einen der drei Summanden des ersten Trinoms mit einem der drei Summanden des zweiten Trinoms usw., endlich mit einem der drei Summanden des n^{ten} Trinoms multipliziert. Hat man aus α Klammern den ersten Summanden a, aus β den zweiten Summanden b und aus γ den dritten Summanden c gewählt $(\alpha+\beta+\gamma=n)$, so erhält man das Produkt $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Um festzustellen, auf wie viele Arten dieses Produkt entstehen kann, denke man sich unter die α Trinome, aus welchen man den ersten Summanden genommen hat, a geschrieben, unter die β Trinome, aus welchen man den zweiten Summanden genommen hat, b und unter die γ Trinome, aus welchen man den dritten Summanden genommen hat, c gesetzt. Jede einzelne mögliche Anordnung der a, b, c entspricht gerade einem Entstehungsmodus des Produktes $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Man erhält dieses also genau so oft, wie sich n Elemente, unter denen α gleich a, β gleich b und γ gleich c sind, permutieren lassen, d. h. nach § 1 A $\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$ mal. Nun darf jede der drei Zahlen α, β, γ jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ annehmen, aber immer nur so, daß $\alpha+\beta+\gamma=n$.

Man findet deshalb sämtliche Glieder der gewünschten Summe, wenn man n auf alle möglichen Arten als Summe von drei Zahlen α, β, γ darstellt, deren jede einen der Werte $0, 1, 2, \ldots, n$ hat, das einer bestimmten Zerlegung von n entsprechende Produkt $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ mit $\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$ multipliziert und alle auf diese Weise gebildeten Glieder addiert. Gleiche Koeffizienten erhalten die Glieder, welche durch eine Vertauschung der Werte von α, β, γ auseinander hervorgehen. Unter Benutzung des griechischen Buchstabens $\sum$ als Summenzeichens drückt man die Bildungsweise der Summe kurz durch die Formel aus:

$$(a+b+c)^n = \sum_{\left.\begin{array}{l}\alpha=\\ \beta=\\ \gamma=\end{array}\right\}0,1,2,\ldots,n,} \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

mit der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma=n$.

In genau derselben Weise ergibt sich die n^{te} Potenz einer Summe von m Summanden:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \vdots \\ \alpha_m =}} \Bigg\} 0, 1, 2, \ldots, n, \quad \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_m^{\alpha_m}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n).$$

Diese Formel nennt man den „**polynomischen Lehrsatz**“ [1]). Setzt man zur Abkürzung

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = P$$

und faßt auf der rechten Seite alle Glieder zusammen, welche denselben Koeffizienten bekommen, so wird

$$P^2 = \sum a_\mu^2 + 2 \sum a_\mu a_\nu,$$

$$P^3 = \sum a_\mu^3 + 3 \sum a_\mu^2 a_\nu + 6 \sum a_\mu a_\nu a_\varrho,$$

$$P^4 = \sum a_\mu^4 + 4 \sum a_\mu^3 a_\nu + 6 \sum a_\mu^2 a_\nu^2 + 12 \sum a_\mu^2 a_\nu a_\varrho + 24 \sum a_\mu a_\nu a_\varrho a_\sigma$$

usw., wo das Zeichen $\sum$ andeutet, daß die Summe aller derjenigen Glieder genommen werden soll, die aus dem hingeschriebenen entstehen, indem man für $\mu, \nu, \varrho, \sigma, \ldots$ alle Wertsysteme setzt, in denen diese Indices irgend welche voneinander verschiedenen Werte aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$ haben.

Die Entwicklung von $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$ steht in enger Beziehung zu den Variationen und den Kombinationen n^{ter} Klasse mit Wiederholung. Läßt man die beim Ausmultiplizieren der n Klammern auftretenden Glieder als Produkte stehen, ohne die abkürzende Potenz-Schreibweise anzuwenden, so bilden sie die sämtlichen Variationen mit Wiederholung der m Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zur n^{ten} Klasse, deren Anzahl nach § 1 B, II, S. 184 m^n beträgt. Betrachtet man die Glieder, welche sich nur durch die Stellung ihrer Faktoren unterscheiden, welche also dasselbe Produkt $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}$ ergeben, nicht als verschieden, so hat man die sämtlichen Kombinationen mit Wiederholung von m Elementen zur n^{ten} Klasse; daher beträgt die Anzahl der voneinander verschiedenen Glieder in der Entwicklung von $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$ nach § 1 C II, S. 190, $\binom{m+n-1}{n}$. Auf so viele Arten läßt sich also auch die

1) Er findet sich zuerst erwähnt in einem Briefe von Leibniz an Johann Bernoulli (Mai 1695). Die angegebene Beweismethode ist natürlich auch für die Herleitung des binomischen Satzes zu gebrauchen.

Zahl n als Summe von m Summanden darstellen, deren jeder einen der Werte 0, 1, 2, ..., n hat.

Um

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m)^n$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Summe zu verwandeln, gehen wir aus von

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\left.\begin{array}{l}\alpha_0 = \\ \alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \cdots \\ \alpha_m = \end{array}\right\} 0, 1, 2, \ldots, n,} \frac{n!}{\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n),$$

und setzen:

$$a_\mu = A_\mu x^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Dann wird

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m)^n$$

$$= \sum_{\left.\begin{array}{l}\alpha_0 = \\ \alpha_1 = \\ \alpha_2 = \\ \vdots \\ \alpha_m = \end{array}\right\} 0, 1, 2, \ldots, n,} \frac{n!}{\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ \ldots \ A_m^{\alpha_m} \cdot x^{0\alpha_0 + 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n).$$

Alle die Glieder der rechten Seite, in welchen die Summe $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m$ denselben Wert hat, lassen sich zu je einem Gliede zusammenziehen. Der Koeffizient von x^k $(k = 0, 1, 2, \ldots, mn)$ ist also die Summe aller der Ausdrücke, die aus

$$\frac{n!}{\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_m!} A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ \ldots \ A_m^{\alpha_m}$$

hervorgehen, indem man für $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ aus der Reihe der Zahlen 0, 1, 2, ..., n alle Werte wählt, für welche

1. $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n$

und 2. $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + m\alpha_m = k.$

So ist z. B.

$$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots)^2$$
$$= A_0^2 + 2A_0 A_1 x + (2A_0 A_2 + A_1^2) x^2$$
$$+ (2A_0 A_3 + 2A_1 A_2) x^3 + (2A_0 A_4 + 2A_1 A_3 + A_2^2) x^4$$
$$+ (2A_0 A_5 + 2A_1 A_4 + 2A_2 A_3) x^5 + \cdots,$$

$$
\begin{aligned}
(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots)^3 \\
= A_0^3 + 3A_0^2 A_1 x + (3A_0 A_1^2 + 3A_0^2 A_2)x^2 \\
+ (3A_0^2 A_3 + 6A_0 A_1 A_2 + A_1^3)x^3 \\
+ (3A_0^2 A_4 + 6A_0 A_1 A_3 + 3A_0 A_2^2 + 3A_1^2 A_2)x^4 \\
+ (3A_0^2 A_5 + 6A_0 A_1 A_4 + 6A_0 A_2 A_3 + 3A_1^2 A_3 + 3A_1 A_2^2)x^5 + \cdots.
\end{aligned}
$$

D. Division.

Es seien

$$f(x, y, z, a, b, c), \quad g(x, y, z, a, b, c), \quad F(x, y, z, a, b, c)$$

ganze rationale Funktionen von x, y, z, a, b, c, und es sei ferner

$$F = f \cdot g.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, aus F und f die Funktion g, d. h. den Quotienten

$$F : f,$$

zu berechnen. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Glieder der Funktionen in der folgenden Weise geordnet. Wir setzen zunächst eine bestimmte Reihenfolge der Größen fest, von denen die Funktionen abhängen, etwa x, y, z, a, b, c, und schreiben zuerst die Glieder auf, in denen der Exponent von x den größten Wert hat, dann die, in welchen der Exponent von x den nächstkleineren Wert hat usw. Die Gesamtheit der Glieder, bei denen x in ein und dieselbe Potenz erhoben vorkommt, ordnen wir nach fallenden Potenzen von y; alle, bei denen sowohl x wie y denselben Exponenten haben, nach fallenden Potenzen von z; die, bei denen x, y und z denselben Exponenten haben, nach fallenden Potenzen von a usw. Das Glied, welches bei dieser Anordnung[1]) an die erste Stelle kommt, wollen wir das ausgezeichnete Glied der Funktion nennen. Multipliziert man zwei Funktionen f, g miteinander, so ergibt das Produkt des ausgezeichneten Gliedes von f mit dem ausgezeichneten Gliede von g gerade das ausgezeichnete Glied von $F = f \cdot g$. Auf dieser Erkenntnis beruht die folgende Methode, aus F und f die Funktion g zu berechnen. Indem man das ausgezeichnete Glied von F durch das von f dividiert, erhält man das ausgezeichnete Glied A von g. Setzt man nun

$$g = A + g_1,$$

1) Statt mit den höchsten könnten wir überall auch mit den niedrigsten Potenzen beginnen.

so wird

$$F = f \cdot g = A \cdot f + f \cdot g_1$$

und

$$F_1 = F - A \cdot f = f \cdot g_1.$$

Subtrahiert man also von F das Produkt $A \cdot f$ und dividiert das ausgezeichnete Glied des Restes $F_1 = F - A \cdot f$ durch das ausgezeichnete Glied von f, so findet man das ausgezeichnete Glied B von g_1. Setzt man nun weiter

$$g_1 = B + g_2,$$

$$F_1 = f \cdot g_1 = f \cdot B + f \cdot g_2,$$

$$F_2 = F_1 - f \cdot B = f \cdot g_2,$$

so ergibt die Division des ausgezeichneten Gliedes von F_2 durch das von f das ausgezeichnete Glied C von g_2. In derselben Weise fortfahrend, findet man alle übrigen Glieder der Funktion g.

Dieses Divisionsverfahren ist ohne weiteres auch dann zu gebrauchen, wenn F und f Summen von Produkten von Potenzen sind, deren Exponenten sämtlich oder zum Teil negative oder gebrochene Werte haben; denn das Prinzip der Anordnung, auf welchem die Divisionsmethode beruht, ist auch in diesem Falle anwendbar, und für die Multiplikation und Division solcher Potenzen gelten (Kap. II, § 5 B und Kap. IV, § 7 C) dieselben Regeln wie für die entsprechenden Rechnungen bei Potenzen, deren Exponenten natürliche Zahlen sind.

Beispiel. Es sei

$$F = 3ax^6y - 6x^6y + 9x^4y^4 - 2a^2x^4y^2 + 4ax^4y^2 - 3ax^3y^4$$
$$+ 4a^3x^3y^2 - 8a^2x^3y^3 - 6ax^2y^5 + 14a^2xy^5 - 4a^3y^5$$

und

$$f = ax^3y - 2x^3y + 3xy^4 - ay^4.$$

Wie man erkennt, sind die Glieder bereits nach dem angegebenen Prinzip geordnet.

Das ausgezeichnete Glied A der gesuchten Funktion g ist der Quotient

$$3ax^6y : ax^3y = 3x^3.$$

$$F_1 = F - 3x^3f = -2a^2x^4y^2 + 4ax^4y^2 + 4a^3x^3y^2$$
$$- 8a^2x^3y^3 - 6ax^2y^5 + 14a^2xy^5 - 4a^3y^5.$$

Das nächste Glied B der Funktion g ist der Quotient

$$-2a^2x^4y^2 : ax^3y = -2axy.$$

$$F_2 = F_1 + 2axy \cdot f = 4a^3x^3y^2 - 8a^2x^3y^2 + 12a^2xy^5 - 4a^3y^5.$$

$$C = 4a^3x^3y^2 : ax^3y = 4a^2y.$$

$$F_2 - 4a^2y \cdot f = 0;$$

also

$$F_1 + 2axyf - 4a^2yf = 0,$$

und

$$F - 3x^3f + 2axyf - 4a^2yf = 0,$$

d. h.

$$F = f \cdot (3x^3 - 2axy + 4a^2y).$$

Häufig vorkommende Quotienten sind:

$$(x^n - y^n) : (x - y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1};$$
$$(x^{2n+1} + y^{2n+1}) : (x + y) = x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots - xy^{2n-1} + y^{2n}$$

Wählt man für F und f beliebige Summen von Produkten von Potenzen, so führt die Anwendung unseres Divisionsverfahrens auf F, f im allgemeinen nicht zu dem Reste Null, wie weit man auch rechnen möge; es gibt dann eben keine Funktion g derselben Art, so daß $F = f \cdot g$. Man kann in diesem Falle das Verfahren bis zu einer beliebigen Stelle fortsetzen, muß dann aber den zugehörigen Rest angeben. Wenn z. B.

$$F = x^2 + y^2, \quad f = x + y,$$

so geht die Division $F : f$ nicht auf. Berechnet man den Quotienten $x - y + \frac{2y^2}{x} - \frac{2y^3}{x^2} + \cdots$ bis zu dem Gliede $(-1)^n \cdot \frac{2y^n}{x^{n-1}}$, so bleibt der Rest $(-1)^{n+1} \cdot \frac{2y^{n+1}}{x^{n-1}}$; es besteht also die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = x - y + \frac{2y^2}{x} - \frac{2y^3}{x^2} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{2y^n}{x^{n-1}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2y^{n+1}}{x^{n-1}(x + y)}.$$

Für $y = 1$ wird

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{2}{x^{n-1}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{x^{n-1}(x + 1)}.$$

Wenn $x > 1$ und δ eine beliebig klein gegebene positive Zahl bedeutet, so kann die positive ganze Zahl n stets so bestimmt werden, daß

$\frac{2}{x^{n-1}} < \delta$ [vgl. S. 196], also um so mehr $\frac{2}{x^{n-1}(x+1)} < \delta$. Bis auf einen Fehler, dessen absoluter Betrag δ nicht erreicht, ist alsdann

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{2}{x^{n-1}}.$$

Für $x = 1$ geht die obige Gleichung über in

$$\frac{1+y^2}{1+y} = 1 - y + 2y^2 - 2y^3 + \cdots + (-1)^n \cdot 2y^n + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2y^{n+1}}{1+y}.$$

Wenn $0 < y < 1$ und δ eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so kann die positive ganze Zahl n stets so gewählt werden, daß

$$2y^{n+1} < \delta,$$

also um so mehr

$$\frac{2y^{n+1}}{1+y} < \delta.$$

Bis auf einen Fehler, der kleiner ist als δ, hat man alsdann

$$\frac{1+y^2}{1+y} = 1 - y + 2y^2 - 2y^3 + \cdots + (-1)^n \cdot 2y^n.$$

E. Wurzelausziehung.

Um, wenn $F = f^2$ gegeben ist, die Funktion f zu bestimmen, denken wir uns wieder die Funktionen nach dem unter D angegebenen Prinzipe geordnet.

Ist A das ausgezeichnete Glied von f und

$$f = A + f_1,$$

so wird

$$F = f^2 = A^2 + 2Af_1 + f_1^2.$$

Da A^2 das ausgezeichnete Glied von F ist, findet man das ausgezeichnete Glied von f, indem man aus dem von F die Quadratwurzel auszieht. Nun bilde man die Differenz

$$F_1 = F - A^2 = 2Af_1 + f_1^2$$

und setze

$$f_1 = B + f_2,$$

wo B das (noch unbekannte) ausgezeichnete Glied von f_1 bezeichnet. Dann wird

$$F_1 = 2AB + 2Af_2 + B^2 + 2Bf_2 + f_2^2.$$

Man erkennt leicht, daß $2AB$ das ausgezeichnete Glied von F_1

ist. Um B zu finden, hat man also das ausgezeichnete Glied von F_1 durch $2A$ zu dividieren. Danach berechne man die Differenz

$$F_2 = F_1 - (2AB + B^2) = 2Af_2 + 2Bf_2 + f_2^2$$

und setze

$$f_2 = C + f_3,$$

wo C das ausgezeichnete Glied von f_2 bedeutet.

Es wird dann

$$F_2 = 2AC + 2Af_3 + 2BC + 2Bf_3 + C^2 + 2Cf_3 + f_3^2.$$

C erhält man, indem man das ausgezeichnete Glied $2AC$ von F_2 durch $2A$ teilt, usw. So fortfahrend, findet man der Reihe nach alle Glieder der gesuchten Funktion f, vorausgesetzt, daß überhaupt eine solche existiert, deren Quadrat gleich der gegebenen Funktion F ist.

Unter Benutzung der Formeln für $(A + f_1)^3, \ldots, (A + f_1)^n$ kann man in ähnlicher Weise Verfahren zur Ausziehung einer Wurzel mit beliebigem Wurzelexponenten entwickeln.

§ 3. Arithmetische Reihen beliebiger Ordnung.

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ seien beliebige Zahlen in bestimmter Reihenfolge. Indem wir jede von der nächstfolgenden subtrahieren, erhalten wir die Zahlen

$$d_0^{(1)} = a_1 - a_0, \quad d_1^{(1)} = a_2 - a_1, \quad d_2^{(1)} = a_3 - a_2,$$
$$d_3^{(1)} = a_4 - a_3, \quad d_4^{(1)} = a_5 - a_4, \ldots,$$

welche wir als die erste Differenzenreihe der gegebenen Zahlenfolge bezeichnen. Die Differenzen je zweier aufeinanderfolgenden Glieder derselben liefern die zweite Differenzenreihe:

$$d_0^{(2)} = a_2 - 2a_1 + a_0, \quad d_1^{(2)} = a_3 - 2a_2 + a_1, \quad d_2^{(2)} = a_4 - 2a_3 + a_2,$$
$$d_3^{(2)} = a_5 - 2a_4 + a_3, \ldots.$$

Entsprechend erhält man weiter die dritte Differenzenreihe:

$$d_0^{(3)} = a_3 - 3a_2 + 3a_1 - a_0, \quad d_1^{(3)} = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1,$$
$$d_2^{(3)} = a_5 - 3a_4 + 3a_3 - a_2, \ldots.$$

Die ν^{te} Differenzenreihe lautet:

$$\text{(I)} \quad d_0^{(\nu)} = a_\nu - \binom{\nu}{1} a_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_{\nu-2} - \binom{\nu}{3} a_{\nu-3} + \cdots + (-1)^\nu a_0,$$

$$d_1^{(\nu)} = a_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} a_\nu + \binom{\nu}{2} a_{\nu-1} - \cdots + (-1)^\nu a_1, \ldots.$$

Von der Richtigkeit der Werte für $d_0^{(\nu)}$, $d_1^{(\nu)}, \ldots$ überzeugt man sich leicht durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ unter Benutzung der Formel (§ 1 C, I b, S. 185):

$$\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} = \binom{\nu+1}{k}.$$

Wenn die Glieder einer der gebildeten Differenzenreihen, etwa der p^{ten}, sämtlich denselben Wert haben, so nennt man die gegebene Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ eine **„arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung“**. Die von uns Kap. I, § 5 E, Zusatz, S. 22 kurz „arithmetische Reihe“ genannte Zahlenfolge ist nach der soeben gegebenen Definition eine arithmetische Reihe erster Ordnung. Die erste Differenzenreihe einer arithmetischen Reihe p^{ter} Ordnung ist eine arithmetische Reihe $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die zweite eine arithmetische Reihe $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung usw., endlich die $(p-1)^{\text{te}}$ Differenzenreihe eine arithmetische Reihe erster Ordnung.

Wenn die $(p + 1)$ ersten Glieder $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ willkürlich gegeben sind, kann man es durch passende Bestimmung von a_{p+1}, $a_{p+2}, \ldots$ erreichen, daß die sämtlichen a eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung bilden. Durch $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ ist nämlich (nach I) $d_0^{(p)}$ bestimmt. Wir brauchen dann a_{p+1} nur so zu wählen, daß $d_1^{(p)} = d_0^{(p)}$, a_{p+2} so, daß $d_2^{(p)} = d_0^{(p)}$, usw.

Statt durch ihre ersten $(p + 1)$ Glieder kann man eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung aber auch durch ihr Anfangsglied a_0 und die Anfangsglieder ihrer p ersten Differenzenreihen, $d_0^{(1)}$, $d_0^{(2)}, \ldots, d_0^{(p)}$, charakterisieren. Um zu zeigen, daß durch diese Zahlen jedes Glied der arithmetischen Reihe p^{ter} Ordnung bestimmt ist, bilden wir aus $d_0^{(p-1)}$ und $d_0^{(p)}$ zunächst die Differenzenreihe $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dieselbe lautet:

$$d_0^{(p-1)}, \quad d_1^{(p-1)} = d_0^{(p-1)} + d_0^{(p)}, \quad d_2^{(p-1)} = d_0^{(p-1)} + 2\,d_0^{(p)}, \ldots,$$
$$d_{n-1}^{(p-1)} = d_0^{(p-1)} + (n-1)\,d_0^{(p)},$$

und die Summe ihrer ersten n Glieder beträgt:

$$\begin{aligned} s_n^{(p-1)} &= n\,d_0^{(p-1)} + (1 + 2 + \cdots + (n-1))\,d_0^{(p)} \\ &= n\,d_0^{(p-1)} + \binom{n}{2} d_0^{(p)} \end{aligned}$$

(vgl. Kap. I, § 5 E, Zusatz, S. 22).

Weiter ergibt sich für das n^{te} Glied der Differenzenreihe $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{aligned}d_{n-1}^{(p-2)} &= d_0^{(p-2)} + d_0^{(p-1)} + d_1^{(p-1)} + \cdots + d_{n-2}^{(p-1)} \\ &= d_0^{(p-2)} + s_{n-1}^{(p-1)} \\ &= d_0^{(p-2)} + (n-1)d_0^{(p-1)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(p)}\end{aligned}$$

und für die Summe der n ersten Glieder der Differenzenreihe $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{aligned}s_n^{(p-2)} &= n d_0^{(p-2)} + [1 + 2 + \cdots + (n-1)] d_0^{(p-1)} \\ &\qquad + \left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}\right] d_0^{(p)} \\ &= \binom{n}{1} d_0^{(p-2)} + \binom{n}{2} d_0^{(p-1)} + \binom{n}{3} d_0^{(p)}\end{aligned}$$

(vgl. § 1 C I, b 3, S. 187).

Die bisherige Rechnung führt zur Vermutung, daß, wenn $1 \leqq r \leqq p$,

$$d_{n-1}^{(p-r)} = d_0^{(p-r)} + \binom{n-1}{1} d_0^{(p-r+1)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(p-r+2)} + \cdots + \binom{n-1}{r} d_0^{(p)}.$$

Die Richtigkeit dieser Vermutung beweisen wir durch den Schluß von r auf $r+1$. Wir bilden zunächst die Summe der n ersten Glieder der Differenzenreihe $(p-r)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{aligned}s_n^{(p-r)} = n d_0^{(p-r)} + d_0^{(p-r+1)} \sum_{\nu=2}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{1} + d_0^{(p-r+2)} \sum_{\nu=3}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{2} + \cdots \\ + d_0^{(p)} \sum_{\nu=r+1}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{r},\end{aligned}$$

oder, da nach § 1 C, I, S. 187

$$\sum_{\nu=k+1}^{\nu=n} \binom{\nu-1}{k} = \binom{n}{k+1},$$

$$s_n^{(p-r)} = \binom{n}{1} d_0^{(p-r)} + \binom{n}{2} d_0^{(p-r+1)} + \binom{n}{3} d_0^{(p-r+2)} + \cdots + \binom{n}{r+1} d_0^{(p)}.$$

Das n^{te} Glied der $(p-r-1)^{\text{ten}}$ Differenzenreihe wird demnach

$$\begin{aligned}d_{n-1}^{(p-r-1)} &= d_0^{(p-r-1)} + d_0^{(p-r)} + d_1^{(p-r)} + \cdots + d_{n-2}^{(p-r)} \\ &= d_0^{(p-r-1)} + s_{n-1}^{(p-r)} \\ &= d_0^{(p-r-1)} + \binom{n-1}{1} d_0^{(p-r)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(p-r+1)} \\ &\qquad + \binom{n-1}{3} d_0^{(p-r+2)} + \cdots + \binom{n-1}{r+1} d_0^{(p)}.\end{aligned}$$

Der für $d_{n-1}^{(p-r-1)}$ gefundene Wert hat genau dieselbe Form wie der für $d_{n-1}^{(p-r)}$ angenommene, nur daß statt r überall $r+1$ steht. Da die Formel für $r=1$ und $r=2$ als richtig bewiesen ist, gilt sie auch für alle größeren ganzzahligen Werte von r. Insbesondere ist also auch das n^{te} Glied der ursprünglichen Reihe $(r=p)$:

$$\text{(II)}\quad a_{n-1}(=d_{n-1}^{(0)}) = a_0 + \binom{n-1}{1} d_0^{(1)} + \binom{n-1}{2} d_0^{(2)} + \cdots + \binom{n-1}{p} d_0^{(p)}$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder:

$$\text{(III)}\qquad s_n = \binom{n}{1} a_0 + \binom{n}{2} d_0^{(1)} + \binom{n}{3} d_0^{(2)} + \cdots + \binom{n}{p+1} d_0^{(p)}.$$ [1]

Die Gleichungen (II) und (III) drücken das n^{te} Glied und die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe p^{ter} Ordnung durch ihr Anfangsglied und die Anfangsglieder ihrer p ersten Differenzenreihen aus.

Anmerkung: Die Zahlen $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ bilden eine arithmetische Reihe $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung; denn die Differenzen $s_2 - s_1 = a_1$, $s_3 - s_2 = a_2$, $s_4 - s_3 = a_3, \ldots$ stellen eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung dar.

Lehrsatz[2]: Wenn man in eine ganze rationale Funktion p^{ten} Grades von x

$$f(x) = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \cdots + c_{p-1} x + c_p$$

für x der Reihe nach die Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung $a, a+d, a+2d, \ldots$ einsetzt, so bilden die resultierenden Funktionswerte

$$f(a),\quad f(a+d),\quad f(a+2d), \cdots$$

eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung.

Beweis: Die Differenzen

$$f(x+d) - f(x) = g_1(x),\quad f(x+2d) - f(x+d) = g_1(x+d),$$
$$f(x+3d) - f(x+2d) = g_1(x+2d), \ldots$$

sind Funktionen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades, die aus der ersten unter ihnen hervorgehen, indem man statt x der Reihe nach $x+d$, $x+2d, \ldots$ setzt. — Die Differenzen

1) Für eine arithmetische Reihe dritter Ordnung $(p=3)$ hat diese Formeln (II) und (III) Jakob Bernoulli in seiner Ars conjectandi (S. 98 u. 99) aus den vorher gefundenen Summen der figurierten Zahlen hergeleitet.

2) De Lagny, Histoire de l'Académie des Sciences, 1722, S. 281—282. Vgl. Cantor III, S. 389.

$$g_1(x+d) - g_1(x) = g_2(x),\quad g_1(x+2d) - g_1(x+d) = g_2(x+d),$$
$$g_1(x+3d) - g_1(x+2d) = g_2(x+2d), \ldots$$

sind Funktionen $(p-2)^{\text{ten}}$ Grades, die gleichfalls aus der ersten unter ihnen hervorgehen, wenn man für x substituiert $x+d$, $x+2d$ usw. So fortfahrend, erkennt man, daß die $(p-1)^{\text{te}}$ Differenzenreihe von $f(x)$, $f(x+d)$, $f(x+2d), \ldots$ aus den Funktionen **ersten** Grades

$$g_{p-1}(x),\quad g_{p-1}(x+d),\quad g_{p-1}(x+2d), \ldots$$

besteht. Ist nun

$$g_{p-1}(x) = mx + n,$$

so lautet für $x = a$ die $(p-1)^{\text{te}}$ Differenzenreihe

$$ma+n,\quad ma+n+md,\quad ma+n+2md, \ldots;$$

sie ist also eine arithmetische Reihe erster Ordnung, und damit ist der vorgelegte Satz bewiesen.

Anwendungen:

1. Es sei

$$f(x) = \binom{x}{p}.$$

Setzt man für x die Werte $p, p+1, p+2, p+3, \ldots$, so bilden die sich ergebenden Funktionswerte

$$\binom{p}{p},\quad \binom{p+1}{p},\quad \binom{p+2}{p},\quad \binom{p+3}{p}, \ldots,$$

nach § 1 C, I, b 3, S. 187 die figurierten Zahlen p^{ter} Ordnung, eine arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung.

2. Für

$$f(x) = x^p \quad \text{und} \quad a = 1,\quad d = 1$$

erhält man die arithmetische Reihe p^{ter} Ordnung:

$$1^p,\quad 2^p,\quad 3^p, \ldots, n^p.$$

Um die Summe dieser n Zahlen zu finden, hat man nur in Gl. III auf S. 207 für $d_0^{(1)}, d_0^{(2)}, \ldots, d_0^{(p)}$ die Werte I (S. 204) einzusetzen. Dann erhält man:

$$\text{(IV)}\quad s_n^{(p)} = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$
$$= \binom{n}{1}\cdot 1^p + \binom{n}{2}[2^p - 1^p] + \binom{n}{3}\left[3^p - \binom{2}{1}2^p + 1^p\right]$$
$$+ \cdots + \binom{n}{\nu}\left[\nu^p - \binom{\nu-1}{1}(\nu-1)^p + \binom{\nu-1}{2}(\nu-2)^p + \cdots + (-1)^{\nu-1}\cdot 1^p\right]$$
$$+ \cdots + \binom{n}{p+1}\left[(p+1)^p - \binom{p}{1}p^p + \binom{p}{2}(p-1)^p + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}2^p + (-1)^p\cdot 1^p\right].$$

Die rechte Seite ist eine ganze rationale Funktion von n vom Grade $(p+1)$; ein von n freies Glied kommt nicht vor.

Für $p = 2$ wird:

$$s_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\cdot 3 + \binom{n}{3}\cdot 2$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1).$$

Für $p = 3$ erhalten wir:

$$s_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

$$= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\cdot 7 + \binom{n}{3}\cdot 12 + \binom{n}{4}\cdot 6$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$= \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Die Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist also gleich dem Quadrat der Summe dieser Zahlen.

Für $p = 4$ ergibt sich:

$$s_n^{(4)} = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$$

$$= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\cdot 15 + \binom{n}{3}\cdot 50 + \binom{n}{4}\cdot 60 + \binom{n}{5}\cdot 24$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \quad \text{usw.}$$

Die Summe der gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen kann man auch unabhängig von der Theorie der arithmetischen Reihen in der folgenden Weise finden. Man gehe aus von der Binomialformel

$$(x+1)^{p+1} = x^{p+1} + \binom{p+1}{1}x^p + \binom{p+1}{2}x^{p-1} + \binom{p+1}{3}x^{p-2} + \cdots$$

$$+ \binom{p+1}{2}x^2 + \binom{p+1}{1}x + 1,$$

setze in dieser Gleichung für x der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ und addiere die entstehenden Gleichungen. Dann ergibt sich:

$$\text{(V)} \quad (n+1)^{p+1} = 1 + \binom{p+1}{1}s_n^{(p)} + \binom{p+1}{2}s_n^{(p-1)} + \binom{p+1}{3}s_n^{(p-2)} + \cdots$$

$$+ \binom{p+1}{2}s_n^{(2)} + \binom{p+1}{1}s_n^{(1)} + n.$$

Mittels der Gleichungen, die aus (V) hervorgehen, indem man sukzessive $p = 2, 3, 4, \ldots$ setzt, kann man nacheinander aus dem schon bekannten Werte von $s_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$ die Summen

$$s_n^{(2)},\ s_n^{(3)},\ s_n^{(4)}, \ldots$$

berechnen.

Es lassen sich aber noch bequemere Rekursionsformeln für die Potenzsummen finden, indem man die Gleichung hinzunimmt:

$$(x-1)^{p+1} = x^{p+1} - \binom{p+1}{1} x^p + \binom{p+1}{2} x^{p-1} - \binom{p+1}{3} x^{p-2} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{p-1} \cdot \binom{p+1}{2} x^2 + (-1)^p \cdot \binom{p+1}{1} x + (-1)^{p+1},$$

auch in dieser für x die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ einsetzt und die entstehenden Gleichungen addiert, wobei man erhält:

$$\text{(VI)} \quad 0 = n^{p+1} - \binom{p+1}{1} s_n^{(p)} + \binom{p+1}{2} s_n^{(p-1)} - \binom{p+1}{3} s_n^{(p-2)} + \cdots$$
$$+ (-1)^{p-1} \cdot \binom{p+1}{2} s_n^{(2)} + (-1)^p \cdot \binom{p+1}{1} s_n^{(1)} + (-1)^{p+1} \cdot n.$$

Durch Addition bezüglich Subtraktion von (V) und (VI) erhält man weiter die Relationen:

$$\text{(VII)} \quad (n+1)^{p+1} = 1 + n^{p+1} + 2\binom{p+1}{2} s_n^{(p-1)} + 2\binom{p+1}{4} s_n^{(p-3)} + \cdots,$$

(Falls p gerade, heißen die letzten Glieder:

$$2\binom{p+1}{3} s_n^{(3)} + 2(p+1) s_n^{(1)};$$

falls p ungerade, heißen die letzten Glieder:

$$2\binom{p+1}{2} s_n^{(2)} + 2n.)$$

$$\text{(VIII)} \quad (n+1)^{p+1} = 1 - n^{p+1} + 2\binom{p+1}{1} s_n^{(p)} + 2\binom{p+1}{3} s_n^{(p-2)} + \cdots.$$

(Wenn p gerade, lauten die letzten Glieder:

$$2\binom{p+1}{2} s_n^{(2)} + 2n;$$

wenn p ungerade, lauten die letzten Glieder:

$$2\binom{p+1}{3} s_n^{(3)} + 2\binom{p+1}{1} s_n^{(1)}.)$$

Die Gleichungen (VII) und (VIII) sind für die rekurrente Berechnung der Potenzsummen noch geeigneter als (V) und (VI), weil sie weniger Glieder enthalten.

Anmerkung:

Die Gleichungen (VII) oder (VIII) kann man auch zur independenten Darstellung von $s_n^{(p)}$ gebrauchen, wie wir hier noch kurz zeigen wollen.

Durch Entwicklung der linken Seite von (VIII) nach dem binomischen Lehrsatz erhält man:

$$\text{(IX)}\quad 2n^{p+1} + \binom{p+1}{1}n^p + \binom{p+1}{2}n^{p-1} + \binom{p+1}{3}n^{p-2} + \binom{p+1}{4}n^{p-3} + \cdots$$
$$= 2\binom{p+1}{1}s_n^{(p)} + 2\binom{p+1}{3}s_n^{(p-2)} + 2\binom{p+1}{5}s_n^{(p-4)} + \cdots.$$

Da auf der linken Seite n in keiner höheren als der $(p+1)^{ten}$ Potenz vorkommt, kann auch $s_n^{(p)}$ als Funktion von n den $(p+1)^{ten}$ Grad nicht übersteigen (wie übrigens auch aus (IV), S. 208 hervorgeht).

Wir setzen deshalb:

$$s_n^{(p)} = \varphi(p)\cdot n^{p+1} + \varphi_0(p)\cdot n^p + \varphi_1(p)\cdot n^{p-1} + \varphi_2(p)\cdot n^{p-2}$$
$$+ \varphi_3(p)\cdot n^{p-3} + \cdots,$$

wo φ, φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, ... noch zu bestimmende Funktionen bedeuten.

Es ist dann entsprechend

$$s_n^{(p-2)} = \varphi(p-2)\cdot n^{p-1} + \varphi_0(p-2)\cdot n^{p-2} + \varphi_1(p-2)\cdot n^{p-3}$$
$$+ \varphi_2(p-2)\cdot n^{p-4} + \varphi_3(p-2)\cdot n^{p-5} + \cdots \text{ usw.}$$

Wenn man diese Werte von $s_n^{(p)}$, $s_n^{(p-2)}$, ... in die rechte Seite von (IX) einsetzt, ergibt sich zunächst durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von n unmittelbar:

1. $\varphi(p) = \frac{1}{p+1}$, also $\varphi(p-2) = \frac{1}{p-1}$ usw.,

2. $\varphi_0(p) = \frac{1}{2}$, d. h. unabhängig von p,

3. $\varphi_1(p) = \frac{p}{12}$, also $\varphi_1(p-2) = \frac{p-2}{12}$ usw.,

4. $\varphi_2(p) = 0$,

5. $\varphi_3(p) = -\frac{1}{120}\cdot\binom{p}{3}$.

Durch das Verfahren der vollständigen Induktion zeigt man dann weiter in einfacher Weise, daß

a) alle Funktionen φ mit geraden Indices, φ_4, φ_6, φ_8, ... den Wert Null haben;

b) wenn u irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$\varphi_u(p) = \binom{p}{u}\cdot C,$$

wo C eine von p unabhängige Zahl ist.

Setzen wir deshalb

$$\varphi_1(p) = \binom{p}{1}\cdot\frac{B_1}{2}, \quad \varphi_3(p) = \binom{p}{3}\cdot\frac{B_2}{4},$$

$$\varphi_5(p) = \binom{p}{5}\cdot\frac{B_3}{6}, \ldots, \varphi_{2k-1}(p) = \binom{p}{2k-1}\cdot\frac{B_k}{2k},$$

wo $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ von p unabhängige Zahlen bezeichnen, so erhalten wir

(X) $$s_n^{(p)} = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \binom{p}{1}\frac{B_1}{2}n^{p-1} + \binom{p}{3}\frac{B_2}{4}n^{p-3} + \cdots + \binom{p}{2k-1}\frac{B_k}{2k}n^{p-(2k-1)} + \cdots.$$

Das letzte Glied der rechten Seite lautet, falls p eine gerade Zahl $2l$ ist:

$$\binom{2l}{2l-1}\frac{B_l}{2l}n,$$

falls p eine ungerade Zahl $2l+1$ ist:

$$\binom{2l+1}{2l-1}\frac{B_l}{2l}n^2.$$

Um nun die Zahlwerte von $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ zu bestimmen, setzen wir p gleich der geraden Zahl $2l$.

Dann geht (X) über in

$$s_n^{(2l)} = \frac{n^{2l+1}}{2l+1} + \frac{n^{2l}}{2} + \binom{2l}{1}\frac{B_1}{2}n^{2l-1} + \binom{2l}{3}\frac{B_2}{4}n^{2l-3} + \cdots + \binom{2l}{2k-1}\frac{B_k}{2k}n^{2(l-k)+1} + \cdots + \binom{2l}{2l-3}\frac{B_{l-1}}{2(l-1)}n^3 + \binom{2l}{2l-1}\frac{B_l}{2l}n.$$

Da für $n = 1$ die linke Seite den Wert 1 annimmt, erhalten wir weiter:

(XI) $$1 = \frac{1}{2l+1} + \frac{1}{2} + \binom{2l}{1}\frac{B_1}{2} + \binom{2l}{3}\frac{B_2}{4} + \cdots + \binom{2l}{2k-1}\frac{B_k}{2k} + \cdots + \binom{2l}{3}\frac{B_{l-1}}{2(l-1)} + B_l.$$

Aus (XI) läßt sich B_l berechnen, wenn schon die Werte von $B_1, B_2, \ldots, B_{l-1}$ bekannt sind.

Für $l = 1$ wird $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + B_1$, daher $B_1 = \frac{1}{6}$;

für $l = 2$ „ $1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2B_1 + B_2$, daher $B_2 = -\frac{1}{30}$;

für $l = 3$ „ $1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 3B_1 + 5B_2 + B_3$, daher $B_3 = \frac{1}{42}$ usw.

Historische Bemerkung:

Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen hat schon Archimedes in seinem Buche von den Schneckenlinien berechnet (Cantor I, S. 298), auch die Summe der Kuben ist bereits im Altertum bekannt gewesen (Cantor I, S. 519), die Summe der Biquadrate findet sich zum ersten Male in der arabischen Literatur des 15. Jahrhunderts (Cantor I, S. 736). Zwischen 1612 und 1619 hat Johann Faulhaber aus Ulm Formeln für die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen bis zu den elften Potenzen einschließlich, aber ohne jede Herleitung (wahrscheinlich hat er die Differenzenreihen benutzt) gegeben (Cantor II, S. 748). Etwa 20 Jahre später hat sich Fermat ohne Kenntnis der Faulhaberschen Resultate mit derselben Aufgabe beschäftigt. In seiner Ars conjectandi (Basel 1713, S. 96—98) hat dann Jakob Bernoulli gezeigt, wie man aus den Eigenschaften der figurierten Zahlen Formeln für die Potenzsummen herleiten kann, und die Berechnung selbst bis zur Summe der 10. Potenzen durchgeführt. Ohne eigentliche Begründung gibt er schließlich die allgemeine Formel (X). Die in ihr auftretenden Zahlen B_1, $B_2, \ldots,$ $B_k, \ldots$ sind später von de Moivre und Euler als Bernoullische Zahlen[1]) bezeichnet worden. (Vgl. Euler, Differentialrechnung, II. Teil, § 122, wo auch die Werte der 15 ersten Bernoullischen Zahlen abgedruckt sind).

§ 4. Kettenbrüche.

A. Historische Vorbemerkung.

Der erste Gebrauch eines Kettenbruches findet sich wohl in Bombellis „l'Algebra" (zuerst gedruckt 1572), wo der Verfasser $\sqrt{13}$ durch einen Kettenbruch darstellt (Cantor II, S. 622). Einen Fortschritt in der formalen Behandlung der Kettenbrüche machte Cataldi (Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri, 1613 gedruckt), welcher auch schon für den Kettenbruch

$$4 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cfrac{2}{8}}}$$

1) Näheres über diese siehe Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893; Haußner, Zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, Göttinger Nachrichten, 1893, Nr. 21 und Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften II A 3, Nr. 18, S. 181.

des bequemeren Druckes wegen die Abkürzung

$$4 \mathbin{\&} \frac{2}{8.} \mathbin{\&} \frac{2}{8.} \mathbin{\&} \frac{2}{8}$$

einführte (Cantor II, S. 762—763). Wahrscheinlich unabhängig von den beiden italienischen Mathematikern hat Daniel Schwenter aus Nürnberg in seiner Geometria practica (1618) Kettenbrüche benutzt, um Verhältnisse großer Zahlen näherungsweise durch Brüche mit kleinerem Zähler und kleinerem Nenner zu ersetzen (Cantor II, S. 763—765). Vermutlich ist ebenso selbständig Lord Brouncker (1620—1684), der erste Präsident der Royal Society, zu diesem Gegenstande gelangt (Cantor II, S. 765). Eine weitere Förderung erfuhr die Lehre von den Kettenbrüchen durch Huygens, welcher sie in der erst nach seinem Tode 1698 herausgegebenen Schrift Descriptio automati planetarii zu ähnlichen Zwecken wie Schwenter benutzte[1]) (Cantor III, S. 97). Eine ausführliche Theorie der Kettenbrüche hat Leonhard Euler in zwei Abhandlungen im 9. und 11. Bande der Commentarii Academiae Petropolitanae (ad annum 1737 und ad annum 1739) gegeben, wo er ihnen zuerst einen besonderen Namen, fractio continua, beigelegt hat; der elementare Teil dieser Abhandlungen ist auch im 18. Kapitel des 1. Bandes von Eulers Introductio in analysin infinitorum (1748) wieder dargestellt. Die ältere Literatur über die Kettenbrüche findet man in S. Günthers „Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche", Programm der Lateinschule zu Weißenburg 1872, die neueren Arbeiten in der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. I, S. 119.

B. Die einfachen oder regelmäßigen Kettenbrüche.

Definition: Wendet man auf zwei beliebige positive ganze Zahlen a, e das für die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen Kap. I, § 11 A, S. 52 und 53 gelehrte Verfahren an, so erhält man die Kette von Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
a = k_0 e + e_1, & \text{wo} & k_0 \geqq 0, & e_1 < e, \\
e = k_1 e_1 + e_2, & \text{wo} & k_1 \geqq 1, & e_2 < e_1, \\
e_1 = k_2 e_2 + e_3, & \text{wo} & k_2 \geqq 1, & e_3 < e_2, \\
\cdots & & & \\
e_{m-2} = k_{m-1} e_{m-1} + e_m, & \text{wo} & k_{m-1} \geqq 1, & e_m < e_{m-1}, \\
e_{m-1} = k_m e_m, & \text{wo} & k_m > 1. &
\end{array}$$

1) Vgl. die Anmerkung S. 225.

Der Divisor e_m, bei welchem die Division ohne Rest aufgeht, ist der größte gemeinschaftliche Teiler von a, e; falls diese beiden Zahlen relativ prim sind, ist $e_m = 1$. Aus der ersten Gleichung der Kette ergibt sich:

$$\frac{a}{e} = k_0 + \frac{e_1}{e} = k_0 + \cfrac{1}{\cfrac{e}{e_1}},$$

aus der zweiten:

$$\frac{e}{e_1} = k_1 + \frac{e_2}{e_1} = k_1 + \cfrac{1}{\cfrac{e_1}{e_2}},$$

aus der dritten:

$$\frac{e_1}{e_2} = k_2 + \frac{e_3}{e_2} = k_2 + \cfrac{1}{\cfrac{e_2}{e_3}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

aus der vorletzten:

$$\frac{e_{m-2}}{e_{m-1}} = k_{m-1} + \frac{e_m}{e_{m-1}} = k_{m-1} + \cfrac{1}{\cfrac{e_{m-1}}{e_m}}$$

und aus der letzten:

$$\frac{e_{m-1}}{e_m} = k_m.$$

Durch sukzessives Einsetzen erhält man:

$$\frac{a}{e} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}}.$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung nennt man einen Kettenbruch, und zwar im Gegensatze zu allgemeineren, unter C zu behandelnden Ausdrücken ähnlicher Form einen einfachen oder regelmäßigen Kettenbruch. $k_0, k_1, \ldots, k_m$ heißen die Teilnenner des Kettenbruchs, die Teilzähler sind hier sämtlich gleich 1; die Brüche $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \cdots, \frac{1}{k_m}$ bezeichnet man auch als Glieder oder Teilbrüche des Kettenbruchs. Kürzer schreibt man diesen:

$$k_0 + \frac{1}{k_1 +} \, \frac{1}{k_2 +} \cdots + \frac{1}{k_{m-1} +} \, \frac{1}{k_m},$$

oder noch kürzer:

$$k_0 \dot{+} \frac{1}{k_1} \dot{+} \frac{1}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{k_{m-1}} \dot{+} \frac{1}{k_m} \text{ [1]},$$

oder auch:

$$k_0 + \frac{1|}{|k_1} + \frac{1|}{|k_2} + \cdots + \frac{1|}{|k_{m-1}} + \frac{1|}{|k_m} \text{ [2]},$$

oder am einfachsten[3]):

$$(k_0; k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, k_m).$$

Beispiel: Um die Dezimalzahl 3,14159265 in einen Kettenbruch zu verwandeln, wendet man den Euklidischen Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers auf die beiden Zahlen

314 159 265 und 100 000 000 an:

$$\begin{aligned}
314\,159\,265 &= 3 \cdot 100\,000\,000 + 14\,159\,265,\\
100\,000\,000 &= 7 \cdot 14\,159\,265 + 885\,145,\\
14\,159\,265 &= 15 \cdot 885\,145 + 882\,090,\\
885\,145 &= 1 \cdot 882\,090 + 3\,055,\\
882\,090 &= 288 \cdot 3\,055 + 2\,250,\\
3\,055 &= 1 \cdot 2\,250 + 805,\\
2\,250 &= 2 \cdot 805 + 640,\\
805 &= 1 \cdot 640 + 165,\\
640 &= 3 \cdot 165 + 145,\\
165 &= 1 \cdot 145 + 20,\\
145 &= 7 \cdot 20 + 5,\\
20 &= 4 \cdot 5;
\end{aligned}$$

also

$$3{,}14159265 = (3, 7, 15, 1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 4) \text{ [4]}.$$

---

1) Nach Baltzer, Elemente, I. Bd., § 30, S. 172 stammt diese ziemlich verbreitete Schreibweise von J. H. F. Müller (Allgemeine Arithmetik, 1838). Wie unter A erwähnt, hat schon Cataldi eine ganz ähnliche Bezeichnung angewendet.

2) Vorschlag von Pringsheim in der Encyklop. der Math. Wissenschaften, Bd. I, S. 119, an welcher Stelle auch die von anderen Autoren benutzten Abkürzungen zusammengestellt sind.

3) Nach Dirichlet, Werke II, S. 141.

4) Die vier ersten Teilnenner stimmen mit denen des Kettenbruchs überein, in welchen man die transzendente Zahl π entwickeln kann. Der fünfte Teilnenner in der Darstellung von π ist nicht 288, sondern 292.

Methoden zur Berechnung eines Kettenbruches.

Der nächstliegende Gedanke, um den Kettenbruch

$$K = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cdots + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}},$$

in welchem $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}$ beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, unter denen einige auch Null sein können, während k_m eine von Null verschiedene positive ganze Zahl bezeichnen soll, zu berechnen, d. h. in Form eines gewöhnlichen Bruches darzustellen, besteht darin, zunächst die gemischte Zahl $k_{m-1} + \frac{1}{k_m}$ in einen unechten Bruch zu verwandeln, dann das Reziproke dieses Bruches zu k_{m-2} zu addieren usw. Zur Abkürzung setzen wir

$$V_\mu = k_\mu + \cfrac{1}{k_{\mu+1} + \cdots + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-1} + \cfrac{1}{k_m}}}}$$

und bezeichnen mit P_μ bezüglich Q_μ den Zähler und Nenner des Bruches, in welchen sich dieser Kettenbruch durch das soeben beschriebene Verfahren umwandeln läßt, wobei mit den auftretenden Brüchen keine anderen als die angegebenen Operationen (Einrichten und Bilden des reziproken Wertes) vorgenommen werden sollen; also

$$V_m = \frac{P_m}{Q_m} = \frac{k_m}{1}; \quad P_m = k_m, \quad Q_m = 1;$$

$$V_{m-1} = \frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} = \frac{k_{m-1}k_m + 1}{k_m}; \quad P_{m-1} = k_{m-1}k_m + 1 = k_{m-1}P_m + Q_m,$$
$$Q_{m-1} = k_m = P_m;$$

$$V_{m-2} = k_{m-2} + \frac{1}{V_{m-1}} = k_{m-2} + \frac{Q_{m-1}}{P_{m-1}} = \frac{k_{m-2}P_{m-1} + Q_{m-1}}{P_{m-1}},$$

so daß

$$P_{m-2} = k_{m-2}P_{m-1} + Q_{m-1}$$

und

$$Q_{m-2} = P_{m-1};$$

allgemein:

$$V_\mu = k_\mu + \frac{Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}} = \frac{k_\mu P_{\mu+1} + Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}},$$

also

$$\begin{cases} P_\mu = k_\mu P_{\mu+1} + Q_{\mu+1}, \\ Q_\mu = P_{\mu+1} \end{cases}$$

oder

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} P_\mu = k_\mu P_{\mu+1} + P_{\mu+2}, \\ Q_\mu = P_{\mu+1}. \end{cases}$$

Mittels dieser Formeln (I) berechnet man aus den schon gefundenen Werten von P_m und P_{m-1} schrittweise $P_{m-2}, P_{m-3}, \ldots, P_1, P_0$ und findet dann:

$$K = V_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{P_0}{P_1}.$$

Nach der über die Teilnenner gemachten Voraussetzung sind P_m und P_{m-1} von Null verschiedene positive ganze Zahlen. Aus der Rekursionsformel (I) ergibt sich, daß alsdann auch alle P mit niedrigerem Index von Null verschiedene positive ganze Zahlen sein müssen; die Brüche $V_m, V_{m-1}, \ldots, V_1, V_0$ haben also sämtlich bestimmte, endliche Werte.

Nachdem wir das festgestellt haben, können wir den Kettenbruch auch nach einer anderen Methode berechnen, die sich als noch zweckmäßiger erweisen wird. Wir setzen

$$U_\mu = k_0 \dot{+} \frac{1}{k_1} \dot{+} \frac{1}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{k_{\mu-1}} \dot{+} \frac{1}{k_\mu}$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

und suchen U_μ in einen gewöhnlichen Bruch $\frac{Z_\mu}{N_\mu}$ umzuwandeln. Dabei sollen Z_μ und N_μ die Werte von Zähler und Nenner bedeuten, die wir erhalten, wenn wir die auftretenden Brüche rein formal, durch Fortschaffen der Doppelbrüche, auf ihre einfachste Form bringen, ohne sie sonst zu heben oder zu erweitern. Die entstehenden Brüche

$$\frac{Z_0}{N_0}, \; \frac{Z_1}{N_1}, \; \ldots, \; \frac{Z_{m-1}}{N_{m-1}}, \; \frac{Z_m}{N_m} = K,$$

welche, wie wir sogleich sehen werden, zu dem Werte K des Kettenbruches in enger Beziehung stehen, werden „Näherungsbrüche" des Kettenbruchs genannt. Damit nicht nur K, sondern auch alle diese Näherungsbrüche einen bestimmten, endlichen Wert haben, müssen wir jetzt voraussetzen, daß die sämtlichen Teilnenner von Null verschieden sind bis auf k_0, das auch gleich Null sein kann.

Es ist

$$U_0 = \frac{Z_0}{N_0} = \frac{k_0}{1}, \quad \text{also} \quad Z_0 = k_0, \quad N_0 = 1;$$

$$U_1 = \frac{Z_1}{N_1} = \frac{k_0 k_1 + 1}{k_1}, \quad \text{also} \quad Z_1 = k_0 k_1 + 1, \quad N_1 = k_1.$$

Aus U_1 entsteht U_2, indem man k_1 durch $k_1 + \frac{1}{k_2}$ ersetzt, deshalb:

$$U_2 = \frac{Z_2}{N_2} = \frac{k_0\left(k_1 + \frac{1}{k_2}\right) + 1}{k_1 + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_2(k_0 k_1 + 1) + k_0}{k_2 k_1 + 1},$$

also:

$$Z_2 = k_2 Z_1 + Z_0, \quad N_2 = k_2 N_1 + N_0.$$

Um zu zeigen, daß allgemein:

$$\text{(II)} \qquad Z_\mu = k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}, \quad N_\mu = k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2},$$

wenden wir das Verfahren der vollständigen Induktion an.

$U_{\mu+1} = \frac{Z_{\mu+1}}{N_{\mu+1}}$ entsteht aus U_μ, indem man k_μ ersetzt durch $k_\mu + \frac{1}{k_{\mu+1}}$. Da in $Z_{\mu-1}$, $Z_{\mu-2}$, $N_{\mu-1}$, $N_{\mu-2}$ der Teilnenner k_μ nicht auftritt, wird

$$\frac{Z_{\mu+1}}{N_{\mu+1}} = \frac{\left(k_\mu + \frac{1}{k_{\mu+1}}\right) Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{\left(k_\mu + \frac{1}{k_{\mu+1}}\right) N_{\mu-1} + N_{\mu-2}} = \frac{k_{\mu+1}(k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}) + Z_{\mu-1}}{k_{\mu+1}(k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) + N_{\mu-1}},$$

also:

$$Z_{\mu+1} = k_{\mu+1} Z_\mu + Z_{\mu-1}, \quad N_{\mu+1} = k_{\mu+1} N_\mu + N_{\mu-1}.$$

Wenn demnach die Formeln (II) für den Index μ richtig sind, gelten sie auch für den Index $\mu + 1$. Da für den Index 2 ihre Richtigkeit feststeht, sind sie hiermit für alle Werte $\mu = 2, 3, \ldots, m$ bewiesen.

Mittels dieser Formeln (II) können wir nacheinander[1]) in einfacher Weise die sämtlichen Näherungsbrüche

$$U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}, U_m = K$$

1) Wegen der direkten Berechnung des Zählers und Nenners irgend eines bestimmten Näherungsbruches vergleiche man S. Günther, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form. Habilitationsschrift, Erlangen 1872.

berechnen. Wie aus den Formeln hervorgeht, sind Z_μ und N_μ (für $\mu = 2, 3, \ldots, m$) positive ganze Zahlen, und es ist stets

$$Z_\mu > Z_{\mu-1}, \quad N_\mu > N_{\mu-1}.$$

Für den als Beispiel vorher (S. 216) angegebenen Kettenbruch

$$(3, 7, 15, 1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 4)$$

erhält man die Näherungswerte

$$U_0 = \frac{3}{1},$$

$$U_1 = \frac{3 \cdot 7 + 1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$U_2 = \frac{15 \cdot 22 + 3}{15 \cdot 7 + 1} = \frac{333}{106},$$

$$U_3 = \frac{1 \cdot 333 + 22}{1 \cdot 106 + 7} = \frac{355}{113},$$

$$U_4 = \frac{288 \cdot 355 + 333}{288 \cdot 113 + 106} = \frac{102\,573}{32\,650} \quad \text{usw.}^{1)}$$

Eliminieren wir aus den beiden Gleichungen (II) k_μ, indem wir von der mit $N_{\mu-1}$ multiplizierten ersten Gleichung die mit $Z_{\mu-1}$ multiplizierte zweite abziehen, so ergibt sich:

$$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = - Z_{\mu-1} N_{\mu-2} + N_{\mu-1} Z_{\mu-2}.$$

Diese Gleichung besagt, daß, wenn man in der Differenz

$$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1}$$

den Index μ durch $\mu - 1$ ersetzt, sie das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, während ihr absoluter Wert derselbe bleibt. Nun ist

$$Z_1 N_0 - N_1 Z_0 = k_0 k_1 + 1 - k_0 k_1 = 1,$$

also

$$Z_2 N_1 - N_2 Z_1 = -1,$$

$$Z_3 N_2 - N_3 Z_2 = 1$$

und allgemein

(III) $$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß Z_μ und N_μ relativ prim sind; denn ein gemeinsamer, von 1 verschiedener Teiler von Z_μ und N_μ

1) U_0, U_1, U_2, U_3 sind gleichzeitig Näherungswerte der transzendenten Zahl π, aber nicht mehr U_4.

müßte auch Teiler der linken Seite, also auch Teiler von $(-1)^{\mu-1}$ sein, was unmöglich ist. Gleichung (III) dividieren wir durch $N_{\mu-1}N_\mu$ und erhalten:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche ist also so klein, wie überhaupt nur die Differenz zweier Brüche mit diesen Nennern sein kann.

Aus Gleichung (IV) ergibt sich weiter:

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_0}{N_0} = \frac{1}{N_1 N_0},$$
$$\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_1}{N_1} = -\frac{1}{N_2 N_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} - \frac{Z_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} = \frac{(-1)^{\mu-2}}{N_{\mu-1}N_{\mu-2}},$$
$$\frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$

Durch Addition dieser μ Gleichungen erhalten wir:

$$\text{(V)} \quad \frac{Z_\mu}{N^\mu} - k_0 = \frac{1}{N_1 N_0} - \frac{1}{N_2 N_1} + \cdots + \frac{(-1)^{\mu-2}}{N_{\mu-1}N_{\mu-2}} + \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$

Gleichung (V) stellt den Näherungsbruch $\frac{Z_\mu}{N_\mu}$ durch eine algebraische Summe dar, deren Glieder abwechselndes Vorzeichen haben und immer kleiner werden[1]). Gehen wir von einem Näherungswert zu einem anderen mit größerem Index über, so bleiben die bereits vorhandenen Glieder der Summe ungeändert, es kommen aber neue hinzu.

Vergleichung des Kettenbruchs mit seinen Näherungswerten.

Wir können setzen:

$$K = (k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{\mu-1}, x),$$

wo

$$x = (k_\mu, k_{\mu+1}, \ldots, k_m).$$

1) Diese Bemerkung ist vor allem wichtig für den Fall, auf den wir jetzt allerdings nicht eingehen, daß der Kettenbruch sich ins Unendliche erstreckt.

K geht also aus U_μ hervor, indem man x für k_μ substituiert. Nun war aber

$$U_\mu = \frac{k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2}},$$

also

$$K = \frac{x Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{x N_{\mu-1} + N_{\mu-2}};$$

denn $Z_{\mu-1}$, $Z_{\mu-2}$, $N_{\mu-1}$, $N_{\mu-2}$ sind von k_μ unabhängig.

Es wird

$$K - U_\mu = \frac{(x - k_\mu) \cdot (Z_{\mu-1} N_{\mu-2} - Z_{\mu-2} N_{\mu-1})}{(x N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) \cdot (k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2})},$$

oder wegen (III)

$$\text{(VI)} \qquad K - U_\mu = \frac{(-1)^\mu \cdot (x - k_\mu)}{(x N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) \cdot (k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2})}.$$

Da der Nenner der rechten Seite positiv und $x > k_\mu$ ist, hat $K - U_\mu$ dasselbe Vorzeichen wie $(-1)^\mu$, d. h. aber: Alle Näherungsbrüche mit geradem Index sind kleiner, alle mit ungeradem Index sind größer als K. K liegt also zwischen irgend einem Näherungsbruch mit geradem und irgend einem Näherungsbruch mit ungeradem Index, also z. B. zwischen U_μ und $U_{\mu-1}$. Es muß demnach sein:

$$|K - U_{\mu-1}| < |U_\mu - U_{\mu-1}|,$$

also wegen Gleichung (IV):

$$|K - U_{\mu-1}| < \frac{1}{N_{\mu-1} N_\mu},$$

oder, da $N_\mu > N_{\mu-1}$, um so mehr:

$$|K - U_{\mu-1}| < \frac{1}{N_{\mu-1}^2}.$$

Ersetzt man also den Kettenbruch durch einen Näherungswert $U_{\mu-1}$, so ist der gemachte Fehler kleiner als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt aus dem Nenner dieses Näherungsbruches und dem des nächstfolgenden ist, oder erst recht kleiner als der Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches ist.

Um die absoluten Beträge der Differenzen $K - U_\mu$ und $K - U_{\mu-1}$ vergleichen zu können, bilden wir noch:

$$K - U_{\mu-1} = \frac{x Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{x N_{\mu-1} + N_{\mu-2}} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}}$$

$$= \frac{-(Z_{\mu-1} N_{\mu-2} - N_{\mu-1} Z_{\mu-2})}{(x N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) \cdot N_{\mu-1}}$$

$$\text{(VII)} \qquad = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(x N_{\mu-1} + N_{\mu-2}) \cdot N_{\mu-1}}.$$

Da

$$x - k_\mu < 1 \quad \text{und} \quad k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2} > N_{\mu-1},$$

folgt aus dem Vergleiche der rechten Seiten von (VI) und (VII), daß

$$\text{(VIII)} \qquad |K - U_\mu| < |K - U_{\mu-1}|.$$

Jeder folgende Näherungsbruch kommt also dem Werte des Kettenbruchs näher als ein vorhergehender.

Aus diesem Satze und der aus (VI) abgeleiteten Folgerung ergibt sich, daß

$$\text{(IX)} \qquad U_0 < U_2 < U_4 < \cdots \leq K \leq \cdots < U_5 < U_3 < U_1.$$

Die Näherungsbrüche mit geradem Index bilden also eine zunehmende, die mit ungeradem Index eine abnehmende Reihe; beide nähern sich immer mehr dem Werte K des Kettenbruchs, welcher gleich dem letzten Gliede entweder der ersten oder der zweiten Reihe ist, je nachdem m zu den geraden oder zu den ungeraden Zahlen gehört.

Man kann leicht auch noch die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern einer der beiden Reihen bestimmen:

$$\begin{aligned} U_\mu - U_{\mu-2} &= \frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} \\ &= \frac{k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}}{k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2}} - \frac{Z_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} \\ &= \frac{k_\mu (Z_{\mu-1} N_{\mu-2} - N_{\mu-1} Z_{\mu-2})}{N_\mu N_{\mu-2}} \\ &= \frac{(-1)^\mu \cdot k_\mu}{N_\mu N_{\mu-2}}. \end{aligned}$$

Für den absoluten Betrag der Differenz zwischen K und dem beliebigen Näherungsbruche $U_{\mu-1}$ haben wir bereits die obere Grenze $\frac{1}{N_\mu \cdot N_{\mu-1}}$ angegeben. Aus Gleichung (VII) können wir auch eine untere Grenze für $|K - U_{\mu-1}|$ entnehmen. Da $x < k_\mu + 1$, so wird

$$|K - U_{\mu-1}| > \frac{1}{(k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2} + N_{\mu-1}) \cdot N_{\mu-1}}$$

oder

$$|K - U_{\mu-1}| > \frac{1}{(N_\mu + N_{\mu-1}) \cdot N_{\mu-1}}$$

und um so mehr:

$$|K - U_{\mu-1}| > \frac{1}{2N_\mu N_{\mu-1}},$$

also:

$$\frac{1}{2N_\mu N_{\mu-1}} < |K - U_{\mu-1}| < \frac{1}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$

Um zu zeigen, daß die Näherungsbrüche die vollkommenste Annäherung an den Wert des Kettenbruches geben, beweisen wir den **Satz:**

Wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ sich von dem Werte K des Kettenbruches $(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_m)$ weniger als der Näherungsbruch $U_\mu = \frac{Z_\mu}{N_\mu}$ unterscheidet, so ist $a > Z_\mu$, $b > N_\mu$.

Beweis: Aus der gemachten Voraussetzung und der aus (VI) gezogenen Folgerung ergibt sich, daß $\frac{a}{b}$ zwischen U_μ und $U_{\mu-1}$ liegen muß, und zwar ist,

falls μ gerade, $\quad U_\mu < \frac{a}{b} < U_{\mu-1}$,

falls μ ungerade, $\quad U_\mu > \frac{a}{b} > U_{\mu-1}$.

Demnach haben stets $U_\mu - \frac{a}{b}$ sowie $\frac{a}{b} - U_{\mu-1}$ dasselbe Vorzeichen wie $(-1)^{\mu-1}$. Nun ist

$$U_\mu - \frac{a}{b} = \frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{a}{b} = \frac{bZ_\mu - aN_\mu}{N_\mu b}$$

und

$$\frac{a}{b} - U_{\mu-1} = \frac{a}{b} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = \frac{aN_{\mu-1} - bZ_{\mu-1}}{bN_{\mu-1}}.$$

Setzen wir also

$$bZ_\mu - aN_\mu = (-1)^{\mu-1}\alpha$$

und

$$aN_{\mu-1} - bZ_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1}\beta,$$

so sind α und β von Null verschiedene positive ganze Zahlen. Multiplizieren wir die erste der beiden letzten Gleichungen mit $Z_{\mu-1}$, die zweite mit Z_μ und addieren beide, so erhalten wir:

$$a(Z_\mu N_{\mu-1} - Z_{\mu-1}N_\mu) = (-1)^{\mu-1}(\alpha Z_{\mu-1} + \beta Z_\mu)$$

oder wegen (III), S. 220

$$a = \alpha Z_{\mu-1} + \beta Z_\mu;$$

folglich

$$a > Z_u.$$

Multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen mit $N_{\mu-1}$, die zweite mit N_μ und addieren beide, so erhalten wir:

$$b(Z_\mu N_{\mu-1} - Z_{\mu-1} N_\mu) = (-1)^{\mu-1}(\alpha N_{\mu-1} + \beta N_\mu),$$

$$b = \alpha N_{\mu-1} + \beta N_\mu;$$

folglich

$$b > N_\mu.$$

Wenn man also einen vorgelegten Bruch, dessen Zähler und Nenner große Zahlen sind, in einen Kettenbruch entwickelt, so stellt jeder Näherungswert dieses Kettenbruches die beste Annäherung an den gegebenen Bruch in dem Sinne dar, daß kein anderer Bruch existiert, welcher dem gegebenen Bruche näher käme und gleichzeitig in kleineren Zahlen ausdrückbar wäre.[1])

Um den Grad der Annäherung der vorher (S. 220) berechneten Näherungswerte U_0, U_1, U_2, U_3, U_4 des Kettenbruches (3, 7, 15, 1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 4) an den genauen Wert $K = 3{,}14\,159\,265$ bequem beurteilen zu können, schreiben wir die Näherungsbrüche als Dezimalzahlen:

$$U_0 = \frac{3}{1} = 3,$$

$$U_1 = \frac{22}{7} = 3{,}142\,857\ldots,$$

$$U_2 = \frac{333}{106} = 3{,}141\,509\,4\ldots,$$

$$U_3 = \frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,92\ldots,$$

$$U_4 = \frac{102\,573}{32\,650} = 3{,}141\,592\,649\,3\ldots.$$

U_4 weicht nur noch um etwa 7 Einheiten der zehnten Dezimalstelle von K ab, und die Zahlwerte bestätigen für dieses Beispiel, daß

$$U_0 < U_2 < U_4 < K < U_3 < U_1.$$

---

1) Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche gerade hat Daniel Schwenter und Christian Huygens zur Einführung der Kettenbrüche veranlaßt (vgl. § 4 A, S. 214). Huygens wollte ein Planetarium herstellen, das durch ineinandergreifende Zahnräder in Bewegung zu setzen war. Die Anzahl der Zähne der verschiedenen Räder mußte den Umlaufszeiten der Planeten entsprechen, deren Verhältnisse sich genau nur durch recht große Zahlen ausdrücken lassen. Da aber die Anfertigung von Rädern mit mehr als einer Million genau gleicher Zähne praktisch unausführbar war, stand Huygens vor der Aufgabe, die in großen Zahlen ausgedrückten Verhältnisse näherungsweise durch Brüche in kleineren Zahlen zu ersetzen.

C. Die allgemeinen Kettenbrüche.[1])

Aus der Kette von Gleichungen

$$K = k_0 + \frac{h_1}{V_1},$$

$$V_1 = k_1 + \frac{h_2}{V_2},$$

$$V_2 = k_2 + \frac{h_3}{V_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_{m-2} = k_{m-2} + \frac{h_{m-1}}{V_{m-1}},$$

$$V_{m-1} = k_{m-1} + \frac{h_m}{k_m},$$

in welcher $k_0, k_1, \ldots, k_m, h_1, h_2, \ldots, h_m$ beliebige Zahlen bedeuten, die wir nachher allerdings noch gewissen Beschränkungen unterwerfen müssen, erhält man durch sukzessives Einsetzen:

$$K = k_0 + \cfrac{h_1}{k_1 + \cfrac{h_2}{k_2 + \cdots \atop \displaystyle k_{m-2} + \cfrac{h_{m-1}}{k_{m-1} + \cfrac{h_m}{k_m}}}}.$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite nennt man einen allgemeinen Kettenbruch, $h_1, h_2, \ldots, h_m$ seine Teilzähler, $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_m$ seine Teilnenner und $\frac{h_1}{k_1}, \frac{h_2}{k_2}, \ldots, \frac{h_m}{k_m}$ seine einzelnen Glieder. Gewöhnlich schreibt man den Kettenbruch in der kürzeren Form:

$$K = k_0 \dot{+} \frac{h_1}{k_1} \dot{+} \frac{h_2}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_{m-1}}{k_{m-1}} \dot{+} \frac{h_m}{k_m}$$

oder

$$K = k_0 + \frac{h_1|}{|k_1} + \frac{h_2|}{|k_2} + \cdots + \frac{h_{m-1}|}{|k_{m-1}} + \frac{h_m|}{|k_m}.$$

Zur Berechnung seines Wertes kann man auf die Kette von

1) Da die allgemeinen Kettenbrüche in den Elementen kaum Verwendung finden, werden wir uns auf die kurze Herleitung solcher Relationen beschränken, die eine unmittelbare Verallgemeinerung der in B entwickelten Eigenschaften der einfachen Kettenbrüche darstellen. Für das genauere Studium vergleiche man M. A. Stern, Lehrbuch der algebraischen Analysis, Leipzig und Heidelberg 1860, 13. Kap. und O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1886, II. Teil, 8. Abschnitt.

Gleichungen zurückgehen und, mit der letzten Gleichung beginnend. nacheinander $V_{m-1}, V_{m-2}, \ldots, V_1, K$ auf die Form gewöhnlicher Brüche bringen. Wir wollen dabei keine andere Umformung vornehmen als das Einrichten der Brüche und das Multiplizieren eines Teilzählers mit dem reziproken Werte eines Bruches, die vorkommenden Brüche aber sonst weder heben noch erweitern. Den auf diese Weise erhaltenen Zähler von V_μ bezeichnen wir mit P_μ, den Nenner mit Q_μ. Es ist

$$V_\mu = \frac{P_\mu}{Q_\mu} = k_\mu + \frac{h_{\mu+1}}{V_{\mu+1}}$$

$$= k_\mu + \frac{h_{\mu+1} \cdot Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}}$$

$$= \frac{k_\mu P_{\mu+1} + h_{\mu+1} Q_{\mu+1}}{P_{\mu+1}},$$

also

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} Q_\mu &= P_{\mu+1}, \\ P_\mu &= k_\mu P_{\mu+1} + h_{\mu+1} P_{\mu+2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Rekursionsformeln berechnet man der Reihe nach $P_{m-2}, P_{m-3}, \ldots, P_0$. Damit $V_{m-1}, V_{m-2}, \ldots, V_2, V_1, K$ einen bestimmten Sinn haben, müssen ihre Nenner von Null verschieden sein. Es sind deshalb alle die Werte der Teilzähler und Teilnenner auszuschließen, für welche $k_m, P_{m-1}, P_{m-2}, \ldots, P_2, P_1$ verschwinden.

Nachdem wir so die Bedingungen festgestellt haben, unter denen allein dem Kettenbruch K ein Sinn zukommt, können wir seine Berechnung auch von links beginnen.

Wir setzen

$$U_\mu = k_0 \dot{+} \frac{h_1}{k_1} \dot{+} \frac{h_2}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{h_\mu}{k_\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, m),$$

also

$$U_0 = k_0,$$

$$U_1 = k_0 + \frac{h_1}{k_1} = \frac{k_0 k_1 + h_1}{k_1},$$

$$U_2 = \frac{k_0 \left(k_1 + \frac{h_2}{k_2}\right) + h_1}{k_1 + \frac{h_2}{k_2}} = \frac{k_2 (k_0 k_1 + h_1) + h_2 k_0}{k_2 k_1 + h_2}.$$

Bezeichnen wir wieder Zähler und Nenner des durch diese Umformungen (Bruch-Einrichten und Fortschaffen des Doppelbruches)

ohne weiteres Heben oder Erweitern für U_μ gefundenen Bruches mit Z_μ bezüglich N_μ, so sieht man, daß

$$\begin{aligned} Z_0 &= k_0, & N_0 &= 1, \\ Z_1 &= k_1 k_0 + h_1, & N_1 &= k_1, \\ Z_2 &= k_2 Z_1 + h_2 Z_0, & N_2 &= k_2 N_1 + h_2 N_0. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich wie unter B, S. 219 zeigt man durch den Schluß von μ auf $\mu + 1$, daß allgemein

$$\text{(II)} \qquad \boldsymbol{Z_\mu = k_\mu Z_{\mu-1} + h_\mu Z_{\mu-2}, \quad N_\mu = k_\mu N_{\mu-1} + h_\mu N_{\mu-2}.}$$

Mittels dieser Formeln berechnet man der Reihe nach die Werte von $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}, U_m = K$[1]), die man auch im Falle der allgemeinen Kettenbrüche als Näherungswerte bezeichnet, wenn ihnen auch für beliebige Werte der Teilzähler und Teilnenner nicht die diesen Namen rechtfertigende Eigenschaft zukommt.

Multipliziert man die erste der Gleichungen (II) mit $N_{\mu-1}$, die zweite mit $Z_{\mu-1}$ und subtrahiert dann von der ersten die zweite, so erhält man:

$$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = -h_\mu (Z_{\mu-1} N_{\mu-2} - N_{\mu-1} Z_{\mu-2}).$$

Die Multiplikation der $(\mu - 1)$ Gleichungen, die aus dieser entstehen, wenn man für μ der Reihe nach $2, 3, \ldots, \mu - 1, \mu$ setzt, ergibt (vgl. die Herleitung von (III) unter B, S. 220):

$$Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1} h_2 h_3 \ldots h_{\mu-1} h_\mu (Z_1 N_0 - N_1 Z_0)$$

oder, da

$$Z_1 N_0 - N_1 Z_0 = k_1 k_0 + h_1 - k_1 k_0 = h_1,$$

$$\text{(III)} \qquad \boldsymbol{Z_\mu N_{\mu-1} - N_\mu Z_{\mu-1} = (-1)^{\mu-1} h_1 h_2 h_3 \cdots h_{\mu-1} h_\mu.}$$

Indem wir diese Gleichung durch $N_{\mu-1} N_\mu$ dividieren, erhalten wir weiter:

$$\text{(IV)} \qquad \boldsymbol{\frac{Z_\mu}{N_\mu} - \frac{Z_{\mu-1}}{N_{\mu-1}} = (-1)^{\mu-1} \frac{h_1 h_2 \ldots h_{\mu-1} h_\mu}{N_\mu N_{\mu-1}}.}$$

---

1) Es kann sehr wohl geschehen, daß man aus diesen Gleichungen für N_m einen von Null verschiedenen Wert erhält, ohne daß doch dem Kettenbruch K ein Sinn zukommt. Wenn z. B.

$$k_m = 0, \; h_m \gtrless 0 \quad \text{und} \quad N_{m-2} \gtrless 0,$$

so wird

$$Z_m = h_m \cdot Z_{m-2}, \quad N_m = h_m \cdot N_{m-2}, \quad \text{also} \quad \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_{m-2}}{N_{m-2}},$$

während K für $k_m = 0$ nicht definiert ist.

Man setze in (IV) für μ der Reihe nach $1, 2, \ldots, \mu - 1$, μ und addiere die entstehenden μ Gleichungen. Dann ergibt sich:

$$\text{(V)}\quad \frac{Z_\mu}{N_\mu} - k_0 = \frac{h_1}{N_1 N_0} - \frac{h_1 h_2}{N_2 N_1} + \cdots + (-1)^{\mu-1} \frac{h_1 h_2 \cdots h_{\mu-1} h_\mu}{N_\mu N_{\mu-1}}.$$ [1])

Wir wollen noch eine etwas allgemeinere Gleichung als (IV) ableiten, nämlich die Differenz $U_\nu - U_\mu$ berechnen, wo $0 \leqq \mu < \nu \leqq m$. Es ist

$$U_\nu = k_0 \dotplus \frac{h_1}{k_1} \dotplus \cdots \dotplus \frac{h_\mu}{k_\mu} \dotplus \frac{h_{\mu+1}}{k_{\mu+1}} \dotplus \cdots \dotplus \frac{h_\nu}{k_\nu}$$

oder, wenn wir

$$x = k_{\mu+1} \dotplus \frac{h_{\mu+2}}{k_{\mu+2}} \dotplus \cdots \dotplus \frac{h_\nu}{k_\nu}$$

setzen,

$$U_\nu = k_0 \dotplus \frac{h_1}{k_1} \dotplus \cdots \dotplus \frac{h_\mu}{k_\mu} \dotplus \frac{h_{\mu+1}}{x}.$$

U_ν entsteht also aus $U_{\mu+1}$, indem man $k_{\mu+1}$ durch x ersetzt. Deshalb wird

$$U_\nu = \frac{x Z_\mu + h_{\mu+1} Z_{\mu-1}}{x N_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}}$$

und

$$U_\nu - U_\mu = \frac{x Z_\mu + h_{\mu+1} Z_{\mu-1}}{x N_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}} - \frac{Z_\mu}{N_\mu}$$

$$\text{(VI)}\qquad = \frac{-h_{\mu+1}(Z_\mu N_{\mu+1} - N_\mu Z_{\mu-1})}{(x N_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}) \cdot N_\mu}$$

$$= \frac{(-1)^\mu h_1 h_2 \cdots h_\mu h_{\mu+1}}{(x N_\mu + h_{\mu+1} N_{\mu-1}) \cdot N_\mu}.$$

Beschränken wir uns jetzt auf solche Kettenbrüche, deren sämtliche Teilzähler und Teilnenner positiv sind, so gilt dasselbe auch von den Zählern und Nennern aller Näherungsbrüche, und dann folgt aus (VI), daß, wenn $\nu > \mu$, $U_\nu - U_\mu$ das Vorzeichen $(-1)^\mu$ hat. Wenn also μ gerade ist, ergibt sich $U_\nu > U_\mu$, und wenn μ ungerade ist, $U_\nu < U_\mu$, gleichgültig ob ν gerade oder ungerade ist.

Es bestehen demnach die Ungleichungen

$$U_0 < U_2 < U_4 < \cdots \leqq K \leqq \cdots < U_5 < U_3 < U_1.$$

---

1) Diese Gleichung wird namentlich bei sich ins Unendliche erstreckenden Kettenbrüchen zur Untersuchung der Konvergenz gebraucht. Läßt man μ wachsen, so bleiben die bereits vorhandenen Glieder der rechten Seite ungeändert, es treten aber neue hinzu.

Die für die Näherungswerte der einfachen Kettenbrüche abgeleitete Relation B (IX), S. 223 gilt also auch für diejenigen allgemeinen Kettenbrüche, deren sämtliche Teilzähler und Teilnenner positiv sind. Bei diesen ist also der Name „Näherungsbrüche" für $U_0, U_1, U_2, \ldots$ wirklich gerechtfertigt. Setzen wir sämtliche Teilzähler gleich 1 und sämtliche Teilnenner gleich positiven ganzen Zahlen, so gehen aus den Formeln unter (C) die unter (B) hervor.[1])

D. Anwendung der einfachen Kettenbrüche zur Auflösung von Kongruenzen.

Aufgabe I: Unter der Voraussetzung, daß e, a, A positive ganze Zahlen bedeuten, und daß e, A relativ prim sind, soll die ganze Zahl x so bestimmt werden, daß

$$ex \equiv a (\text{mod } A).$$

Auflösung: Wir entwickeln $\frac{A}{e}$ in einen Kettenbruch (vgl. B, S. 214 u. 215):

$$\frac{A}{e} = (k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}, k_m).$$

Zwischen den Zählern und Nennern des $(m-1)^{\text{ten}}$ und des m^{ten} Näherungsbruches besteht die Gleichung (B, III)

$$Z_m N_{m-1} - N_m Z_{m-1} = (-1)^{m-1}$$

oder, da

$$Z_m = A, \quad N_m = e,$$

$$A N_{m-1} - e Z_{m-1} = (-1)^{m-1},$$

also.

$$e Z_{m-1} \equiv (-1)^m (\text{mod } A)$$

und

$$e \cdot a Z_{m-1} \equiv (-1)^m \cdot a \, (\text{mod } A).$$

Wenn m eine gerade Zahl ist, genügt also $a Z_{m-1}$ der vorgelegten Kongruenz; ist m eine ungerade Zahl, so wird

$$e \cdot (-a \cdot Z_{m-1}) \equiv a \quad (\text{mod } A),$$

demnach

$$-a \cdot Z_{m-1}$$

Lösung der Kongruenz.

---

1) Wir haben die Eigenschaften der regelmäßigen Kettenbrüche selbständig abgeleitet, weil im Schulunterricht auf die Durchnahme der allgemeinen Kettenbrüche wohl überall verzichtet wird.

Bei der Voraussetzung, daß e und A relativ prim sind, kann die Kongruenz nicht mehr als eine Lösung haben, wenn $(\text{mod}\, A)$ kongruente Zahlen nicht als verschieden betrachtet werden; denn aus

$$ex_1 \equiv a \pmod{A} \quad \text{und} \quad ex_2 \equiv a \pmod{A}$$

würde folgen:

$$e \cdot (x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{A}.$$

Da nun e und A teilerfremd sind, müßte

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{A}$$

sein.

Beispiel:

$$27x \equiv 1 \pmod{100}.$$

Lösung:

$$\frac{100}{27} = (3,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2).$$

$$\frac{Z_0}{N_0} = \frac{3}{1}; \quad \frac{Z_1}{N_1} = \frac{4}{1}; \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{11}{3};$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{2 \cdot 11 + 4}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{26}{7}; \quad \frac{Z_4}{N_4} = \frac{1 \cdot 26 + 11}{1 \cdot 7 + 3} = \frac{37}{10};$$

$$\frac{Z_5}{N_5} = \frac{2 \cdot 37 + 26}{2 \cdot 10 + 7} = \frac{100}{27};$$

also:

$$m = 5, \quad Z_4 = 37, \quad a = 1;$$

demnach:

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv -37 \\ &\equiv +63 \end{aligned}\right\} \pmod{100}.$$

Aufgabe II: Gegeben seien die beliebigen ganzen Zahlen a, b, c, d und die zueinander teilerfremden, im übrigen auch beliebigen ganzen Zahlen A, B, C, D. Die ganze Zahl x so zu finden, daß gleichzeitig $x \equiv a \pmod{A}$; $x \equiv b \pmod{B}$; $x \equiv c \pmod{C}$; $x \equiv d \pmod{D}$.

Lösung: Man bestimme die vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus den Kongruenzen:

$$\begin{aligned} BCD \cdot \alpha &\equiv a \pmod{A}; \\ ACD \cdot \beta &\equiv b \pmod{B}; \\ ABD \cdot \gamma &\equiv c \pmod{C}; \\ ABC \cdot \delta &\equiv d \pmod{D}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$x = BCD\alpha + ACD\beta + ABD\gamma + ABC\delta + k \cdot ABCD,$$

wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Sind x_1 und x_2 zwei verschiedene Zahlen, die beide sämtlichen vorgelegten Kongruenzen genügen, so muß sein:

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{A};\ x_1 \equiv x_2 \pmod{B};\ x_1 \equiv x_2 \pmod{C};\ x_1 \equiv x_2 \pmod{D}.$$

$x_1 - x_2$ ist demnach sowohl durch A wie durch B wie durch C wie durch D, also, weil diese Zahlen relativ prim, auch durch $ABCD$ teilbar; d. h. x_1 und x_2 können sich nur um ein Vielfaches von $ABCD$ unterscheiden.

Spezieller Fall: Es sei

$$a = b = c = d = M,$$

und es werde gesetzt:

$$ABCD = N.$$

Dann folgt aus den Kongruenzen

$$x \equiv M \pmod{A};\quad x \equiv M \pmod{B};\quad x \equiv M \pmod{C};\quad x \equiv M \pmod{D}$$

einerseits:

$$x = M + k'N,$$

wo k' irgend eine ganze Zahl bedeutet, andererseits aber auch (siehe die soeben gelöste Aufgabe II.):

$$x = BCD\alpha + ACD\beta + ABD\gamma + ABC\delta + kN,$$

also

$$M + k'N = BCD\alpha + ACD\beta + ABD\gamma + ABC\delta + kN$$

und

$$\frac{M}{N} = \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + \frac{\delta}{D} + K,$$

wo $K = k - k'$.

Damit haben wir den Bruch $\frac{M}{N}$, dessen Nenner das Produkt der zueinander teilerfremden Zahlen A, B, C, D ist, als Summe von Brüchen, deren Nenner die einzelnen Faktoren A, B, C, D sind, dargestellt, also auch die früher (Kap. III, § 6, S. 133 u. 134) erwähnte Aufgabe gelöst, einen Bruch mit beliebigem Nenner in eine Summe von Brüchen umzuwandeln, deren Nenner die in dem gegebenen Nenner enthaltenen Primzahlpotenzen sind.[1])

Beispiel: Den Bruch $\frac{16}{315}$ als Summe von Brüchen mit den Nennern 9, 5, 7 darzustellen.

Lösung: Wir bestimmen zunächst die ganzen Zahlen α, β, γ, so daß

$$5 \cdot 7 \cdot \alpha \equiv 16 \pmod{9};\quad 9 \cdot 7 \cdot \beta \equiv 16 \pmod{5};\quad 9 \cdot 5 \cdot \gamma \equiv 16 \pmod{7}$$

oder

$$8\alpha \equiv 7 \pmod{9};\qquad 3\beta \equiv 1 \pmod{5};\qquad 3\gamma \equiv 2 \pmod{7}.$$

1) Gauß, Disquisitiones Arithmeticae, Art. 309—311.

Diese Kongruenzen werden befriedigt durch

$$\alpha = 2; \qquad \beta = 2; \qquad \gamma = 3.$$

Also ist

$$\frac{16}{315} = \frac{2}{9} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + K.$$

Da

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{331}{315},$$

hat man

$$K = -1$$

zu setzen.

§ 5. Das Rechnen mit Logarithmen im Bereiche der rationalen Zahlen.[1])

A. Geschichtliches über den Ursprung der Logarithmen.

Die Logarithmen hat man anfänglich nicht, wie es jetzt üblich ist (vgl. Kap. I, § 8 A), als Potenzexponenten definiert; man setzte vielmehr eine geometrische Reihe $a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$ in Beziehung zu einer arithmetischen $0, d\cdot 1, d\cdot 2, \ldots, d\cdot n, \ldots$, indem man je zwei Glieder von gleicher Stellenzahl einander zuordnete. Daß eine Multiplikation zweier Glieder der geometrischen Reihe einer Addition der zugehörigen Glieder der arithmetischen Reihe entspricht, hat schon Archimedes in seiner Sandrechnung bemerkt. Weiter verfolgt wurde dieser Gedanke am Ende des 15. Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker Chuquet und später namentlich von Michael Stifel, welcher in seiner Arithmetica integra (1544) deutlich sagt, daß der Addition in der arithmetischen Reihe Multiplikation in der geometrischen, der Subtraktion in der arithmetischen Division in der geometrischen, der Multiplikation in der arithmetischen Potenzerhebung in der geometrischen und der Division in der arithmetischen Wurzelausziehung in der geometrischen Reihe entspricht. Das, was

1) Wenn auch eine auf der genauen Definition des Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl für irgend eine positive Basis beruhende Theorie der Logarithmen positiver Zahlen erst nach Einführung der irrationalen Zahlen möglich ist, so sind tatsächlich doch die Logarithmen nicht nur ursprünglich als rationale Zahlen in die Wissenschaft eingeführt worden, sondern auch jetzt noch dürfte recht vielen, welche die Logarithmen praktisch zu benutzen haben, der exakte Begriff der irrationalen Zahl fremd sein, insbesondere wird allgemein im Unterricht der Schüler mit ihnen bekannt gemacht, bevor er erfährt, in welchem Sinne man von der Existenz irrationaler Zahlen spricht. Es scheint mir deshalb das Bedürfnis vorzuliegen, sich auch schon im Bereiche der rationalen Zahlen mit den Logarithmen und ihren Anwendungen abzufinden. Auf die eigentliche Definition des Logarithmus einer beliebigen Zahl für eine beliebige Basis werden wir selbstverständlich später (vgl. Kap. VI, § 7 E u. Kap. VII, § 4 E) zurückkommen.

wir jetzt Theorie des logarithmischen Rechnens nennen, war also im wesentlichen schon Stifel bekannt. Zur Ausnutzung dieser Gedanken für das numerische Rechnen bedurfte man nur noch einer geometrischen und der entsprechenden arithmetischen Reihe, deren Glieder so dicht aufeinander folgten, daß man jede beliebige Zahl entweder unmittelbar in einer der beiden Reihen finden, also die zugehörige der anderen Reihe direkt ablesen oder doch diese durch ein einfaches Interpolationsverfahren schnell und hinreichend genau bestimmen konnte. Die in der Berechnung zweier solcher zusammengehörigen Reihen bestehende Arbeit wurde nun geleistet einerseits von Joost Bürgi[1]), welcher seine „Arithmetische und Geometrische Progreß-Tabulen" bereits zwischen 1603 und 1611 berechnete, aber erst 1620 veröffentlichte, und andrerseits unabhängig von ihm von John Neper, Baron von Merchiston[2]), dessen Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614 erschien.

Bei Bürgi lautet die geometrische Reihe:

$$10^8,\quad 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right),\quad 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2,\ldots,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n,\ \ldots,$$

die arithmetische

$$0,\qquad 10\cdot 1,\qquad 10\cdot 2,\ \ldots\ldots\ldots,\ 10\cdot n,\ \ldots.$$

Wie man sieht, ist die Berechnung dieser Reihen verhältnismäßig sehr einfach[3]). Jedes Glied der geometrischen Reihe ergibt sich aus dem vorhergehenden, indem man zu diesem seinen 10000ten Teil hinzufügt. Bürgi hat die Reihe fortgesetzt bis zu den Werten

$$n = 23\,027 \quad \text{und} \quad n = 23\,028$$

und dann durch Interpolation gefunden, daß dem Werte

$$n = 23027{,}0022,$$

1) 1552—1632; in der Schweiz geboren, brachte er den größten Teil seines Lebens in Kassel und Prag zu.

2) Geboren 1550 in Merchiston bei Edinburg, gestorben 1617.

3) Aus diesem Grunde schlägt M. Koppe in der Programmabhandlung des Andreasrealgymnasiums zu Berlin 1893 ein ganz ähnliches Verfahren zur ersten Einführung in die Lehre von den Logarithmen vor, wobei er sich für die Unterrichtszwecke mit einer geometrischen Reihe begnügt, deren Quotient $1+\frac{1}{10^2}$ ist. Er faßt die Glieder dieser Reihe als Ergebnisse von Zinsaufgaben auf und bemerkt (im Anschluß an Zeuthen), daß man auch schon die von Stevin 1585, also vor Bürgi und Neper, in seiner Practique d'Arithmétique (vgl. Cantor II, S. 615) veröffentlichten Zinstafeln in ähnlicher Weise wie Logarithmentafeln zur Erleichterung des numerischen Rechnens hätte benutzen können.

also dem Gliede 230 270,022 der arithmetischen Reihe gerade das Glied 10^9 der geometrischen entspricht. Mit einem Logarithmensystem im modernen Sinne kann man die Bürgischen Progreß-Tabulen erst vergleichen, wenn man jedes Glied der geometrischen Reihe durch 10^8 und jedes Glied der arithmetischen Reihe durch 10^5 dividiert. Es gehört alsdann zu der Zahl

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n$$

der Logarithmus

$$\frac{n}{10^4},$$

oder für

$$n = \nu \cdot 10^4,$$

zur Zahl

$$\left[\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^\nu$$

der Logarithmus ν.

Nach der angegebenen kleinen Umformung können wir also die Bürgischen Tafeln als ein Logarithmensystem mit der Basis

$$\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2{,}7181459 \ldots$$

ansehen, welche sich von dem in der Analysis eine wichtige Rolle spielenden Grenzwerte

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818 \ldots$$

erst in der vierten Dezimale unterscheidet.

Neper erläutert die Beziehung zwischen seinen beiden Reihen durch eine der Mechanik entlehnte Betrachtung. Er ordnet einem Punkte, der auf einer geraden Linie mit unveränderlicher Geschwindigkeit läuft, einen anderen Punkt zu, der sich auf einer zweiten Geraden gegen einen festen Punkt hin mit einer Geschwindigkeit bewegt, die dem Abstande von diesem gleich ist. Man erkennt leicht, daß, während die Wege des ersten Punktes in arithmetischer Reihe wachsen, die Abstände des zweiten von dem festen Punkte in geometrischer Reihe abnehmen.

Hätte Neper, der Aufgabe entsprechend, die Geschwindigkeit des zweiten Punktes wirklich als stetig veränderlich betrachtet, so würde ihn der Zusammenhang zwischen seiner arithmetischen und seiner geometrischen Reihe auf dasjenige Logarithmensystem geführt haben, dessen Basis gerade der reziproke Wert der vorhin genannten Zahl e ist. Neper ging aber nicht zum Grenzwerte über, sondern nahm die Geschwindigkeit auf einer sehr kleinen Strecke (dem

$10^{7\text{ten}}$ Teil des ganzen Weges) als konstant an, nämlich gleich der halben Summe der Geschwindigkeiten in den Endpunkten der kleinen Strecke, und gelangte so zu einer geometrischen Reihe, deren allgemeines Glied $10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ ist, während das entsprechende der arithmetischen Reihe $\left(1 + \frac{0{,}5}{10^7}\right) \cdot n$ lautet. Die Glieder der arithmetischen Reihe nannte nun Neper in der schon erwähnten „Descriptio“ Logarithmen[1]). Mit einem Logarithmensystem im heutigen Sinne werden diese Reihen erst vergleichbar, wenn man ihre Glieder durch 10^7 dividiert. Es entspricht alsdann dem Numerus

$$(1 - 10^{-7})^n$$

der Logarithmus

$$\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}\right) \cdot n \cdot 10^{-7},$$

oder für

$$\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}\right) \cdot n \cdot 10^{-7} = \nu,$$

dem Numerus

$$(1 - 10^{-7})^{\frac{\nu \cdot 10^7}{1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}}}$$

der Logarithmus ν, oder es ist

$$\nu = \log\left[(1 - 10^{-7})^{\frac{10^7}{1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}}}\right]^\nu;$$

die Basis des Logarithmensystems wäre also die Zahl

$$(1 - 10^{-7})^{\frac{10^7}{1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}}},$$

die sich nur sehr wenig von $\frac{1}{e}$ unterscheidet. Neper und Bürgi sind also bei Vermeidung der Grenzübergänge mit ihren Reihen durchaus im rationalen Zahlengebiete geblieben. Die Berechnung der Reihe

$$10^7, \quad 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right), \quad 10^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2, \ldots$$

1) Ursprünglich, nämlich in der zwar erst (nach Nepers Tode) 1619, also nach der Descriptio veröffentlichten, aber schon vor ihr verfaßten Mirificorum logarithmorum canonis Constructio, hatte er die Glieder der arithmetischen Reihe „numeri artificiales“, im Gegensatze zu den „numeri naturales“, den Gliedern der geometrischen Reihe, genannt.

bis hin zu einem Gliede, das gleich der Hälfte des Anfangsgliedes ist, hätte eine außerordentliche Arbeit erfordert (nämlich die Berechnung von etwa 6 900 000 Gliedern). Neper hat deshalb einen Weg eingeschlagen (mitgeteilt in der „Constructio", siehe Anm. auf vor. Seite), der scheinbar komplizierter ist als Bürgis Methode, in Wirklichkeit aber die Ausführung der Arbeit nicht nur erleichterte, sondern überhaupt erst möglich machte. Er berechnete nämlich von der ursprünglichen Reihe nur 101 Glieder, bildete dann eine zweite geometrische Reihe, deren Anfangsglied dasselbe war wie das der ersten, deren zweites Glied aber (wenigstens nahezu) mit dem 101ten Gliede der ersten Reihe übereinstimmte. Von dieser zweiten Reihe berechnete er 51 Glieder und ging dann in ähnlicher Weise zu einer dritten und nach Berechnung von 21 Gliedern derselben endlich zu einer vierten Reihe über, in welcher der Quotient zweier benachbarten Glieder $\left(1 - \frac{1}{100}\right)$ ist und deren 70tes Glied etwa gleich der Hälfte von 10^7 wird. Die uns fremdartig anmutende Einrichtung, daß, während die Glieder der arithmetischen Reihe wachsen, die der geometrischen abnehmen, so daß gerade den Zahlen, die kleiner als das Anfangsglied sind, positive Logarithmen entsprechen, hatte seinen Grund darin, daß Neper die Tabellen vornehmlich für trigonometrische Zwecke verwandte und als Logarithmen der Sinus und Kosinus positive Zahlen haben wollte.

Bald nach dem Erscheinen der Descriptio trat zu John Neper in Beziehung sein Landsmann Henry Briggs, welcher von der neuen Erfindung entzückt war. Den gemeinsamen Beratungen beider entsprang der Gedanke, die Reihen so abzuändern, daß der Zahl 10 der geometrischen Reihe die Zahl 1 der arithmetischen entspricht.[1]) Neper starb bald nach der Zusammenkunft, und so berechnete Briggs allein die neuen Tafeln. Im Jahre 1617 gab er die Logarithmorum Chilias prima heraus, welche die Logarithmen der Zahlen 1 bis 1000 für die Basis 10 auf 8 Dezimalen enthält. 1624 folgte seine Arithmetica logarithmica mit den Logarithmen der Zahlen 1 bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000 auf 14 Stellen. Während Briggs noch damit beschäftigt war, die Lücke auszufüllen, hatte sich schon ein anderer, nämlich der Holländer Adriaen Vlack, an die gleiche Arbeit gemacht; er veröffentlichte 1628 die 10 stelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100 000.

---

1) In der Vorrede der von Edward Wright besorgten englischen Übersetzung der Descriptio sagt Neper schon, er beabsichtige, alle seine Logarithmen durch eine bestimmte Zahl, nämlich 2,3025851, zu dividieren. Er wäre dann zu einem System gelangt, in welchem zur Zahl $\frac{1}{10}$ der Logarithmus 1 gehörte.

Auf die weitere Geschichte der Logarithmen können wir hier nicht eingehen; wir verweisen deswegen auf M. Cantor, Vorlesungen II, S. 725—748, und auf Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik II, S. 141—186. Hinzufügen wollen wir nur noch, daß die moderne Definition des Logarithmus als Potenzexponent sich (nach Tropfke) zum ersten Male in Gardiners Tables of Logarithms, London 1742, ausdrücklich und deutlich ausgesprochen findet[1]), während die allgemeine Anerkennung dieser Auffassung der Logarithmen erst Eulers Introductio in analysin infinitorum (1748) zu verdanken ist.

B. Begründung des Begriffes „Logarithmus" im rationalen Zahlengebiete.

Daß es im Gebiete der rationalen Zahlen für eine beliebige positive Basis zu einer beliebigen positiven Zahl im allgemeinen keinen Logarithmus gibt, haben wir schon Kap. II, § 5 D, S. 96 gezeigt.

In ähnlicher Weise aber, wie wir die im Bereiche der rationalen Zahlen im allgemeinen unlösbare Aufgabe, aus einer beliebigen positiven Zahl irgend eine Wurzel zu ziehen, durch eine andere, lösbare, ersetzen konnten, wenn es nicht auf absolute mathematische Genauigkeit ankommt, so sind wir unter derselben Bedingung auch imstande, zu einem beliebigen positiven Numerus den zugehörigen Logarithmus zu finden[2]). Es sei z. B. die Aufgabe vorgelegt, für die Basis 10 den Logarithmus der Zahl 2 anzugeben. Existiert nun auch keine Potenz von 10 mit rationalem Exponenten, welche gleich 2 wäre, oder in andern Worten, gibt es auch keine Potenz von 10 mit ganzzahligem Exponenten, welche gleich einer Potenz von 2 mit ganzzahligem Exponenten wäre, so läßt sich doch immer nach Wahl einer beliebig großen positiven ganzen Zahl n eine positive ganze Zahl ν so bestimmen, daß

$$10^{\nu} < 2^{n} < 10^{\nu+1}.$$

Wir könnten ohne weiteres aus diesen Ungleichungen folgern:

$$10^{\frac{\nu}{n}} < 2 < 10^{\frac{\nu+1}{n}},$$

2 also zwischen zwei Potenzen von 10 einschließen, deren Exponenten sich nur um $\frac{1}{n}$ unterscheiden, d. h. um einen Bruch, den man durch Vergrößerung von n beliebig klein machen kann, wenn nur $10^{\frac{1}{n}}$ in

1) „The common Logarithm of a number is the Index of that power of 10 which is equal to the number."

2) Von einem „Näherungswerte" des Logarithmus können wir natürlich so lange nicht reden, wie wir nicht festgestellt haben, was unter dem wahren Werte des Logarithmus zu verstehen ist.

unserem Zahlengebiet existierte. Das ist jedoch für keinen Wert von n (natürlich außer für $n = 1$) der Fall. Es läßt sich aber (vgl. Kap. II, § 5 C, (III) und Kap. III, § 3 F) nach Wahl einer beliebig großen positiven ganzen Zahl m stets eine positive ganze Zahl μ so bestimmen, daß

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^n < 10 < \left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n.$$

Nun ist

$$\left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n - \left(\frac{\mu}{m}\right)^n = \frac{(\mu+1)^n - \mu^n}{m^n}$$

$$= \frac{1}{m^n}\left[n \cdot \mu^{n-1} + \frac{1}{2!} \cdot n(n-1) \cdot \mu^{n-2} + \frac{1}{3!} \cdot n(n-1)(n-2) \cdot \mu^{n-3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{n}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-1} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdot \frac{n-2}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-3} + \cdots.$$

Da

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^n < 10,$$

so ist auch

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-1} < 10, \quad \left(\frac{\mu}{m}\right)^{n-2} < 10 \text{ usw.,}$$

also

$$\left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n - \left(\frac{\mu}{m}\right)^n < 10\left(\frac{n}{m} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m} \cdot \frac{n-2}{m} + \cdots\right).$$

Setzen wir

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{G},$$

so ist

$$\frac{n-1}{m} < \frac{1}{G}, \quad \frac{n-2}{m} < \frac{1}{G} \text{ usw.,}$$

deshalb

$$\left(\frac{\mu+1}{m}\right)^n - \left(\frac{\mu}{m}\right)^n < \frac{10}{G}\left(1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{G} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{G^2} + \cdots\right).$$

Für hinreichend große Werte von $G = \frac{m}{n}$ kann die rechte Seite der Ungleichung, also auch die linke kleiner als eine beliebig kleine Zahl δ gemacht werden. Setzen wir

$$10 = \left(\frac{\mu}{m}\right)^n + \varepsilon \quad \text{oder} \quad (10-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} = \frac{\mu}{m}$$

und

$$10 = \left(\frac{\mu+1}{n}\right)^n - \varepsilon' \quad \text{oder} \quad (10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} = \frac{\mu+1}{m},$$

so können wir es durch hinreichend große Werte von $G = \frac{m}{n}$ er-

reichen, daß sowohl ε wie ε' kleiner als die beliebig klein gewählte Zahl δ werden.

Aus den Ungleichungen

$$10^{\nu} < 2^{n} < 10^{\nu+1}$$

folgt jetzt weiter:

$$(10-\varepsilon)^{\nu} < 2^{n} < (10+\varepsilon')^{\nu+1}$$

und

$$(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}} < 2 < (10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}}.$$

$$(10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}} = \left(\frac{\mu}{m}\right)^{\nu} \quad \text{und} \quad (10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}} = \left(\frac{\mu+1}{m}\right)^{\nu+1}$$

sind natürlich rationale Zahlen. Es ist ihre Differenz

$$(10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}} - (10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}} = (10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}\left[\left(\frac{10+\varepsilon'}{10-\varepsilon}\right)^{\frac{\nu}{n}} \cdot (10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} - 1\right]$$

$$< (10-\varepsilon)\left[\frac{10+\varepsilon'}{10-\varepsilon} \cdot (10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} - 1\right], \text{ da ja } \frac{\nu}{n} < 1,$$

$$< 10 \cdot \left[\frac{10+\delta}{10-\delta} \cdot (10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

Durch einen hinreichend großen Wert von n können wir es zunächst erreichen, daß $(10+\varepsilon')^{\frac{1}{n}}$ sich dem Werte 1 beliebig nähert (siehe Kap. II, § 5 B, S. 90). Geben wir alsdann der Zahl $G = \frac{m}{n}$ einen genügend großen Wert, so wird δ und infolgedessen der Unterschied des Bruches $\frac{10+\delta}{10-\delta}$ gegen 1 so klein, wie wir nur wollen. Für die gewählten Werte von n und $\frac{m}{n}$ wird demnach die rechte Seite der letzten Ungleichung, also auch

$$(10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}} - (10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}$$

kleiner als eine beliebig klein gegebene Zahl η.

Setzen wir jetzt

$$2 - (10-\varepsilon)^{\frac{\nu}{n}} = \varrho \quad \text{und} \quad (10+\varepsilon')^{\frac{\nu+1}{n}} - 2 = \varrho',$$

so ist auch $\varrho < \eta$ und $\varrho' < \eta$.

Die Gleichungen

$$2 - \varrho = (10 - \varepsilon)^{\frac{\nu}{n}}$$

und

$$2 + \varrho' = (10 + \varepsilon')^{\frac{\nu + 1}{n}}$$

zeigen, daß, wenn auch im Gebiete der rationalen Zahlen der Logarithmus von 2 für die Basis 10 nicht existiert, doch rationale Brüche $\frac{\nu}{n}$ bezüglich $\frac{\nu+1}{n}$ angegeben werden können, die in aller Strenge die Logarithmen von Zahlen sind, welche sich von 2 um weniger als die beliebig kleine Zahl η unterscheiden, für eine Basis, welche von 10 um weniger als die beliebig kleine Zahl δ abweicht. Wenn es nun nicht auf absolute Genauigkeit, sondern wie in allen Anwendungen der Mathematik nur darauf ankommt, daß der Fehler eine gewisse, durch die Natur der Aufgabe bedingte Grenze nicht überschreitet, so darf man eine der beiden Zahlen $\frac{\nu}{n}$ oder $\frac{\nu+1}{n}$, die sich nur um den durch Vergrößerung von n beliebig klein zu machenden Bruch $\frac{1}{n}$ unterscheiden, als den Logarithmus der Zahl 2 für die Basis 10 ansehen[1]), und tatsächlich versteht man beim praktischen Rechnen unter dem Logarithmus irgend einer positiven Zahl immer eine in der angegebenen Art bestimmte rationale Zahl, und auch wir wollen im vorliegenden Kapitel uns dieser Auffassung anschließen.

C. Methoden zur Berechnung der Logarithmen.

Nach dem unter B Auseinandergesetzten kommt die Berechnung des Logarithmus irgend einer positiven Zahl a für irgend eine positive Basis g darauf hinaus, eine Potenz von a zu suchen, welche mit einer Potenz von g möglichst übereinstimmt. Wir können uns auf den Fall beschränken, daß a eine Primzahl ist; denn, weil (nach Kap. I, § 11 C) sich jede beliebige ganze Zahl z in der Form

$$z = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \dots$$

1) Geht man z. B. von der Ungleichung $10^{308} < 2^{1024} < 10^{309}$ aus (vgl. C, I dieses Paragraphen) und substituiert zunächst für 10 eine benachbarte Zahl, aus welcher sich die 1024te Wurzel ausziehen läßt, etwa die Zahl $\left(\frac{4009}{4000}\right)^{1024}$, die ungefähr um $\frac{1}{100}$ kleiner ist als 10, und für 2 alsdann die $\left(\frac{308}{1024}\right)^{\text{te}}$ Potenz dieser Zahl, die ungefähr um $\frac{1}{500}$ kleiner ist als 2, so kann man für den im rationalen Zahlengebiete nicht vorhandenen $^{(10)}\log 2$ im oben angegebenen Sinne den Bruch $\frac{308}{1024}$ setzen.

darstellen läßt, wo $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Primzahlen und $n_1, n_2, n_3, \ldots$ positive ganze Zahlen bedeuten, ist

$$\log z = n_1 \log p_1 + n_2 \log p_2 + n_3 \log p_3 + \cdots$$

leicht zu berechnen, wenn man $\log p_1$, $\log p_2$, $\log p_3$, ... kennt.

Besteht näherungsweise die Gleichung $a^n = g^m$, so dürfen wir in dem unter B angegebenen Sinne setzen $^{(g)}\log a = \frac{m}{n}$. Einige Methoden, um möglichst schnell solche Zahlenpaare m, n zu finden, wollen wir an dem Beispiel $a = 2$, $g = 10$ erläutern.

I. Hätte man eine Tabelle für die Werte aller Potenzen von 2 bis zu einem sehr großen Exponenten hin, so könnte man leicht solche heraussuchen, die sich von Potenzen von 10 wenig unterscheiden.[1]) Andernfalls muß man durch fortgesetzte Multiplikation, indem man beispielsweise jede schon berechnete Potenz von 2 ins Quadrat erhebt, allmählich zu höheren Potenzen von 2 aufsteigen. Die vollständige und genaue Berechnung wäre eine praktisch nicht durchführbare Arbeit, sie ist aber auch nicht erforderlich; denn für unseren Zweck interessiert es uns nur zu wissen, zwischen welchen Potenzen von 10 irgend eine Potenz von 2 liegt. Wir schreiben deshalb von vornherein jede Potenz von 2 in Form eines Produktes, dessen einer Faktor eine Potenz von 10 und dessen anderer Faktor eine zwischen 1 und 10 liegende Dezimalzahl ist, die wir auf 2 Stellen abkürzen. Da nun aber infolge der von dieser Abkürzung herrührenden Ungenauigkeit bei den höheren Potenzen auch der Exponent von 10 unrichtig werden könnte, schließen wir jede Potenz von 2 zwischen zwei Werte ein, von denen der erste sicher nicht größer, der zweite sicher nicht kleiner als die betreffende Potenz von 2 ist.

Wir gehen aus von

$$2^8 = 2{,}56 \cdot 10^2;$$

hieraus folgt, weil

$$6{,}55 < 2{,}56^2 = 6{,}5536 < 6{,}56:$$

$$6{,}55 \cdot 10^4 < 2^{16} < 6{,}56 \cdot 10^4$$

1) Im Programm des Prinz Heinrich-Gymnasiums zu Berlin vom Jahre 1905 hat A. Schmidt eine derartige Tabelle veröffentlicht oder vielmehr eine Tabelle von Potenzen von 2, dividiert durch solche Potenzen von 10, daß der Quotient zwischen 1 und 10 liegt. Irgend welche anderen Zahlen (bezüglich ihre zweiten, dritten usw. Potenzen) kann man zwischen Zahlen der Tabelle einschließen und auf diese Weise ihren Logarithmus bestimmen.

und weiter:

$$\begin{aligned}
4{,}29 \cdot 10^{9} &< 2^{32} < 4{,}31 \cdot 10^{9},\\
1{,}84 \cdot 10^{19} &< 2^{64} < 1{,}86 \cdot 10^{19},\\
3{,}38 \cdot 10^{38} &< 2^{128} < 3{,}46 \cdot 10^{38},\\
1{,}14 \cdot 10^{77} &< 2^{256} < 1{,}20 \cdot 10^{77},\\
1{,}29 \cdot 10^{154} &< 2^{512} < 1{,}44 \cdot 10^{154},\\
1{,}66 \cdot 10^{308} &< 2^{1024} < 2{,}08 \cdot 10^{308},\\
2{,}75 \cdot 10^{616} &< 2^{2048} < 4{,}33 \cdot 10^{616},\\
7{,}56 \cdot 10^{1232} &< 2^{4096} < 1{,}88 \cdot 10^{1233}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich:

$$10^{1232} < 2^{4096} < 10^{1234},$$

2^{4096} ist also zufolge dieser Ungleichungen zwischen zwei Potenzen von 10 eingeschlossen, deren Exponenten sich schon um 2 unterscheiden. Wir bleiben deshalb lieber bei der vorletzten Ungleichung stehen und folgern aus ihr:

$$10^{616} < 2^{2048} < 10^{617}.$$

In dem unter B angegebenen Sinne setzen wir deshalb ${}^{(10)}\log 2$ entweder gleich

$$\frac{616}{2048} = 0{,}300\,78\ldots$$

oder gleich

$$\frac{617}{2048} = 0{,}301\,27\ldots.$$

Beschränken wir uns auf drei Dezimalen, so liefern beide Brüche denselben Wert 0,301 [1]).

II. Statt durch fortgesetztes Potenzieren von 2 können wir auch durch wiederholtes Radizieren aus 10 den Logarithmus von 2 für die Basis 10 bestimmen. Es ist

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162\,277\ldots,$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{3{,}162\,277\cdots} = 1{,}778\,28\ldots$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen und ziehen aus jeder Seite der entstehenden Gleichung die Quadratwurzel, so erhalten wir:

$$10^{\frac{3}{8}} = \sqrt{3{,}162\,277 \cdot 1{,}778\,28} = 2{,}371\,374\ldots.$$

1) Diese Methode stammt im wesentlichen von H. Briggs, welcher aber allmählich zu den Potenzen 2^{10}, 2^{100}, 2^{1000} usw. aufsteigt.

Führen wir dieselbe Rechenoperation an den beiden letzten Gleichungen aus, so folgt:

$$10^{\frac{5}{16}} = \sqrt{1{,}778\,28 \cdot 2{,}371\,374} = 2{,}053\,525\ldots$$

Nun ist $10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{5}{16}} = 10^{\frac{9}{16}}$, deshalb

$$10^{\frac{9}{32}} = \sqrt{1{,}778\,28 \cdot 2{,}053\,525} = 1{,}910\,953\ldots;$$

$$\sqrt{10^{\frac{5}{16}} \cdot 10^{\frac{9}{32}}} = 10^{\frac{19}{64}} = \sqrt{2{,}053525 \cdot 1{,}910953} = 1{,}980956;$$

$$\sqrt{10^{\frac{5}{16}} \cdot 10^{\frac{19}{64}}} = 10^{\frac{39}{128}} = \sqrt{2{,}053\,525 \cdot 1{,}980\,956} = 2{,}016\,914;$$

$$\sqrt{10^{\frac{19}{64}} \cdot 10^{\frac{39}{128}}} = 10^{\frac{77}{256}} = \sqrt{1{,}980\,956 \cdot 2{,}016\,914} = 1{,}998\,855;$$

$$\sqrt{10^{\frac{39}{128}} \cdot 10^{\frac{77}{256}}} = 10^{\frac{155}{512}} = \sqrt{2{,}016\,914 \cdot 1{,}998\,855} = 2{,}007\,864;$$

$$\sqrt{10^{\frac{77}{256}} \cdot 10^{\frac{155}{512}}} = 10^{\frac{309}{1024}} = \sqrt{1{,}998\,855 \cdot 2{,}007\,864} = 2{,}003\,354;$$

$$\sqrt{10^{\frac{77}{256}} \cdot 10^{\frac{309}{1024}}} = 10^{\frac{617}{2048}} = \sqrt{1{,}998\,855 \cdot 2{,}003\,354} = 2{,}001\,103;$$

$$\sqrt{10^{\frac{77}{256}} \cdot 10^{\frac{617}{2048}}} = 10^{\frac{1233}{4096}} = \sqrt{1{,}998\,855 \cdot 2{,}001\,103} = 1{,}999\,976.$$

Ersetzt man die Zahl 2 durch 2,001 103, so findet man wie unter I für log 2 den Wert $\frac{617}{2048} = 0{,}301\,27$; substituiert man aber für 2 die Zahl 1,999 976, die sich noch weniger von 2 unterscheidet, so findet man $\log 2 = \frac{1233}{4096} = 0{,}301\,025\,4\ldots$ oder auf fünf Stellen 0,301 03. Es leuchtet ein, daß man durch bloße Fortsetzung desselben Verfahrens auf Potenzen von 10 kommt, die sich dem Werte 2 immer mehr nähern[1]).

III. Unser Ziel, Potenzen von 2 zu finden, die sich von Potenzen der Zahl 10 möglichst wenig unterscheiden, kann man auch auf dem Wege erreichen, daß man eine Potenz von 2, die nur wenig kleiner als eine Potenz von 10 ist, mit einer Potenz von 2 multipliziert, die nur wenig größer als eine Potenz von 10 ist. Die neu gefundene Potenz multipliziert man, wenn sie größer ist als die ihr am nächsten

1) Die Methode II findet sich im Appendix zu Nepers Constructio. Ihrer bedienten sich Briggs, Vlack, auch Kepler.

liegende Potenz von 10, wieder mit der ersten der beiden soeben genannten Potenzen von 2, wenn sie aber kleiner als die benachbarte Potenz von 10 ist, mit der an zweiter Stelle genannten Potenz von 2. Indem man so fortfährt, gelangt man zu Potenzen von 2, die, durch eine passende Potenz von 10 dividiert, einen Quotienten ergeben, der sich immer mehr dem Werte 1 nähert. Wie in I behalten wir nur die ersten Ziffern bei. Damit auch noch in den letzten Gleichungen drei Stellen hinter dem Komma zuverlässig sind, rechnen wir mit fünf Dezimalen[1]).

Wir gehen aus von

1. $$2^3 = 0{,}8 \cdot 10$$

und

2. $$2^{10} = 1{,}024 \cdot 10^3.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen folgt

3. $$2^{13} = 0{,}8192 \cdot 10^4$$

und weiter

4. $2^{10} \cdot 2^{13} = 2^{23} = 0{,}83886 \cdot 10^7$, (Fehler $f < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$),
5. $2^{10} \cdot 2^{23} = 2^{33} = 0{,}85899 \cdot 10^{10}$, ($f < 1 \cdot 10^{-5}$),
6. $2^{10} \cdot 2^{33} = 2^{43} = 0{,}87961 \cdot 10^{13}$, ($f < 1{,}5 \cdot 10^{-5}$),
7. $2^{10} \cdot 2^{43} = 2^{53} = 0{,}90072 \cdot 10^{16}$, ($f < 2 \cdot 10^{-5}$),
8. $2^{10} \cdot 2^{53} = 2^{63} = 0{,}92234 \cdot 10^{19}$, ($f < 2{,}5 \cdot 10^{-5}$),
9. $2^{10} \cdot 2^{63} = 2^{73} = 0{,}94448 \cdot 10^{22}$, ($f < 3 \cdot 10^{-5}$),
10. $2^{10} \cdot 2^{73} = 2^{83} = 0{,}96715 \cdot 10^{25}$, ($f < 3{,}5 \cdot 10^{-5}$),
11. $2^{10} \cdot 2^{83} = 2^{93} = 0{,}99036 \cdot 10^{28}$, ($f < 4 \cdot 10^{-5}$),
12. $2^{10} \cdot 2^{93} = 2^{103} = 1{,}01413 \cdot 10^{31}$, ($f < 4{,}5 \cdot 10^{-5}$),
13. $2^{93} \cdot 2^{103} = 2^{196} = 1{,}00435 \cdot 10^{59}$, ($f < (4 + 4{,}5 + 0{,}5) \cdot 10^{-5} = 9 \cdot 10^{-5}$),
14. $2^{93} \cdot 2^{196} = 2^{289} = 0{,}99467 \cdot 10^{87}$, ($f < (4 + 9 + 0{,}5) \cdot 10^{-5} = 13{,}5 \cdot 10^{-5}$),
15. $2^{196} \cdot 2^{289} = 2^{485} = 0{,}99900 \cdot 10^{146}$, ($f < 23 \cdot 10^{-5}$),
16. $2^{196} \cdot 2^{485} = 2^{681} = 1{,}00335 \cdot 10^{205}$, ($f < 32{,}5 \cdot 10^{-5}$),
17. $2^{485} \cdot 2^{681} = 2^{1166} = 1{,}00235 \cdot 10^{351}$, ($f < 56 \cdot 10^{-5}$),
18. $2^{485} \cdot 2^{1166} = 2^{1651} = 1{,}00135 \cdot 10^{497}$, ($f < 79{,}5 \cdot 10^{-5}$),
19. $2^{485} \cdot 2^{1651} = 2^{2136} = 1{,}00035 \cdot 10^{643}$, ($f < 103 \cdot 10^{-5}$).

1) In der schon unter A, Seite 234 zitierten Programmabhandlung behält Koppe bei Anwendung dieser Methode von vornherein nur drei Stellen bei, was zur Folge hat, daß er findet: $2^{485} = 1{,}003 \cdot 10^{146}$, während tatsächlich $2^{485} < 10^{146}$.

Eine weitere Fortsetzung dieser Rechnung hat keinen Zweck, weil wir bei Berücksichtigung des möglichen Fehlers schon nicht mehr mit Sicherheit angeben können, ob in (19) der erste Faktor der rechten Seite größer oder kleiner als 1 ist.[1]) Man erkennt, daß der erste Faktor der rechten Seite sich immer mehr dem Werte 1 nähert. Vernachlässigt man seinen Unterschied gegen 1, so liefert jede der Gleichungen (1) bis (19) einen Wert von ${}^{(10)}\log 2$, nämlich

Gleichung 1. den Wert $\frac{1}{3} = 0{,}33333$,

2. „ „ $\frac{3}{10} = 0{,}30000$,

11. „ „ $\frac{28}{93} = 0{,}301075$,

13. „ „ $\frac{59}{196} = 0{,}3010204$,

15. „ „ $\frac{146}{485} = 0{,}3010309$,

19. „ „ $\frac{643}{2136} = 0{,}3010299625$ [2]),

während sich in zehnstelligen Logarithmentafeln auf Grund von mit noch größerer Genauigkeit ausgeführten Rechnungen findet:

$$\log 2 = 0{,}3010299957\,.$$

IV. Die Anwendung der unter I—III angegebenen Methoden erfordert, daß man bei der Berechnung des Logarithmus einer neuen Zahl immer wieder von vorn anfängt. Nun gibt es auch Methoden, die es ermöglichen, unter Benutzung von ein für allemal im voraus berechneten Hilfstafeln die Logarithmen beliebiger Zahlen verhältnismäßig schnell zu finden. Ein solches Verfahren stammt von Long[3]) (Philosophical Transactions, 1714). Wenn für die Basis 10

$$\log a = \alpha + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots,$$

wo die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Ziffern bedeuten, also kleiner als 10 sind, so folgt:

$$a = 10^{\alpha} \cdot 10^{\frac{\alpha_1}{10}} \cdot 10^{\frac{\alpha_2}{100}} \cdot 10^{\frac{\alpha_3}{1000}} \cdots.$$

1) Eine von vornherein mit mehr Dezimalen durchgeführte Rechnung lehrt, daß $2^{2136} = 1{,}00016 \cdot 10^{643}$.

2) Dieselben Brüche gibt z. B. auch Tropfke (Geschichte d. Elementarmathematik II, S. 169) als Näherungswerte eines von dem oben dargestellten nur scheinbar verschiedenen, im wesentlichen aber mit ihm übereinstimmenden Kettenbruch-Verfahrens.

3) Nach Tropfke II, S. 170.

Gelingt es umgekehrt, a auf diese letztere Form zu bringen, so hat man damit auch die Zahlen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, also $\log a$. Das kann man nun erreichen unter Benutzung von Tafeln, welche die Werte enthalten der ersten bis neunten Potenz von $10^{\frac{1}{10}}$, der ersten bis neunten Potenz von $10^{\frac{1}{100}}$, der ersten bis neunten Potenz von $10^{\frac{1}{1000}}$ usw. Man bestimmt zunächst α und vergleicht $\frac{a}{10^\alpha}$ mit den Potenzen von $10^{\frac{1}{10}}$. Die größte, welche noch kleiner als $\frac{a}{10^\alpha}$ ist, liefert α_1, und nach Ausführung der Division $\frac{a}{10^\alpha} : 10^{\frac{\alpha_1}{10}}$ findet man aus der zweiten Tabelle in gleicher Weise α_2 usw.

Denkt man sich $\log a$ als systematischen Bruch mit der Grundzahl 2 geschrieben:

$$\log a = \alpha + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \cdots,$$

wo jetzt jede der Ziffern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ nur 0 oder 1 sein kann, so folgt in gleicher Weise:

$$a = 10^\alpha \cdot 10^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot 10^{\frac{\alpha_2}{2^2}} \cdot 10^{\frac{\alpha_3}{2^3}} \cdots.$$

Die Ziffern $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bestimmt man ähnlich wie vorher, man braucht dazu jetzt aber nur die Werte von

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt{\sqrt{10}}, \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \quad \text{usw.},$$

kommt also mit Quadratwurzeln aus und erspart sich, da ja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ nur die Werte 0 oder 1 haben können, die Berechnung von Potenzen dieser Wurzeln. (Vgl. Baltzer, Die Elemente der Mathematik I, Allgemeine Arithmetik, § 20.)

V. In seiner Arithmetica logarithmica (1624) hat Briggs ein Verfahren angegeben, um aus einer beschränkten Anzahl zuerst ausführlich berechneter Logarithmen die Logarithmen aller Zahlen schnell ermitteln zu können. Die vorgelegte, als Dezimalbruch geschriebene Zahl

$$A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots,$$

deren ganzzahliger Bestandteil a_0 ohne Beschränkung der Allgemeinheit als eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ vorausgesetzt werden darf, läßt sich, indem man sie durch a_0 dividiert und den Quotienten als Dezimalzahl schreibt, auf die Form bringen:

$$A = a_0 \left(1 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_4}{10^4} + \cdots\right).$$

Wenn man den zweiten Faktor der rechten Seite durch $1+\frac{\alpha_1}{10}$ dividiert, erhält man eine Gleichung von der Gestalt:

$$\left(1+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\frac{\alpha_3}{10^3}+\frac{\alpha_4}{10^4}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}+\frac{\beta_3}{10^3}+\frac{\beta_4}{10^4}+\cdots\right).$$

Der zweite Faktor der rechten Seite kann keine Zehntel enthalten, denn es wäre schon

$$\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{10}\right)=1+\frac{\alpha_1+1}{10}+\frac{\alpha_1}{10^2}$$

sicher größer als die linke Seite der vorigen Gleichung.

In ähnlicher Weise erhält man weiter:

$$\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}+\frac{\beta_3}{10^3}+\frac{\beta_4}{10^4}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right)\cdot\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}+\frac{\gamma_4}{10^4}+\cdots\right),$$

wo der zweite Faktor der rechten Seite Hundertstel nicht enthalten kann, und

$$\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}+\frac{\gamma_4}{10^4}+\cdots\right)=\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right)\cdot\left(1+\frac{\delta_4}{10^4}+\cdots\right).$$

Durch sukzessives Einsetzen folgt aus diesen Gleichungen:

$$A=a_0\cdot\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)\cdot\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right)\cdot\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right)\cdot\left(1+\frac{\delta_4}{10^4}\right)\cdots$$ [1])

und

$$\log A=\log a_0+\log\left(1+\frac{\alpha_1}{10}\right)+\log\left(1+\frac{\beta_2}{10^2}\right)+\log\left(1+\frac{\gamma_3}{10^3}\right)+\log\left(1+\frac{\delta_4}{10^4}\right)+\cdots.$$

a_0 kann die Werte haben 1; 2; ...; 9;

$1+\frac{\alpha_1}{10}$ die Werte 1,1; 1,2; ...; 1,9;

$1+\frac{\beta_2}{10^2}$ die Werte 1,01; 1,02; ...; 1,09;

$1+\frac{\gamma_3}{10^3}$ die Werte 1,001; 1,002; ...; 1,009;

$1+\frac{\delta_4}{10^4}$ die Werte 1,0001; 1,0002; ...; 1,0009 usw.

---

1) Für die willkürlich gewählte Zahl $A = 6{,}407\,262$ erhält man durch das oben angegebene einfache Divisionsverfahren der Reihe nach die Gleichungen:

$$\begin{aligned}A &= 6\cdot 1{,}067\,877\\ &= 6\cdot 1{,}06\cdot 1{,}007\,431\\ &= 6\cdot 1{,}06\cdot 1{,}007\cdot 1{,}000\,428\\ &= 6\cdot 1{,}06\cdot 1{,}007\cdot 1{,}0004\cdot 1{,}000\,028 = 6\cdot 1{,}06\cdot 1{,}007\cdot 1{,}0004\cdot 1{,}00002\,.\\ &\qquad\cdot 1{,}000\,008.\end{aligned}$$

Die Logarithmen aller dieser Zahlen hat **Briggs** zunächst auf 15 Dezimalstellen berechnet[1]). Aus ihnen kann man, nachdem durch das Divisionsverfahren die Werte von α_0, α_1, β_2, γ_3, δ_4 usw. gefunden sind, durch bloße Addition den Logarithmus der vorgelegten Zahl A bestimmen.

VI. Die vorstehend mitgeteilten Methoden hat man früher zur Berechnung der Logarithmen wirklich benutzt. Heute können sie noch dazu dienen, um Schülern, die noch nicht in die Analysis eingeführt sind, die Möglichkeit der Logarithmenberechnung zu zeigen. Zur leichteren und genaueren Berechnung der Logarithmen kennt man seit dem 18. Jahrhundert andere, zweckmäßigere Verfahren, welche auf der Entwicklung des Logarithmus in eine stark konvergierende Reihe beruhen, und welche hier noch nicht besprochen werden können. Man findet nach diesen Methoden zunächst die sogenannten „natürlichen" Logarithmen, deren Basis die schon S. 235 erwähnte Zahl

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist.

D. Logarithmen-Systeme und -Tafeln.

Die Gesamtheit der Logarithmen aller positiven Zahlen für irgend eine Basis nennt man ein Logarithmen-System. Als Basis kann jede von 1 verschiedene positive Zahl verwandt werden. Besonders einfach aber gestaltet sich das Rechnen mit Logarithmen systematischer Zahlen, wenn man als Basis die Grundzahl des Zahlensystems, bei unserem dekadischen System also die Zahl 10 wählt. Alle dekadischen Zahlen nämlich, welche aus denselben Ziffern in derselben Reihenfolge bestehen, die sich also nur durch die Stellung des Kommas bezüglich durch angehängte Nullen unterscheiden, lassen sich aus einer von ihnen, z. B. derjenigen, welche zwischen 1 und 10 liegt und A heißen möge, durch Multiplikation oder durch Division mit einer Potenz von 10 ableiten; sie sind sämtlich in der Form

$$z_1 = A \cdot 10^m \quad \text{oder} \quad z_2 = A : 10^n$$

enthalten, wo m, n positive ganze Zahlen bedeuten.

1) Arithmetica logarithmica, S. 32 (1624). Ähnlicher Methoden bedient man sich noch jetzt, wenn man für einzelne Zahlen die Logarithmen auf eine größere Anzahl von Dezimalstellen braucht, als sie die gewöhnlichen Tafeln geben. Man findet deshalb solche Hilfstafeln wie die **Briggs**schen auch in neueren Werken vielfach auf eine größere Anzahl von Stellen abgedruckt. Vgl. die Literaturangaben in der Encyklopädie d. Math. Wissenschaften Bd. I, S. 993 und **Lüroth**, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, §§ 53—55.

Für eine beliebige Basis des Logarithmen-Systems ist deshalb

$$\log z_1 = \log A + m \cdot \log 10 \quad \text{bezüglich} \quad \log z_2 = \log A - n \cdot \log 10.$$

Wählt man 10 als Basis des Logarithmen-Systems, so nehmen die Gleichungen die einfachere Gestalt an:

$$\log z_1 = \log A + m \quad \text{und} \quad \log z_2 = \log A - n.$$

Die Logarithmen aller dieser Zahlen z_1, z_2 unterscheiden sich demnach von $\log A$ nur um eine ganze Zahl; sie stimmen in den Dezimalstellen, deren Gesamtheit man als „Mantisse"[1]) bezeichnet, überein. In den Zusammenstellungen der Logarithmen der verschiedenen Zahlen für die Basis 10, den sogenannten Logarithmen-Tafeln, braucht deshalb nur für eine der Zahlen, welche in den Ziffern und deren Reihenfolge übereinstimmen, die Mantisse des Logarithmus angegeben zu sein. Die Tafeln enthalten deshalb nur die Logarithmen der nach ihrer natürlichen Reihenfolge geordneten ganzen Zahlen. Die ganze Zahl, welche man zur Mantisse hinzuzufügen hat, und welche man „Kennziffer" oder „Charakteristik" nennt[2]), läßt sich ohne weiteres bestimmen. Stehen nämlich in der Zahl vor dem Komma n ($\geqq 1$) Stellen, so liegt sie zwischen 10^{n-1} und 10^n, ihr Logarithmus also zwischen $(n-1)$ und n, die Kennziffer ist demnach $n-1$. Enthält aber die Zahl keine Ganzen und unmittelbar hinter dem Komma etwa noch $(n-1)$ Nullen ($n \geqq 1$), so ist sie gleich einer zwischen 1 und 10 liegenden Zahl A, dividiert durch 10^n; ihr Logarithmus ist also gleich einer Differenz, deren Minuend ein echter Dezimalbruch und deren Subtrahend die ganze Zahl n ist. Für das Rechnen mit Logarithmen ist es zweckmäßiger, die Subtraktion nicht auszuführen, die Differenz vielmehr stehen zu lassen; man nennt alsdann auch die mit negativem Vorzeichen versehene Zahl n die Kennziffer.

Wegen der soeben angegebenen Vorteile bedient man sich in der Praxis fast nur der Logarithmen für die Basis 10, die man durch

---

1) Mantissa ist ein Wort etrurischen Ursprungs und bedeutet „Zugabe". Wallis hat es in seiner Algebra (1685) für die Ziffern irgend eines Dezimalbruches benutzt, Euler in seiner Introductio (1748) wohl zuerst speziell für die Dezimalstellen eines Logarithmus. Seitdem hat es die letztere engere Bedeutung behalten. Nur Gauß gebraucht es gelegentlich wieder in seinen Disquisitiones Arithmeticae für die Dezimalstellen, welche sich bei Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Dezimalbruch ergeben. Vgl. Tropfke II, S. 177 und Encyklopädie d. Math. Wissensch. I, S. 986.

2) Das Wort Charakteristik braucht schon Briggs in seiner Arithmetica logarithmica (1624), das deutsche Wort Kennziffer Kästner in seinen Anfangsgründen der Arithmetik (1. Aufl. 1759, 2. Aufl. 1764).

das Symbol „log" ohne weiteren Zusatz zu bezeichnen pflegt. Weil sie zuerst von Briggs berechnet worden sind, heißen sie auch Briggssche Logarithmen. In der Analysis spielen eine wichtige Rolle die „natürlichen" Logarithmen, deren Basis die schon mehrfach erwähnte Zahl e ist, welche, weil sie zu den rationalen Zahlen nicht gehört, an dieser Stelle noch nicht strenge definiert werden kann. Den natürlichen Logarithmus einer Zahl z schreibt man log nat z oder lnz oder auch lz.

Kennt man die Logarithmen aller Zahlen für irgend eine Basis, so ist es leicht, sie für irgend eine andere Basis zu berechnen. Wenn nämlich

$$\alpha_1 = {}^{(g_1)}\log a \quad \text{oder} \quad g_1^{\alpha_1} = a$$

und

$$\alpha_2 = {}^{(g_2)}\log a \quad \text{oder} \quad g_2^{\alpha_2} = a,$$

so folgt:

$$g_1^{\alpha_1} = g_2^{\alpha_2}.$$

Je nachdem man von beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus für die Basis g_1 oder für die Basis g_2 nimmt, erhält man hieraus:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \cdot {}^{(g_1)}\log g_2$$

bezüglich

$$\alpha_1 \cdot {}^{(g_2)}\log g_1 = \alpha_2 .$$

Aus den Logarithmen des zweiten Systems erhält man demnach die zu denselben Zahlen gehörigen des ersten, indem man jeden Logarithmus des zweiten Systems mit der gleichen Zahl ${}^{(g_1)}\log g_2$ multipliziert; aus den Logarithmen des ersten Systems erhält man die entsprechenden des zweiten, indem man jeden Logarithmus des ersten Systems mit ${}^{(g_2)}\log g_1$ multipliziert. So ergeben sich die Briggsschen Logarithmen aus den entsprechenden für die Basis e durch Multiplikation mit ${}^{(10)}\log e = 0{,}43429448 \ldots$ und die letzteren aus den ersteren durch Multiplikation mit ${}^{(e)}\log 10 = 2{,}302585 09 \ldots.$ Die Zahl, mit welcher man die Logarithmen eines Systems (besonders die für die Basis e) multiplizieren muß, um die entsprechenden eines anderen Systems zu erhalten, nennt man den Modulus[1]) des letzteren Systems in bezug auf das erstere.

Im Laufe der letzten 300 Jahre sind außerordentlich viele Logarithmentafeln veröffentlicht worden[2]). Die erste vollständige Tafel

1) Das Wort stammt von Cotes (Brief an Newton vom 25. Mai 1712); der oben angegebene Wert von ${}^{(10)}\log e$ war aber schon vorher von Mercator (Philosophical Transactions, 1668) und noch genauer, nämlich auf 60 Stellen, von Halley (Philosophical Transactions, 1695) berechnet worden.

2) Bierens de Haan gab 1875 eine Liste, welche 553 Tafeln umfaßt. Vgl. Encyklopädie d. Math. Wissensch. I, S. 987 und Tropfke II, S. 155.

der Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 stammt von Vlack, sie gibt die Logarithmen auf 10 Dezimalen. Lange Zeit hindurch hat man sich mit Vorliebe siebenstelliger Tafeln bedient. Erst im 19. Jahrhundert ist man auf fünf- oder vierstellige zurückgegangen, deren Genauigkeit für die meisten praktischen Zwecke als ausreichend erkannt worden ist. Selbstverständlich kann keine Tafel die Logarithmen aller Zahlen enthalten. So gibt z. B. die namentlich früher viel benutzte siebenstellige Vegasche Tafel die Logarithmen aller fünfstelligen Zahlen. Unmittelbar kann man aus ihr entnehmen auch die Logarithmen aller sechsstelligen Zahlen, deren letzte Ziffer eine Null, die aller siebenstelligen Zahlen, deren beide letzte Ziffern Nullen sind, usw. Durch ein einfaches Rechnungsverfahren, die sogenannte Interpolation, bestimmt man aber mittels der Tafel den Logarithmus jeder beliebigen sechs- oder siebenstelligen Zahl auf sieben Dezimalen genau. Je zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Tafel haben die konstante Differenz 1 bezüglich, wenn wir alle Zahlen durch Anhängen von zwei Nullen zu siebenstelligen machen, die Differenz 100. Der Anblick der Tafel lehrt, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Logarithmen nicht immer denselben Wert hat, vielmehr allmählich abnimmt. Benachbarte Differenzen sind aber gleich oder doch nahezu gleich. So entnehmen wir z. B. aus einer zufällig aufgeschlagenen Seite der Vegaschen Tafel, daß in dem Intervall 4729400—4729900 einer Vermehrung des Numerus um 100 stets eine Vermehrung des Logarithmus um $92 \cdot 10^{-7}$ entspricht. Um so mehr werden wir berechtigt sein, für das kleinere Intervall 4729400—4729500 anzunehmen, daß jedesmal, wenn der Numerus um denselben Betrag wächst, auch der Logarithmus um gleichviel zunimmt. Es muß dann einer Zunahme des Numerus um 1 ein Wachsen des Logarithmus um $0{,}92 \cdot 10^{-7}$ und einer Zunahme des Numerus um $d\,(d < 100)$ ein Wachsen des Logarithmus um $d \cdot 0{,}92 \cdot 10^{-7}$ entsprechen. So ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned}\log 4\,729\,452 &= \log 4\,729\,400 + 52 \cdot 0{,}92 \cdot 10^{-7}\\ &= 6{,}6748060 + 47{,}84 \cdot 10^{-7}\\ &= 6{,}6748108.\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man auch eine achte Stelle des Numerus noch berücksichtigen; die neunte Stelle aber übt auf einen siebenstelligen Logarithmus keinen Einfluß mehr aus. Zu einer Ungenauigkeit in der letzten (siebenten) Stelle könnte die Voraussetzung, daß in dem Intervall zweier aufeinanderfolgenden Zahlen die Logarithmen-Änderung der Numerus-Änderung proportional gesetzt werden darf, am ehesten noch für solche Zahlen führen, die im Anfange der Tafel

stehen, d. h. wenig größer als 10000 sind. Vega hat deshalb seine siebenstellige Tafel nicht nur bis 100000 sondern bis 101000 fortgeführt und ein neuerer Autor, E. Sang (A new table of seven-place logarithms, 1. Aufl. 1871, 2. Aufl. 1883) die seinige sogar bis 200000, so daß die Numeri, als siebenstellig aufgefaßt, in dem Intervall (1000000 bis 1010000) bezüglich (1000000 bis 2000000) nicht um 100, sondern immer nur um 10 wachsen. In dem zehnmal so kleinen Intervall kann dann natürlich mit viel größerer Genauigkeit die Logarithmen-Änderung der Numerus-Änderung proportional gesetzt werden. Zur bequemeren Ausführung der Interpolation sind in allen Logarithmentafeln unter der Überschrift „Partes proportionales" die Beträge (in Einheiten der letzten Stelle der Mantisse) angegeben, um welche der Logarithmus wächst, wenn der Numerus um $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$ Einheit seiner letzten Stelle zunimmt.

Mittels derselben Tafeln, die zu den in natürlicher Folge fortschreitenden Numeri die Logarithmen angeben, kann man auch umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus den Numerus bestimmen. Steht der Logarithmus selbst in der Tafel, so liest man den Numerus unmittelbar ab; andernfalls berechnet man ihn auf Grund der vorausgesetzten Proportionalität zwischen Logarithmus-Zuwachs und Numerus-Zuwachs unter Benutzung der Partes proportionales. Es gibt auch Tafeln, welche zu den in natürlicher Folge fortschreitenden Logarithmen die zugehörigen Numeri enthalten, die sogen. Antilogarithmentafeln. Gerade die älteste Tafel, die bereits unter § 5 A, S. 234 erwähnten Progreß-Tabulen von Joost Bürgi, war eine solche. Weil aber neben den Logarithmentafeln die der Antilogarithmen entbehrt werden können, ist ihre Anzahl bedeutend geringer als die der gewöhnlichen Logarithmentafeln[1]).

---

1) Vgl. die Literaturangaben in der Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften I, S. 997. — Daß bei Beschränkung auf kleine Intervalle die Logarithmen-Änderung der Numerus-Änderung proportional gesetzt werden darf, haben wir oben im Texte empirisch aus der Betrachtung der Logarithmentafeln gefunden. Zu einer genaueren Begründung sind die Elemente der Analysis erforderlich. Nach Kap. I, § 8 C ist

$$\log(a+x) - \log a = \log\left(\frac{a+x}{a}\right) = \log\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Nun wird in der Analysis gezeigt, daß $\log\left(1+\frac{x}{a}\right)$ durch eine sich ins Unendliche erstreckende Reihe dargestellt werden kann, deren erste Glieder lauten:

$$m\cdot\frac{x}{a} - \frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}m\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \cdots,$$

E. Anwendung der Logarithmen zur Erleichterung von Zahlenrechnungen. Additions- und Subtraktions-Logarithmen.

Die großen Vorteile der Logarithmen für das numerische Rechnen beruhen auf der Benutzung der Formeln (vgl. Kap. I, § 8 C):

$$\log(a \cdot b \cdot c \cdots) = \log a + \log b + \log c + \cdots,$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,$$

$$\log a^n = n \cdot \log a,$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$$

Sie erlauben, jede Multiplikation von Zahlen durch eine Addition ihrer Logarithmen, jede Division durch eine Subtraktion, jede Potenzierung durch eine Multiplikation, jede Radizierung durch eine Division zu ersetzen. Man kann so mittels der Logarithmen sich die Berechnung jedes Ausdrucks erleichtern, in welchem nur Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln vorkommen. Wenn z. B.

$$x = \sqrt[3]{\frac{a \cdot b^5}{c^7 \cdot \sqrt{d}}} \cdot \sqrt[5]{e^3 \cdot \sqrt[9]{\frac{f}{g}}},$$

---

wo m den schon vorher (S. 251) angegebenen Modul 0,43429448 ... bedeutet. Ist nun, wie in den Vegaschen Tafeln, a eine fünfstellige Zahl und $x < 1$, so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{1}{10^4}, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 < \frac{1}{10^8}, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^3 < \frac{1}{10^{12}} \text{ usw.}$$

Wenn wir die Mantisse auf 7 Stellen beschränken, kommt demnach von der unendlichen Reihe nur das erste Glied in Betracht, und man darf dann

$$\log(a + x) - \log a = \frac{m}{a} \cdot x,$$

d. h. die Logarithmus-Änderung der Numerus-Änderung x proportional setzen. Der Proportionalitätsfaktor $\frac{m}{a}$ nimmt mit wachsendem Numerus a ab. Nicht ohne weiteres vernachlässigen dürfte man das zweite Glied $\frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2$ der obigen Reihe, falls man vom Logarithmus mehr als 7 Dezimalstellen haben will. Genaueres über die alsdann erforderliche Interpolation sowie über die Fehlerbestimmung findet man in Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900, 6., 7. u. 8. Kap. Vgl. auch Weber-Wellstein, Encyklopädie d. Elementaren Algebra und Analysis, Bd. I (2. Aufl.), S. 124 und Encyklopädie der Mathemat. Wissensch. Bd. I, S. 806.

wo a, b, c, d, e, f, g bekannte Zahlen bedeuten, so ist

$$\log x = \frac{1}{3}\left(\log a + 5\log b - 7\log c - \frac{1}{2}\log d\right)$$
$$+ \frac{1}{5}\left(3\log e + \frac{1}{9}(\log f - \log g)\right).$$

Man hat zunächst die Logarithmen der Zahlen a, b, c, d, e, f, g aufzuschlagen, an diesen die durch die rechte Seite der Gleichung ausgedrückte Rechnung durchzuführen und zu dem gefundenen $\log x$ aus der Tafel den zugehörigen Numerus zu entnehmen. Die bequeme Berechnung der Wurzeln mit beliebigen Wurzelexponenten mittels der Logarithmen erklärt es, daß wir Kap. III, § 3 F auf die direkte Berechnung von Wurzeln, deren Exponent größer als 2 ist, nicht genauer eingegangen sind[1]).

Nicht ohne weiteres geeignet sind dagegen die Logarithmen zur Berechnung von Summen und Differenzen. Um aus $\log a$ und $\log b$, ohne a und b selbst aufzuschlagen, $\log(a + b)$ und $\log(a - b)$ leicht zu bestimmen, hat Leonelli (Supplément logarithmique, Bordeaux 1802/1803) eine Methode ersonnen, welche dann von Gauß aufgenommen und durch die Veröffentlichung der erforderlichen (fünfstelligen) Tafeln (Zachs Monatliche Korrespondenz, 1812, S. 498—528; Ges. Werke, Bd. III, S. 244) nutzbar gemacht worden ist[2]). Wir wollen das Verfahren in der einfacheren Gestalt auseinandersetzen, welche ihm Th. Wittstein (in seiner Logarithmentafel, Hannover 1859) gegeben und die in neuerer Zeit am meisten Verbreitung gefunden hat. Die Wittsteinsche Tafel gibt zu jedem Werte von $A = \log x$ den zugehörigen Wert $B = \log(x + 1)$. Sie ist so angeordnet, daß man zu irgend

1) Wenn es bei einer numerischen Rechnung weniger auf weitgehende Genauigkeit als auf schnelle Ausführung ankommt, ist es zweckmäßiger, statt der Logarithmentafeln den sogen. „Logarithmischen Rechenschieber" zu benutzen. Diese Vorrichtung besteht im wesentlichen aus zwei miteinander genau übereinstimmenden und gegeneinander verschiebbaren logarithmischen Skalen A und B, d. h. Skalen mit Teilstrichen 1, 2, 3, 4, ..., die an Punkten stehen, deren Abstände vom Anfangspunkt bezüglich den Logarithmen von 1, 2, 3, 4, ... proportional sind. Um den Wert eines Produktes ab zu finden, stellt man den Teilstrich 1 der Skala B unter Teilstrich a der Skala A. Der über Teilstrich b von B stehende Teilstrich von A gibt den Wert des Produktes. Bringt man den Teilstrich b von B unter Teilstrich a von A, so ist die über Teilstrich 1 von B stehende Zahl der Skala A gleich dem Werte des Quotienten $a : b$ usw. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich unmittelbar aus den Formeln $\log(ab) = \log a + \log b$ und $\log(a : b) = \log a - \log b$. Eine genauere Beschreibung des Rechenschiebers und seiner weiteren Anwendungen findet man in der Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. I, S. 1053 und der daselbst angegebenen Literatur.

2) Leonelli hatte nur drei Probeseiten (auf 14 Dezimalen) mitgeteilt.

einem A das zugehörige B in derselben Weise findet wie in den gewöhnlichen Tafeln zu einem Numerus den Logarithmus und zu irgend einem Werte B das zugehörige A in derselben Weise wie zu einem Logarithmus den Numerus. Aus der Tabelle kann man also unmittelbar zu dem Logarithmus irgend einer Zahl einerseits den Logarithmus der um 1 größeren Zahl, andererseits den der um 1 kleineren Zahl ablesen. Auf diese spezielle Aufgabe läßt sich aber sofort die allgemeinere zurückführen, aus $\log a$ und $\log b$ den Wert von $\log(a+b)$ und von $\log(a-b)$ zu bestimmen. Es ist nämlich

$$\log(a+b) = \log b + \log\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Setzt man nun

$$\frac{a}{b} = x,$$

also

$$\log a - \log b = \log x = A,$$

so wird

$$\log\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \log(1+x) = B,$$

also

$$\log(a+b) = \log b + B.$$

Man hat demnach zunächst die Differenz $\log a - \log b$ in der Spalte A aufzusuchen, dann das zugehörige B aus der Tabelle zu entnehmen und zu $\log b$ zu addieren, um $\log(a+b)$ zu erhalten.

Ähnlich ergibt sich

$$\log(a-b) = \log b + \log\left(\frac{a}{b} - 1\right).$$

Für

$$\frac{a}{b} = x + 1$$

wird

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} = \log(x+1) = B$$

und

$$\log\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log x = A;$$

also:

$$\log(a-b) = \log b + A.$$

Zur Berechnung von $\log(a-b)$ hat man demnach $\log a - \log b$ in der Spalte B aufzusuchen, den zugehörigen Wert A aus der Tafel zu bestimmen und zu $\log b$ zu addieren.

§ 6. Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnung.

A. Einfache Zinsen.

Unter „Zinsen“ versteht man die Entschädigung, die für den Nießbrauch einer auf eine gewisse Zeit entliehenen Geldsumme („Kapital“) gezahlt wird. Die Höhe dieser Entschädigung hängt von der Größe der Geldsumme und von der Länge der Entleihungsfrist ab, und zwar sind nach allgemeinem Gebrauch die Zinsen beiden proportional, d. h., für ein Kapital von k_0 Geldeinheiten betragen bei einer Entleihungsfrist von n Zeiteinheiten die Zinsen

$$z = k_0 \cdot n \cdot r \text{ Geldeinheiten,}$$

wo r einen vom Kapital und von der Zeit unabhängigen Faktor bedeutet. Für $k_0 = 1$, $n = 1$ wird

$$z = r,$$

d. h., r Geldeinheiten sind die Zinsen einer Geldeinheit für eine Zeiteinheit. Als letztere wählt man im allgemeinen das Jahr, als erstere bei uns in Deutschland die Mark, so daß bei dieser Festsetzung ein Kapital von 1 Mark in 1 Jahr r Mark Zinsen bringt. Die Größe von r wird durch Vereinbarung zwischen dem Geldgeber (Gläubiger) und dem Geldentleiher (Schuldner) bestimmt. Diese Vereinbarung hat einerseits die jeweilige Lage des Geldmarkts, andrerseits die Meinung des Gläubigers von der finanziellen Zuverlässigkeit seines Schuldners zur Grundlage. Da r fast ausnahmslos kleiner als 1 ist, so pflegt man diese Zahl in Form eines Bruches, und zwar gewöhnlich eines Bruches mit dem Nenner 100 zu schreiben, also zu setzen:

$$r = \frac{p}{100},$$

woraus folgt:

$$z = \frac{k_0 \cdot n \cdot p}{100}.$$

Für $k_0 = 100$, $n = 1$ wird

$$z = p;$$

p Mark sind demnach die Zinsen, welche in 1 Jahr von 100 Mark Kapital gebracht werden. Man sagt deshalb, der „Zinsfuß“ betrage p Prozent, wofür man auch kürzer $p\,^0/_0$ schreibt[1]).

1) Dieses Zeichen „$^0/_0$“ ist (nach J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Leipzig 1902, I. Bd., S. 106) aus der Abkürzung Cto für Cento entstanden. Ursprünglich schrieb man 4 p $^0/_0$; erst seit dem 19. Jahrhundert läßt man das p (pro oder per) fort. Über die Höhe des zu verschiedenen Zeiten üblichen Zinsfußes vgl. Tropfke, I. Bd., S. 102 und das daselbst zitierte Buch: Billeter, Geschichte des Zinsfußes im Altertum, Leipzig 1898. Wenn eine Vereinbarung nicht getroffen ist, bestimmt für Deutschland das Bürgerliche Gesetzbuch § 246 einen Zinsfuß von 4 $^0/_0$.

Mittels der Gleichung

$$z = \frac{k_0 \cdot n \cdot p}{100}$$

berechnet man ohne weiteres die Zinsen irgend eines Kapitals (k_0) für irgend eine ganze oder gebrochene Zahl (n) von Jahren zu irgend einem Zinsfuß (p). Überhaupt kann man aus derselben Gleichung leicht jede der vier Größen z, k_0, n, p finden, wenn die drei andern bekannt sind.

Es ergibt sich nämlich

$$k_0 = \frac{100\,z}{np}, \quad n = \frac{100\,z}{k_0 p}, \quad p = \frac{100\,z}{k_0 n}.$$

B. Zinseszinsen oder zusammengesetzte Zinsen.

§ 608 des Bürgerlichen Gesetzbuches lautet: „Sind für ein Darlehen Zinsen bedungen, so sind sie, sofern nicht ein anderes bestimmt ist, nach dem Verlauf je eines Jahres und, wenn das Darlehen vor dem Ablauf eines Jahres zurückzuerstatten ist, bei der Rückerstattung zu entrichten.“ Gläubiger und Schuldner können nun das Übereinkommen[1]) treffen (regelmäßig geschieht das z. B. bei Sparkasseneinlagen), daß bei einer längeren Entleihungsfrist die am Ende eines jeden Jahres fälligen Zinsen nicht an den Gläubiger ausgezahlt werden, sondern in den Händen des Schuldners bleiben, der nun diese Zinsen wie ein neu entliehenes Kapital auch zu verzinsen hat. Man sagt in diesem Falle, das ursprüngliche Kapital sei auf „Zinseszinsen“ ausgeliehen.

Ist die Schuld im Anfange k_0, so beträgt sie am Ende des ersten Jahres

$$k_1 = k_0 + \frac{k_0 p}{100} = k_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Im Laufe eines Jahres ist die Schuld also zu dem $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$-fachen ihres ursprünglichen Betrages angewachsen. Da der Faktor $1 + \frac{p}{100}$, der sogen. Zinsfaktor, von der Größe des Kapitals unabhängig ist, so wächst unter der Voraussetzung, daß der Zinsfuß der gleiche bleibt, k_1 bis zum Ende des zweiten Jahres an zu

$$k_2 = k_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

und k_2 bis zum Ende des dritten Jahres an zu

$$k_3 = k_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ usw.}$$

1) Vgl. hierzu allerdings § 248 des Bürgerlichen Gesetzbuches.

Am Ende des n^{ten} Jahres beträgt die Schuld:

$$k_n = k_{n-1}\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Durch Multiplikation der n für $k_1, k_2, \ldots, k_n$ aufgestellten Gleichungen erhält man:

$$\text{(I)} \qquad k_n = k_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Zur numerischen Berechnung von k_n logarithmiert man diese Formel:

$$\log k_n = \log k_0 + n \log\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Um auch bei Multiplikation mit einer großen Zahl n den Fehler im Logarithmus nicht zu stark zu vergrößern, muß man in

$$\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

mehr Dezimalstellen beibehalten als in den übrigen in der Rechnung auftretenden Logarithmen. Ohne Logarithmen kommt man aus, wenn man eine Tabelle für die Werte von $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ benutzt, wie sie z. B. M. Cantor im Anhange seiner „Politischen Arithmetik", 2. Aufl., Leipzig 1903, für $p = 3$; 3,5; 4 und für alle Werte der Zahl n von 1 bis 100 gibt.

Indem man voraussetzt, daß man stets die Möglichkeit hat, ein Kapital zu $p\,\%$ zu verleihen, kann man sagen, daß der augenblickliche Besitz von $k_0 = \frac{k_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$ Mark gleichbedeutend ist mit dem Besitze von k_n Mark nach n Jahren. Eine erst nach n Jahren fällige Schuld von k_n Mark kann also durch sofortige Zahlung von $\frac{k_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$ Mark getilgt werden. Den Unterschied beider Summen, den von der eigentlichen Schuld bei der Barzahlung abzuziehenden Betrag, nennt man im kaufmännischen Verkehr den „Diskonto" und entsprechend auch die Formel $k_0 = \frac{k_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$ die Diskonto-Formel[1]).

1) Leibniz hat sie in seiner Meditatio iuridico-mathematica de interusurio simplice, Acta Eruditorum 1683, entwickelt. Die Zulässigkeit dieser Diskontierungsmethode ist während des 18. Jahrhunderts in Deutschland, namentlich von Juristen, noch viel bestritten worden. Vgl. Cantor III, S. 518 und S. 525.

Wir haben bisher angenommen, daß die Verleihungszeit einer ganzen Anzahl von Jahren gleich ist. Wenn aber $n = \nu + \nu'$, wo ν eine ganze Zahl und ν' einen echten Bruch bedeutet, so erhält man zunächst

$$k_\nu = k_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^\nu.$$

k_ν Mark bringen in ν' Jahren $\frac{k_\nu \cdot \nu' \cdot p}{100}$ Mark Zinsen; es wird also

$$\begin{aligned} k_n = k_{\nu+\nu'} &= k_\nu \left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right) \\ \text{(II)} \qquad &= k_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^\nu \left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right). \end{aligned}$$

Auch mittels dieser Gleichung (II) können wir k_0 durch k_n, p, ν, ν' ausdrücken. In dem besonders oft im kaufmännischen Verkehr vorkommenden Falle $\nu = 0$ ergibt sich z. B.

$$k_0 = \frac{k_{\nu'}}{1 + \frac{\nu' p}{100}}$$

als Höhe der Barzahlung für eine nach $\nu' (< 1)$ Jahren fällige Schuld. Weil aber die Division durch $1 + \frac{\nu' p}{100}$ unbequem ist, berechnet man tatsächlich k_0 nicht aus dieser Gleichung, sondern statt dessen aus der Formel

$$k_0 = k_{\nu'} \left(1 - \frac{\nu' p}{100}\right),$$

welche streng genommen nicht korrekt ist, aber bei den praktisch nur auftretenden kleinen Werten von ν' und p Ergebnisse liefert, die sich von den richtigen nur wenig unterscheiden[1]).

1) Es ist nämlich nach Kap. III, § 4, S. 111, da ja in der Praxis stets $\frac{\nu' p}{100} < 1$,

$$\frac{1}{1 + \frac{\nu' p}{100}}$$

der Wert der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{\nu' p}{100} + \left(\frac{\nu' p}{100}\right)^2 - \cdots,$$

und die im Texte konstatierte Inkorrektheit besteht in der Vernachlässigung aller auf $\frac{\nu' p}{100}$ folgenden Glieder. Von historischem Interesse ist, daß Leibniz bei seiner Methode (vgl. die vorige Anmerkung) für den Barwert einer erst später fälligen Schuld zunächst eine solche unendliche geometrische Reihe findet, als deren Summe er erst durch Ausmultiplizieren den Bruch verifiziert. Vgl. Cantor III, S. 54.

Wie nach k_0 kann man die Gleichungen (I) und (II) auch nach n und p aufzulösen versuchen. Wenn nach n gefragt ist, wissen wir nicht von vornherein, ob wir von (I) oder von (II) auszugehen haben. Nehmen wir von beiden Seiten der Gleichungen (I) und (II) den Briggsschen Logarithmus, so ergibt sich:

$$\log k_n - \log k_0 = n \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

bezüglich

$$\log k_n - \log k_0 = \nu \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \log\left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right).$$

Wenn der Quotient $\dfrac{\log k_n - \log k_0}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ eine ganze Zahl ist, so stellt er den gesuchten Wert von n dar. Geht aber die Division

$$(\log k_n - \log k_0) : \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

nicht auf, liefert sie vielmehr den ganzzahligen Quotienten ν und den Rest ϱ, so daß also

$$\log k_n - \log k_0 = \nu \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \varrho,$$

so ist

$$\varrho = \log\left(1 + \frac{\nu' p}{100}\right),$$

und wenn man durch Aufschlagen des Numerus die Zahl r so bestimmt, daß

$$\varrho = \log r,$$

so folgt:

$$1 + \frac{\nu' p}{100} = r,$$

woraus sich sofort ergibt:

$$\nu' = \frac{100}{p}(r - 1)$$

und die gesuchte Zahl

$$n = \nu + \nu'^{\,1)}.$$

---

1) Würde man n gleich dem Quotienten $\dfrac{\log k_n - \log k_0}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$ setzen, auch wenn dieser nicht ganzzahlig ist, so hieße das, statt der obigen Gleichung (II) die Gleichung $k_n = k_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\nu + \nu'}$ zugrunde legen, also $\left(1 + \frac{p\nu'}{100}\right)$ durch $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\nu'}$ ersetzen. Für kleine Werte von $\frac{p}{100}$ unterscheiden sich die beiden letzteren Ausdrücke nur wenig voneinander.

Soll aus den übrigen Größen unter Voraussetzung eines ganzzahligen n der Zinsfuß p berechnet werden, so ergibt die Gleichung (I):

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}},$$

$$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} - 1\right).$$

Wenn aber n keine ganze Zahl ist, müssen wir von (II) ausgehen und erhalten für $x = \frac{p}{100}$ die Gleichung

$$(1 + x)^{\nu} \cdot (1 + \nu' x) = \frac{k_n}{k_0},$$

die sich im allgemeinen nur durch erst in der Algebra zu besprechende Näherungsmethoden lösen läßt. In der Praxis wird man auf diese Aufgabe kaum jemals stoßen.

Als Zeiteinheit haben wir bisher das Jahr gewählt, also angenommen, daß die Zinsen stets nach Ablauf eines Jahres zum Kapital hinzugefügt werden sollen. Die Formeln (I) und (II) bleiben aber unverändert gültig, wenn irgend eine andere Zeit, z. B. $\frac{1}{s}$ Jahr, als Einheit zugrunde gelegt wird. Natürlich bedeuten dann n, ν, ν' die Anzahlen der $\frac{1}{s}$ Jahre und entsprechend p die Zinsen von 100 ℳ für die neue Zeiteinheit. Will man aber auch jetzt noch, wie es gewöhnlich geschieht, unter p die Zinsen von 100 ℳ für 1 Jahr verstehen, so hat man in (I) und (II) p durch $\frac{p}{s}$ zu ersetzen, also (I) zu schreiben:

$$k_n = k_0\left(1 + \frac{p}{s \cdot 100}\right)^n.$$

Führt man statt n wieder die Anzahl N der ganzen Jahre durch die Relation $n = s \cdot N$ ein, dann stellt

(Ia) $$k_n = k_0\left(1 + \frac{p}{s \cdot 100}\right)^{s \cdot N}$$

die Summe dar, zu welcher die Schuld k_0 am Ende des N^{ten} Jahres angewachsen ist, falls der Zinsfuß für 1 Jahr $p\%$ beträgt und die Zinsen am Ende jedes $\frac{1}{s}$ Jahres zum Kapital geschlagen werden.

Für

$$\frac{s \cdot 100}{p} = x, \quad \text{also} \quad s = \frac{px}{100}$$

wird

$$k_n = k_0\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{Npx}{100}}$$

oder

$$k_n = k_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{Np}{100}}.$$

Geben wir s den Wert $100p$ (d. h., werden etwa bei $p = 4\%$ die Zinsen nach jedem vierhundertstel Jahr, d. h. ungefähr nach jedem Tage zum Kapital hinzugefügt), so wird

$$x = 10^4 \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

die Basis $g = 2{,}718\,145\,9$ der Bürgischen Logarithmen[1]), also

$$\frac{k_n}{k_0} = g^{\frac{Np}{100}}$$

der Numerus der als Bürgischer Logarithmus aufgefaßten Zahl $\frac{Np}{100}$ [2]).

C. Renten.

Wir beginnen mit der **Aufgabe:** Ein Kapital k_0 sei auf Zinseszinsen zu $p\%$ mit der Bedingung ausgeliehen, daß die Zinsen immer am Ende eines Jahres zum Kapital geschlagen werden. Vom m^{ten} Jahre an (m gleich Null oder gleich einer positiven ganzen Zahl) werden am Ende jedes Jahres r Mark hinzugefügt (bezüglich fortgenommen). Wie groß ist das Guthaben nach n maliger Hinzufügung (bezüglich Fortnahme) der r Mark, d. h. also am Ende des $(m + n - 1)^{\text{ten}}$ Jahres?

Lösung: Bis zum Ende des m^{ten} Jahres ist das Kapital angewachsen auf

$$k_m = k_0 q^m \pm r,$$

wo zur Abkürzung q für den Zinsfaktor $1 + \frac{p}{100}$ gesetzt ist.

---

1) Vgl. § 5 A, S. 235.

2) Wenn x über alle Grenzen wächst, was eintritt, wenn auch s unendlich groß wird, die Zinsen also nach immer kleineren Zeiträumen zum Kapital geschlagen werden, nähert sich $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, wie in der Analysis gezeigt wird und schon § 5 A, S. 235 erwähnt ist, einem bestimmten Grenzwerte $e = 2{,}718\,281\,828\,459 \cdots$. Unter dieser Voraussetzung ist demnach $\frac{k_n}{k_0} = e^{\frac{Np}{100}}$ die Zahl, deren natürlicher Logarithmus den Wert $\frac{Np}{100}$ hat. (Jakob Bernoulli, Acta Eruditorum, Mai 1690, vgl. Cantor III, S. 55.)

Für das Ende des $(m+1)^{\text{ten}}$ Jahres erhält man:

$$k_{m+1} = k_0 q^{m+1} \pm rq \pm r,$$

für das Ende des $(m+2)^{\text{ten}}$ Jahres:

$$k_{m+2} = k_0 q^{m+2} \pm rq^2 \pm rq \pm r$$

usw., schließlich für das Ende des $(m+n-1)^{\text{ten}}$ Jahres:

$$k_{m+n-1} = k_0 q^{m+n-1} \pm rq^{n-1} \pm rq^{n-2} \pm \cdots \pm rq \pm r$$

oder:

(III) $$k_{m+n-1} = k_0 q^{m+n-1} \pm r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

(Siehe Kap. I, § 7 D, Zusatz, S. 28.)

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß nach n maliger Fortnahme des Betrages von r Mark das Guthaben gerade erschöpft ist, daß also

$$k_{m+n-1} = 0$$

oder

(IV) $$k_0 q^{m+n-1} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Übergibt nämlich A dem B zu irgend einer Zeit k_0 Mark und zahlt B vom m^{ten} Jahre nach diesem Termin am Ende jedes Jahres, im ganzen n mal, r Mark zurück, so sind bei Zugrundelegung eines Zinsfußes von $p\%$ die Leistungen der beiden Parteien genau gleich, falls zwischen k_0, r, m, n und $q = 1 + \frac{p}{100}$ die Gleichung (IV) besteht. Diese Verhältnisse liegen vor, wenn eine Privatperson (A) einer Versicherungsgesellschaft (B) eine Summe (k_0) einzahlt, um eine Reihe von Jahren hindurch eine „Rente" (r) zu beziehen, oder wenn eine politische Gemeinde eine aufgenommene Anleihe (k_0) durch jährliche Rückzahlungen (r) tilgt oder „amortisiert". Gleichung (IV) heißt deshalb auch „Renten"- oder „Amortisationsgleichung". Sie ist zuerst von Euler in seiner Introductio in analysin infinitorum (1748), Bd. I, Kap. 6 aufgestellt worden.

Unmittelbar auflösen läßt sich (IV) nach k_0 (dem „Barwert" der Rente) und nach r (der Rente bezüglich der jährlichen Rückzahlung). Es ergibt sich:

$$k_0 = \frac{r \cdot (q^n - 1)}{q^{m+n-1} \cdot (q-1)}$$

und

$$r = \frac{k_0 q^{m+n-1} \cdot (q-1)}{q^n - 1}.$$

Da die rechte Seite der letzten Gleichung im allgemeinen keine runde Zahl sein wird, benutzt man bei Aufstellung eines Tilgungs-

planes für eine aufgenommene Anleihe den aus der Gleichung berechneten Wert von r nur als Durchschnitt für die gewöhnlich ein Vielfaches von 100 Mark betragenden jährlichen Rückzahlungen.

Um Gleichung (IV) nach n aufzulösen, berechnet man aus ihr zunächst

$$q^n = \frac{r}{r - k_0 q^{m-1}(q-1)}$$

und findet dann durch Logarithmieren:

$$n = \frac{\log r - \log[r - k_0 q^{m-1}(q-1)]}{\log q}.$$

Wenn der Quotient auf der rechten Seite keine ganze Zahl ist, sondern zwischen den ganzen Zahlen ν und $\nu + 1$ liegt, so besagt das Ergebnis, daß die Rente ν mal ausgezahlt werden kann, und daß nach der ν^{ten} Auszahlung noch der Bestand (siehe Gleichung (III))

$$k_0 q^{m+\nu-1} - r \cdot \frac{q^\nu - 1}{q-1}$$

bleibt, dessen q-faches nicht mehr den Wert r erreicht.

Die in der Praxis allerdings kaum jemals verlangte Auflösung der Gleichung (IV) nach q, d. h. also die Berechnung des Zinsfußes p, ist im allgemeinen nur durch Näherungsmethoden möglich, auf welche wir hier nicht einzugehen haben.

Wenn die Rente nicht in Zwischenräumen von je einem Jahr, sondern etwa nach je einem Vierteljahr oder Monat oder dgl. gezahlt werden soll, so bleiben auch bei dieser Voraussetzung die Gleichungen (III) und (IV) gültig, falls auch die Zinsen stets nach demselben Zeitabschnitte zum Kapital geschlagen werden. Man hat dann für p die Zinsen von 100 Mark für den jetzt als Einheit genommenen Zeitabschnitt zu setzen und unter m, n die Anzahl dieser neuen Zeiteinheiten zu verstehen.

Einer besonderen Bemerkung bedarf aber der Fall, daß die Zinsen zwar wie bisher jährlich zum Kapital geschlagen, die Renten jedoch in anderen Zwischenräumen, etwa nach je $\frac{1}{s}$ Jahr, erhoben werden sollen. Diese Aufgabe ist auf die vorige zurückgeführt, sobald wir bestimmt haben, welche am Ende eines Jahres zu zahlende Rente r einer am Ende oder am Anfang jedes $\frac{1}{s}$ Jahres fälligen Rente ϱ gleichwertig ist.

ϱ Mark am Schlusse des ersten $\frac{1}{s}$ Jahres sind gleichwertig mit

$$\varrho + \frac{p\varrho(s-1)}{100s}$$

Mark am Ende des Jahres, ϱ Mark am Schlusse des zweiten $\frac{1}{s}$ Jahres sind gleichwertig mit

$$\varrho + \frac{p\varrho(s-2)}{100\,s}$$

Mark am Ende des Jahres usw.

Die s malige Zahlung von je ϱ Mark am Schlusse jedes $\frac{1}{s}$ Jahres ist also äquivalent mit der einmaligen Zahlung am Ende des Jahres von r_1 Mark, wo

$$\begin{aligned} r_1 &= s\varrho + \frac{p\varrho}{100\,s}\cdot[(s-1)+(s-2)+\cdots+2+1] \\ &= s\varrho + \frac{p\varrho(s-1)}{200}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich, daß die s malige Zahlung von je ϱ Mark am Anfange jedes $\frac{1}{s}$ Jahres gleichwertig ist der einmaligen Zahlung von r_2 Mark am Ende des Jahres, wo

$$\begin{aligned} r_2 &= s\varrho + \frac{p\varrho}{100\,s}[s+(s-1)+\cdots+2+1] \\ &= s\varrho + \frac{p\varrho(s+1)}{200}. \end{aligned}$$

Die soeben berechneten Werte von r_1 bezüglich r_2 hat man in Gl. (IV) für r einzusetzen.

Weitere Anwendungen der Zins- und Rentenrechnung findet man in M. Cantor, Politische Arithmetik, 2. Aufl., Leipzig 1903.

§ 7. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A. Historische Vorbemerkung.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat ihren Ausgang genommen von der mathematischen Behandlung von Glücksspielen, des Würfel- und Kartenspiels, des Ziehens von Kugeln verschiedener Farbe aus einer Urne usw.[1])

1) Wenn auch die Wichtigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie heutzutage durchaus nicht etwa ausschließlich oder auch nur hauptsächlich auf ihrer Anwendung auf die Glücksspiele beruht, so werden wir doch auch in unserer Darstellung zur Erläuterung der Theorie vorzugsweise Spielaufgaben heranziehen, weil bei solchen alle Umstände am einfachsten zu übersehen und sie deshalb der mathematischen Behandlung am leichtesten zugänglich sind, und weil man die verwickelteren Wahrscheinlichkeitsaufgaben des praktischen Lebens (z. B. der Statistik, des Versicherungswesens usw.) sowie auch der theoretischen Physik durch Zuhilfenahme gewisser aus der Erfahrung stammender Konventionen auf solche Spielaufgaben zurückzuführen sucht.

Die ersten, sich auf das Würfelspiel beziehenden, Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen finden sich schon bei Cardano und Galilei. Als die eigentlichen Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet man aber Pascal und Fermat (um die Mitte des 17. Jahrhunderts). Um die weitere Entwicklung der Theorie haben sich Verdienste erworben Huygens, Leibniz, Jakob Bernoulli, de Moivre, Stirling, Bayes, Laplace, Poisson. Welche Fortschritte die Wahrscheinlichkeitsrechnung im einzelnen diesen Männern zu verdanken hat, werden wir in aller Kürze an den bezüglichen Stellen angeben. Von neueren Lehrbüchern nennen wir J. Bertrand, Calcul des probabilités, Paris 1889; H. Poincaré, Leçons sur le calcul des probabilités, Paris 1896; E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 2. Aufl., Leipzig 1908; H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre, Leipzig 1906; E. Borel, Éléments de la théorie des probabilités, Paris 1909. Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben namentlich untersucht J. v. Kries in der Schrift „Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Freiburg i. B. 1886, und C. Stumpf in der Abhandlung „Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit", Sitzungsberichte der Philosophischen Klasse der Bayrischen Akademie, 1892.

B. Definition der Wahrscheinlichkeit und einfache Aufgaben.

Es kommt häufig vor, daß wir beim Stande unseres Wissens und unserer Kenntnisse die aus einem gewissen Komplex von Zuständen und Handlungen resultierenden Folgen nicht mit Sicherheit angeben, daß wir vielmehr nur behaupten können, aus den vorliegenden Bedingungen müsse sich entweder ein Ereignis oder Tatbestand E_1 oder ein Ereignis E_2 usw. oder ein Ereignis E_m ergeben. Nehmen wir z. B. einen Spielwürfel, d. h. einen homogenen Würfel, dessen Seitenflächen mit den Zahlen 1 bis 6 beschrieben sind, werfen ihn in die Höhe und lassen ihn fallen, so sind wir nicht imstande, aus dem ihm erteilten Impulse seine weitere Bewegung genau zu bestimmen; wir können also auch nicht sagen, welche Seite beim Auffallen des Würfels oben liegen wird; wir wissen nur, daß es entweder die 1 oder die 2 usw. oder die 6 sein muß. Bei keinem Menschen sind uns die Körperbeschaffenheit und die von außen auf ihn einwirkenden Umstände so genau bekannt, daß wir im voraus die Frage entscheiden könnten, ob er nach einem Jahre noch am Leben sein wird; wir können eben nur sagen, entweder wird er nach einem Jahre noch leben oder tot sein.

Erscheinen uns nun m Annahmen in bezug auf den aus dem gegebenen Bedingungskomplex resultierenden Tatbestand gleich berechtigt, davon aber nur g ($g < m$) für einen uns interessierenden Erfolg günstig, so betrachten wir den echten Bruch $w = \frac{g}{m}$ als Maß für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens dieses Erfolges und nennen kurz $\frac{g}{m}$ die mathematische Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses. Wenn kein Fall günstig, also $g = 0$, wird $w = 0$; wenn jeder mögliche Fall auch günstig, also $g = m$, wird $w = 1$. In diesen beiden Grenzfällen wird die Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit. Für das Nichteintreten des Ereignisses sind $(m - g)$ Fälle günstig, also ist die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten

$$v = \frac{m-g}{m} = 1 - \frac{g}{m} = 1 - w.$$

Die Hauptschwierigkeit bei Anwendung der für die Wahrscheinlichkeit gegebenen Definition liegt in der Entscheidung der Frage, ob mehrere Fälle als gleich möglich anzusehen sind oder nicht. Wenn man es in dem ersten der vorher angeführten Beispiele mit einem homogenen, mathematisch genau konstruierten Würfel zu tun hat, und wenn beim Spiel die Bevorzugung irgend einer Würfelseite vermieden wird, so dürfen wir das Obenliegen jeder der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ als gleich möglich betrachten, demnach als mathematische Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen z. B. der 3 den Bruch $\frac{1}{6}$ angeben. Nicht so einfach ist der Sachverhalt in dem zweiten Beispiel. Würde man es wegen der erwähnten Unkenntnis als gleich möglich ansehen, daß der betreffende Mensch nach einem Jahre noch lebt, oder daß er nach einem Jahre gestorben ist, so fände man als Wert der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Eine praktische Bedeutung könnte man aber einem auf Grund so ungenügender Kenntnisse gefundenen Resultate nicht beilegen[1]). Selbst aber in solchen Aufgaben, wo bei scharfem

1) Nur kurz erwähnen wir, ohne ausführlicher darauf einzugehen, daß sich in bezug auf die Definition der Gleichmöglichkeit der Fälle zwei Ansichten gegenüberstehen. Die eine, namentlich durch J. v. Kries vertretene, verlangt das Vorhandensein eines zwingenden Grundes, um die Gleichmöglichkeit der Fälle auszusprechen; die andere, namentlich durch Stumpf vertretene, begnügt sich mit gleichem, d. h. absolutem Nichtwissen in bezug auf die einzelnen Fälle. Wenn von einer Urne nur bekannt ist, daß sie weiße und schwarze Kugeln enthält, aber nicht, in welcher Anzahl, so beträgt nach der letzteren Anschauung die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel $\frac{1}{2}$, während nach der ersteren Ansicht die Wahrscheinlichkeit gar nicht berechnet werden kann. In der Praxis wird man im allgemeinen einen mittleren Standpunkt einnehmen. Daß man jedenfalls alles verfügbare Wissen zur Bildung des Wahrscheinlichkeitsurteils verwenden solle, verlangt auch Stumpf.

Nachdenken gar kein Zweifel über die Gleichmöglichkeit der Fälle bestehen kann, sind vielfach Fehler gemacht worden. Wir wollen aus der Literatur zwei Beispiele anführen, nicht nur des historischen Interesses wegen, sondern haupstächlich, weil ja naturgemäß Anfänger immer wieder derartigen Fehlschlüssen ausgesetzt sind.

I. Ein Freund hatte Galilei seine Verwunderung darüber ausgesprochen, daß beim Spiel mit drei Würfeln die Summe 10 häufiger als die Summe 9 erschiene, während doch nach seiner Meinung die Anzahl der günstigen gleich möglichen Fälle für beide Summen gleich groß sei. Der Freund rechnete nämlich als für die Summe 9 günstige Fälle die sechs Zusammenstellungen:

1 2 6,
1 3 5,
1 4 4,
2 2 5,
2 3 4,
3 3 3

und für die Summe 10 die sechs Zusammenstellungen:

1 3 6,
1 4 5,
2 2 6,
2 3 5,
2 4 4,
3 3 4.

In seiner „Considerazione sopra il giuoco dei dadi“ weist Galilei darauf hin, daß diese Zusammenstellungen nicht sämtlich als gleich möglich anzusehen seien, daß vielmehr eine Zusammenstellung wie 1, 2, 6 auf $3! = 6$ verschiedene Arten zustandekommen könne, wie man einsieht, wenn man die Würfel (z. B. durch ihre Farbe) voneinander unterscheidet, die Zusammenstellung 1, 4, 4 nur auf drei verschiedene Arten und 3, 3, 3 nur auf eine Art. Bei richtiger Auffassung der gleich möglichen Fälle findet man dann für die Summe neun 25 gleich mögliche günstige Zusammenstellungen, für die Summe zehn aber 27. Da die Zahl der bei drei Würfeln überhaupt möglichen Zusammenstellungen $6^3 = 216$ beträgt, so ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln 9 zu werfen, $\frac{25}{216}$, die, 10 zu werfen, aber $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

II. D'Alembert hat behauptet, daß, wenn man eine Münze zweimal in die Höhe werfe und fallen lasse, die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einmal die Schrift oben liege, $\frac{2}{3}$ sei. Er schließt nämlich so: entweder fällt schon beim ersten Wurf die Schrift nach oben, dann ist das Spiel entschieden, oder man erhält zuerst Kopf und dann Schrift oder endlich beidemal Kopf. Es seien also im ganzen drei Fälle möglich und darunter zwei günstig, also betrage die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Diese Schlußweise ist falsch. Als gleich möglich sind vielmehr (wie man ohne weiteres erkennt, wenn man, statt eine Münze zweimal, gleichzeitig zwei Münzen wirft) die vier Zusammenstellungen: Schrift, Schrift; Schrift, Kopf; Kopf, Schrift; Kopf, Kopf anzusehen, von denen drei günstig sind. Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ [1]).

Ist erst die Frage der Gleichmöglichkeit der Fälle entschieden, so kommt die Lösung einer Wahrscheinlichkeitsaufgabe auf eine einfache Abzählung der günstigen und der möglichen Fälle hinaus. Sehr erleichtert wird dieses Abzählen häufig durch die Hilfsmittel der Kombinatorik, und so erklärt es sich, daß diese beiden Disziplinen sich Hand in Hand entwickelt haben. Auch wir gehen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung im wesentlichen nur so weit ein, als sie eine der wichtigsten und interessantesten Anwendungen der Kombinatorik bildet. Von einfachen, mittels kombinatorischer Formeln zu lösenden Wahrscheinlichkeitsaufgaben wollen wir nur noch ein **Beispiel** behandeln:

Eine Urne möge a weiße und b schwarze Kugeln enthalten. Man greift k Kugeln heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich unter diesen α weiße und β schwarze befinden?

$$(\alpha + \beta = k,\ \ \alpha < a,\ \ \beta < b).$$

Lösung: Aus einer Menge von $(a+b)$ Kugeln lassen sich k auf so viele Arten herausnehmen, wie es Kombinationen ohne Wiederholung von $(a+b)$ Elementen zur k^{ten} Klasse gibt, also $m = \binom{a+b}{k}$. Gruppen von α weißen Kugeln gibt es $\binom{a}{\alpha}$, Gruppen von β schwarzen Kugeln $\binom{b}{\beta}$. Da nun jede Zusammenstellung einer Gruppe der ersten Art mit einer Gruppe der zweiten Art für unsern Zweck günstig ist, wird

$$g = \binom{a}{\alpha} \cdot \binom{b}{\beta}, \quad \text{also} \quad w = \frac{\binom{a}{\alpha} \cdot \binom{b}{\beta}}{\binom{a+b}{\alpha+\beta}}.$$

1) Auf diese Aufgabe kommen wir noch mehrfach zurück.

C. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsaufgaben.

Bei der Lösung zahlreicher, zum Teil recht komplizierter Aufgaben ergaben sich eine Reihe von Regeln, die Laplace in seiner „Théorie analytique des probabilités" (Paris 1812) auf einige wenige feste Prinzipien reduzierte, welche immer wieder zur Anwendung kommen. Wichtig sind vor allem zwei Sätze:

I. Satz von der „vollständigen" oder „totalen" Wahrscheinlichkeit oder der Wahrscheinlichkeit des „Entweder oder".

Wenn ein Ereignis sich auf n verschiedene, einander ausschließende Arten $E_1, E_2, \ldots, E_n$ verwirklichen kann, denen bezüglich die Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \ldots, w_n$ zukommen, so ist die Wahrscheinlichkeit w für das Eintreten von E gleich der Summe $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$[1]).

Beweis: Die g für das Ereignis E günstigen Fälle zerfallen in n Gruppen, nämlich eine Gruppe von g_1 Fällen, die E_1 günstig sind, eine Gruppe von g_2 Fällen, die E_2 günstig sind, usw., endlich eine Gruppe von g_n Fällen, die E_n günstig sind. Man hat also, wenn die Anzahl der aus dem gegebenen Bedingungskomplex hervorgehenden gleich möglichen Fälle m ist,

$$w = \frac{g}{m} = \frac{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}{m} = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots + \frac{g_n}{m} = w_1 + w_2 + \cdots w_n.$$

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurfe mit drei Würfeln mehr als 12 zu erzielen?

Lösung: Der erwartete Erfolg ist erreicht, wenn entweder die Summe 13 (wofür die Wahrscheinlichkeit w_{13} sei) oder die Summe 14 (Wahrscheinlichkeit w_{14}) usw. oder die Summe 18 (Wahrscheinlichkeit w_{18}) erscheint. Von diesen Ereignissen können bei einem Wurf nicht etwa zwei gleichzeitig eintreten; also dürfen wir den soeben bewiesenen Satz I anwenden und finden die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w = w_{13} + w_{14} + \cdots + w_{18}.$$

Durch einfaches Abzählen der günstigen Fälle (vgl. die Galileische Aufgabe unter B, S. 269) erhält man:

$$w_{13} = \frac{21}{216}, \quad w_{14} = \frac{15}{216}, \quad w_{15} = \frac{10}{216}, \quad w_{16} = \frac{6}{216}, \quad w_{17} = \frac{3}{216}, \quad w_{18} = \frac{1}{216},$$

also:

$$w = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}.$$

---

1) Laplace faßt $E_1, E_2, \ldots, E_n$ als ungleichmögliche günstige Fälle von E auf.

II. Satz von der „zusammengesetzten“ Wahrscheinlichkeit oder der Wahrscheinlichkeit des „Sowohl als auch“.

Ein Ereignis E gelte als verwirklicht, wenn jedes der Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eingetroffen ist. Dabei ist es gleichgültig, ob diese n Ereignisse zu gleicher Zeit oder nacheinander eintreten. Wohl aber macht es einen Unterschied, ob $E_1, E_2, \ldots, E_n$ unabhängig voneinander sind, oder ob die Verwirklichung eines der Ereignisse einen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit der andern ausübt.

a) Die Wahrscheinlichkeit w für das Zusammentreffen mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ist gleich dem Produkte $w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$ der Wahrscheinlichkeiten dieser n Ereignisse.

Beweis: Für das Ereignis E_ν sei die Anzahl der möglichen Fälle m_ν, die der günstigen g_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Da die Gesamtheit der Zusammenstellungen irgend eines möglichen Falles von E_1 mit irgend einem möglichen Falle von E_2 usw. mit irgend einem möglichen Falle von E_n die sämtlichen m möglichen Fälle für E liefert, ist

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n.$$

Dieselbe Überlegung ergibt die Zahl g der für E günstigen Fälle

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdots g_n,$$

also

$$w = \frac{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}{m_1 \cdot m_2 \cdots m_n} = w_1 \cdot w_2 \cdots w_n.$$

Beispiel: Eine erste Urne enthalte a Kugeln, darunter α weiße; eine zweite enthalte b Kugeln, darunter β weiße. Man zieht aus jeder der beiden Urnen je eine Kugel. Die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden gezogenen Kugeln weiß sind, ist alsdann $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b}$. Ob die beiden Kugeln gleichzeitig oder nacheinander gezogen werden, ist gleichgültig.

Folgerungen: Wenn die Ereignisse alle aus demselben Komplex möglicher Fälle hervorgehen, also auch $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$ ist, so können die Ereignisse selbstverständlich nur nacheinander erfolgen. Ein Beispiel hierfür ist die Forderung, mit denselben drei Würfeln zuerst 13, dann 14, drittens 15 zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser Ereignisse in der angegebenen Reihenfolge ist

$$w = w_{13} \cdot w_{14} \cdot w_{15} = \frac{21}{216} \cdot \frac{15}{216} \cdot \frac{10}{216} = \frac{175}{559872}.$$

Spezialisieren wir noch weiter und verstehen unter $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dasselbe Ereignis, so ist $w_1 = w_2 = \cdots = w_n$, also die Wahrscheinlich-

keit für das n-malige Eintreffen desselben Ereignisses $w = w_1^n$. Die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln dreimal hintereinander 13 zu werfen, ist demnach $w = \left(\frac{21}{216}\right)^3 = \left(\frac{7}{72}\right)^3 = \frac{343}{373248}$.

Bedeutet w die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses bei einem Versuch, also $(1 - w)$ die des Nichteintreffens, so ist $(1 - w)^n$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen bei n Versuchen, deshalb $w' = 1 - (1 - w)^n$ die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen das Ereignis mindestens einmal eintritt. Auf Grund dieser Überlegung findet man in der D'Alembertschen Aufgabe (B, Beispiel II, S. 270) die Wahrscheinlichkeit, daß bei zweimaligem Werfen einer Münze mindestens einmal Schrift oben liegt,

$$w' = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Aus der Gleichung $w' = 1 - (1 - w)^n$ ist leicht bei gegebenem w der Wert zu bestimmen, den n wenigstens haben muß, damit w' nicht kleiner als ein vorgeschriebener echter Bruch sei. Es wird nämlich

$$(1 - w)^n = 1 - w',$$

und man hat für n die kleinste ganze Zahl zu wählen, welche

$$\geqq \frac{\log(1 - w')}{\log(1 - w)}.$$

Beispiel: Wie oft muß man mit einem Würfel würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einmal die Sechs oben liegt, größer als $\frac{1}{2}$ werde?

Lösung: Da

$$w = \frac{1}{6}, \quad w' = \frac{1}{2},$$

ist für n die kleinste ganze Zahl zu wählen, welche größer ist als

$$\frac{\log\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}} = \frac{\log 2}{\log 6 - \log 5} = \frac{0{,}30103}{0{,}07918};$$

d. h. $n = 4$. Für diesen Wert wird tatsächlich

$$w' = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} = 0{,}518.$$

b) Die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$ seien nicht unabhängig voneinander; es beeinflusse vielmehr das Eintreffen von E_1 die Wahr-

scheinlichkeit für E_2, das Eintreffen von E_1 und E_2 die Wahrscheinlichkeit für E_3 usw. Die Schlüsse und auch das Ergebnis

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdots w_n$$

für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der n Ereignisse bleiben dieselben wie unter a); nur hat man jetzt unter w_2 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_2 nach der Verwirklichung von E_1, unter w_3 die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E_3 nach der Verwirklichung von E_1 und E_2 usw. zu verstehen.

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten zweimal hintereinander einen König zu ziehen, wenn die beim ersten Male herausgegriffene Karte nicht wieder in das Spiel gelegt wird?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Königs beim ersten Male ist

$$w_1 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Wenn aber ein König herausgenommen ist, so besteht das Spiel nur noch aus 31 Karten und enthält jetzt nur drei Könige; also hat die Wahrscheinlichkeit für E_2 nach dem Eintreffen von E_1 den Wert $w_2 = \frac{3}{31}$, die gewünschte zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit demnach den Wert

$$w = w_1 \cdot w_2 = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{248}.$$

Von der Richtigkeit dieses Resultats kann man sich übrigens auch noch auf einem anderen Wege überzeugen. Wenn man die beiden Karten nicht nacheinander, sondern gleichzeitig aus dem Spiel herausgreift, so ist die Zahl der gleich möglichen Fälle $m = \binom{32}{2}$, die der für den gewünschten Zweck günstigen Fälle $g = \binom{4}{2}$, also

$$w = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{248},$$

wie oben.

III. Für die unter (I) und (II) bewiesenen, bezüglich für noch etwas allgemeinere Sätze hat Poincaré (Leçons sur le calcul des probabilités, Deuxième Leçon) eine neue, elegante Herleitung gegeben, welche die Sätze als Identitäten erscheinen läßt. Der Gedankengang Poincarés ist in der Kürze etwa der folgende:

A und B seien zwei beliebige Ereignisse. Es möge

A und B eintreten in α verschiedenen Fällen,
A eintreten, aber B nicht in β „ „ ,
A nicht eintreten, wohl aber B in γ „ „ ,
weder A noch B eintreten in δ „ „ .

Die sämtlichen $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ Fälle werden als gleich möglich vorausgesetzt. Unmittelbar sieht man, daß die Wahrscheinlichkeit

für das Eintreten von A ist $w_1 = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

„ „ „ „ B „ $w_2 = \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

„ „ „ „ wenigstens einem der beiden Ereignisse A, B

$$w_3 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta},$$

„ „ „ „ A und B $w_4 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$,

„ „ „ „ A, wenn B schon eingetroffen ist,

$$w_5 = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma},$$

„ „ „ „ A, wenn B nicht eingetroffen ist,

$$w_6 = \frac{\beta}{\beta+\delta},$$

„ „ „ „ B, wenn A schon eingetroffen ist,

$$w_7 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

„ „ „ „ B, wenn A nicht eingetroffen ist,

$$w_8 = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}.$$

Nun ist identisch

$$w_1 + w_2 = w_3 + w_4$$

oder

$$w_3 = w_1 + w_2 - w_4,$$

d. h., die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei beliebigen Ereignissen wenigstens das eine eintrifft, ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß das erste eintrifft, und daß das zweite eintrifft, vermindert um die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl das eine wie das

andere eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze bei zweimaligem Werfen, bezüglich beim Werfen zweier Münzen, mindestens einmal Schrift zu erhalten, ist demnach

$$w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Wenn insbesondere $w_4 = 0$, d. h., wenn beide Ereignisse nicht zugleich eintreten können, wird

$$w_3 = w_1 + w_2.$$

In dieser Gleichung steckt der Satz I von der totalen Wahrscheinlichkeit für den speziellen Fall $n = 2$.

Durch Einsetzen der Werte ergibt sich ohne weiteres:

$$w_4 = w_2 \cdot w_5$$

und

$$w_4 = w_1 \cdot w_7.$$

Diese Gleichungen enthalten den Satz II, b) von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit für zwei voneinander abhängige Ereignisse.

Besteht unter den Zahlen α, β, γ, δ die Relation

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma},$$

so setze man den gemeinsamen Wert dieser beiden Brüche gleich ν, also $\beta = \nu\alpha$ und $\delta = \nu\gamma$. Durch Substitution dieser Werte in die Ausdrücke für w_1, w_2, w_5, w_6, w_7, w_8 findet man sofort:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} = w_1 = w_5 = w_6,$$
$$\frac{1}{\nu + 1} = w_2 = w_7 = w_8;$$

d. h. aber, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von B ist dieselbe, gleichgültig, ob man weiß, daß A eingetreten ist, oder ob man weiß, daß A nicht eingetreten ist. Unter der angegebenen Bedingung ist also die Wahrscheinlichkeit für B unabhängig von dem Eintreffen oder Nichteintreffen von A und ebenso die Wahrscheinlichkeit für A unabhängig von dem Eintreffen oder Nichteintreffen von B, und es wird in diesem Falle

$$w_4 = w_1 \cdot w_2,$$

d. h., es gilt der unter II, a) abgeleitete Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit für zwei voneinander unabhängige Ereignisse.

IV. **Beispiele.** Die Sätze über die totale und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit dienen zur Lösung komplizierterer Aufgaben; ihre Anwendung erfordert allerdings oft vorsichtiges Nachdenken.

1. Die schon mehrfach behandelte D'Alembertsche Münzaufgabe: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Werfen einer Münze mindestens einmal Schrift zu erzielen?“ können wir jetzt auch folgendermaßen lösen: Der Erfolg tritt ein entweder, wenn man schon beim ersten Wurf Schrift erhält (Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$), oder wenn beim ersten Wurf Kopf, beim zweiten Schrift erscheint (zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$). Nach dem Satze von der totalen Wahrscheinlichkeit ist also die gewünschte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. Eine Urne A enthalte a Kugeln, darunter α weiße; eine zweite, B, enthalte b Kugeln, darunter β weiße. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn man blindlings aus einer der beiden Urnen eine Kugel herausnimmt, diese weiß ist?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, aus A eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{\alpha}{a}$, die, aus B eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{\beta}{b}$; die verlangte Wahrscheinlichkeit ist nun nicht etwa gleich der Summe $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}$, die ja bei passenden Werten von a, b, α, β auch größer als 1 sein könnte. Man muß vielmehr bedenken, daß die Wahrscheinlichkeit, aus A eine weiße Kugel zu ziehen, ein zusammengesetztes Ereignis ist; die Wahrscheinlichkeit, die Urne A zu wählen, beträgt $\frac{1}{2}$ und die Wahrscheinlichkeit, aus A eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{\alpha}{a}$, also ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a}$; ebenso erhält man für die Wahrscheinlichkeit, die Urne B zu wählen und aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, das Produkt $\frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{b}$. Nach dem Satze von der totalen Wahrscheinlichkeit findet man dann für die in der Aufgabe gewünschte Wahrscheinlichkeit w die Summe $\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{b}$. Denkt man sich die $(a + b)$ Kugeln in einer Urne C vereinigt, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus C eine weiße Kugel zu ziehen, $w' = \frac{\alpha + \beta}{a + b}$. Im allgemeinen, d. h. bei beliebigen Werten von a, α, b, β, stimmen w und w' nicht überein. Die Ursache dieser Verschiedenheit liegt darin, daß, solange die Kugeln auf die beiden Urnen A und B verteilt sind, es unabhängig von den Werten von a und b gleich wahrscheinlich

ist, eine der A-Kugeln oder eine der B-Kugeln zu greifen. Nach der Vereinigung der Kugeln in einer Urne beträgt aber die Wahrscheinlichkeit, eine A-Kugel zu ziehen, $\frac{a}{a+b}$; die Wahrscheinlichkeit, daß eine A-Kugel weiße Farbe hat, ist $\frac{\alpha}{a}$, also die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, eine A-Kugel von weißer Farbe zu greifen, $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{\alpha}{a}$. Ebenso ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, eine B-Kugel von weißer Farbe zu ziehen, das Produkt $\frac{b}{a+b} \cdot \frac{\beta}{b}$ und endlich für die Wahrscheinlichkeit w', entweder eine A-Kugel von weißer Farbe oder eine B-Kugel von weißer Farbe zu greifen, nach dem Satze C, I die Summe $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{\alpha}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\beta}{b} = \frac{\alpha+\beta}{a+b}$. Daß in den speziellen Fällen $a = b$ und $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$ die beiden Wahrscheinlichkeiten w und w' einander gleich sind, ist leicht zu erkennen.

3. Von weiteren Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung wollen wir des historischen Interesses wegen nur noch das vielfach in der Literatur behandelte „Teilungsproblem" (französisch: problème des partis, englisch: problem of points) erwähnen, dem die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren Ursprung verdankt. Ein Nichtmathematiker de Meré legte Pascal die folgende Aufgabe vor: „Von zwei Spielern, deren Geschicklichkeit als gleich vorausgesetzt wird, soll derjenige den ganzen Einsatz erhalten, der zuerst eine im voraus bestimmte Anzahl (n) von Partien gewinnen würde. Aus irgend einem Grunde geben sie aber das Spiel auf, nachdem der eine Spieler $(n-\alpha)$, der andere $(n-\beta)$ Partien gewonnen hat. Wie ist nun der Einsatz zu teilen?" Pascal und Fermat lösten, wenigstens für spezielle Werte von α, β, die Aufgabe nach verschiedenen Methoden und wurden so die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Später beschäftigten sich mit dieser Aufgabe auch Huygens und Jakob Bernoulli; de Moivre verallgemeinerte sie, und Montfort (1708) löste sie zum ersten Male allgemein. Lagrange und Laplace benutzten das Problem als Beispiel für die Lösung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben durch Differenzengleichungen[1]). Die Lösung der Aufgabe für kleine Werte von α und β ist nicht schwierig[2]); die Behandlung des allgemeinen

1) Auf diese Methode können wir hier nicht eingehen, da wir uns auf die elementaren, mit Hilfe der Kombinatorik zu erledigenden Teile der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschränken.

2) Wenn z. B. $\alpha = 1$, $\beta = 2$, dem ersten Spieler also nur eine, dem zweiten Spieler noch zwei Partien an der geforderten Zahl fehlen, so könnte letzterer bei Fortsetzung des Spiels nur dann den ganzen Einsatz erhalten, wenn er sowohl die nächste $\left(\text{Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}\right)$ als auch die übernächste Partie

Falls würde uns aber zu weit führen; für das Studium desselben verweisen wir auf die unter A zitierten ausführlichen Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

D. Das Theorem von Jakob Bernoulli. (Gesetz der großen Zahlen.)

Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Erfolg bei Ausführung irgend einer Handlung sei w, die für den Nichterfolg $v = 1 - w$. Besteht die Handlung z. B. in dem Werfen eines Würfels, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Eins oben liegt, $w = \frac{1}{6}$, die, daß man die Eins nicht erhält, $v = \frac{5}{6}$. Wird die Handlung etwa fünfmal hintereinander ausgeführt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim ersten Male ein Erfolg, beim zweiten ein Mißerfolg, beim dritten und vierten Male wieder ein Erfolg, endlich beim fünften Male ein Mißerfolg eintritt,

$$w \cdot v \cdot w \cdot w \cdot v = w^3 \cdot v^2.$$

Wenn die Reihenfolge, in welcher Erfolge und Mißerfolge abwechseln, keine Rolle spielt, wenn es nur darauf ankommt, daß unter fünf Versuchen drei Erfolge und zwei Mißerfolge eintreten, so sind so viele Reihenfolgen möglich, wie man fünf Elemente permutieren kann, die in zwei Gruppen von drei, bezüglich zwei einander gleichen zerfallen, d. h. $\frac{5!}{3!\,2!}$; für jede einzelne Reihenfolge ist die Wahrscheinlichkeit $w^3 v^2$, also beträgt nach dem Satze von der totalen Wahrscheinlichkeit (C, I) die Wahrscheinlichkeit, daß bei fünf Versuchen drei Erfolge und zwei Mißerfolge in irgend einer Reihenfolge auftreten, $\frac{5!}{3!\,2!} \cdot w^3 v^2$, und allgemein die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen μ Erfolge und ν Mißerfolge vorkommen $(\mu + \nu = n)$,

$$w_\mu = \frac{n!}{\mu!\,\nu!} w^\mu v^\nu = \binom{n}{\mu} w^\mu v^{n-\mu}.$$

Die Werte, die wir erhalten, wenn wir bei festem n die Zahl μ die Reihe 0, 1, 2, ..., n durchlaufen lassen,

$$w_0 = v^n, \quad w_1 = \binom{n}{1} w\, v^{n-1}, \quad w_2 = \binom{n}{2} w^2 v^{n-2}, \ldots, w_n = w^n,$$

(Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$) gewönne. Für ihn würde also die Wahrscheinlichkeit, bei Fortsetzung des Spiels den Einsatz zu bekommen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, für den ersten Spieler demnach $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ sein. Beim Abbrechen des Spiels muß also der Einsatz so geteilt werden, daß der erste dreimal so viel erhält wie der zweite.

d. h. also, die Wahrscheinlichkeiten für keinen, für einen, für zwei, endlich für n Erfolge bei n Versuchen sind die bei Entwicklung des Binoms $(v + w)^n$ auftretenden Glieder. Da nun $v + w = 1$, ist also auch $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, was nichts anderes bedeutet, als daß eins der Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten mit $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n$ bezeichnet sind, eintreten muß.

Um die Frage zu entscheiden, welche von diesen Wahrscheinlichkeiten den größten Wert hat, bilden wir den Quotienten

$$\begin{aligned}\frac{w_\mu}{w_{\mu-1}} &= \frac{n!}{\mu!(n-\mu)!} w^\mu v^{n-\mu} : \frac{n!}{(\mu-1)!(n-\mu+1)!} w^{\mu-1} v^{n-\mu+1} \\ &= \frac{(\mu-1)!(n-\mu+1)!}{\mu!(n-\mu)!} \cdot \frac{w}{v} \\ &= \frac{n-\mu+1}{\mu} \cdot \frac{w}{v}.\end{aligned}$$

Es wird also

$$w_\mu \gtreqless w_{\mu-1},$$

je nachdem

$$\left(\frac{n+1}{\mu} - 1\right) \cdot \frac{w}{v} \gtreqless 1$$

oder

$$\frac{n+1}{\mu} - 1 \gtreqless \frac{v}{w}$$

oder

$$\frac{n+1}{\mu} \gtreqless \frac{1}{w}$$

oder

$$\frac{\mu}{n+1} \lesseqgtr w$$

oder endlich

$$\mu \lesseqgtr (n+1)\,w.$$

Die Wahrscheinlichkeiten w_μ wachsen also mit wachsendem Index μ, solange $\mu < (n+1)w$; sie nehmen mit wachsendem μ wieder ab, wenn $\mu > (n+1)w$. Ist etwa $(n+1)w$ gerade einer ganzen Zahl μ_0 gleich, so hat man

$$w_{\mu_0} = w_{\mu_0-1},$$

und diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind die größten in der Reihe

$$w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n.$$

Wenn $(n+1)w$ keine ganze Zahl ist und μ_0 jetzt die größte ganze in $(n+1)w$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, dann wird

$$w_{\mu_0} > w_{\mu_0-1},$$

aber

$$w_{\mu_0+1} < w_{\mu_0},$$

also ist dann w_{μ_0} die größte der Wahrscheinlichkeiten $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Da

$$(n+1)w - 1 < \mu_0 < (n+1)w$$

oder

$$nw - (1-w) < \mu_0 < nw + w,$$

kann sich μ_0 von nw nur um einen echten Bruch unterscheiden. Wir können also das Resultat aussprechen: Unter all den denkbaren Serien von n Versuchen, die sich durch die verschiedene Zahl der Erfolge und Mißerfolge unterscheiden, hat diejenige die größte Wahrscheinlichkeit, in welcher die Anzahl der Erfolge entweder gleich oder doch nahezu gleich (der Unterschied kann nur ein echter Bruch sein) dem Produkt aus der Anzahl der Versuche und der Wahrscheinlichkeit des Erfolges bei einer einmaligen Handlung ist.

Würfelt man beispielsweise 1200 Male mit einem Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Eins gar nicht erscheint,

$$w_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^{1200} = 0,\overbrace{0\ldots0}^{95\text{ Nullen}}96\ldots;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die Eins nur ein einziges Mal erscheint,

$$w_1 = 1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1199} = 0,\overbrace{0\ldots0}^{92\text{ Nullen}}23\ldots;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß die Eins bei allen 1200 Würfen oben liegt, $w_{1200} = \left(\frac{1}{6}\right)^{1200} = 1$ dividiert durch eine 934 stellige Zahl; die Wahrscheinlichkeit aber, daß die Eins $\mu_0 = \frac{1}{6} \cdot 1200 = 200$ Male auftritt,

$$w_{200} = \frac{1200!}{200!\,1000!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{200} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$$

etwa

$$= 0{,}0309\,[1]).$$

1) Zur numerischen Berechnung bedient man sich zweckmäßig des Tabellenwerks C. F. Degen, Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium Enneas, Kopenhagen 1824, in welchem die zwölfstelligen Logarithmen aller $n!$ für $n = 1$ bis $n = 1200$ zusammengestellt sind.

Im Vergleiche zu den Anfangs- und den Endgliedern der Reihe $w_0, w_1, \ldots, w_{1200}$ ist diese größte Wahrscheinlichkeit w_{200} außerordentlich groß, wenn sie auch noch nicht ganz $\frac{1}{32}$ beträgt[1]).

Mittels der Formel

$$\frac{w_\mu}{w_{\mu-1}} = \frac{n+1-\mu}{\mu} \cdot \frac{w}{v}$$

kann man aus w_{μ_0} leicht die benachbarten Glieder der Reihe

$$w_0, \; w_1, \; \ldots, \; w_n$$

berechnen. So wird in unserem Zahlenbeispiel

$$\left(n = 1200, \quad \mu_0 = 200, \quad \frac{w}{v} = \frac{1}{5}\right)$$

$$w_{201} = \frac{1000}{201 \cdot 5} w_{200}, \quad w_{202} = \frac{999}{202 \cdot 5} w_{201}, \quad w_{203} = \frac{998}{203 \cdot 5} w_{202} \text{ usw.}$$

und

$$w_{199} = \frac{200 \cdot 5}{1001} w_{200}, \quad w_{198} = \frac{199 \cdot 5}{1002} w_{199}, \quad w_{197} = \frac{198 \cdot 5}{1003} w_{198} \text{ usw.}$$

Bricht man alle Dezimalzahlen hinter der fünften Stelle ab, so erhält man:

$$w_{200} = 0{,}03090;$$

$w_{199} = 0{,}03087;$	$w_{201} = 0{,}03075;$
$w_{198} = 0{,}03066;$	$w_{202} = 0{,}03041;$
$w_{197} = 0{,}03026;$	$w_{203} = 0{,}02990;$
$w_{196} = 0{,}02969;$	$w_{204} = 0{,}02923;$
$w_{195} = 0{,}02895;$	$w_{205} = 0{,}02840;$
$w_{194} = 0{,}02806;$	$w_{206} = 0{,}02744;$
$w_{193} = 0{,}02702;$	$w_{207} = 0{,}02635;$
$w_{192} = 0{,}02587;$	$w_{208} = 0{,}02516;$
$w_{191} = 0{,}02462;$	$w_{209} = 0{,}02388;$

1) Es läßt sich sogar zeigen, daß man durch hinreichend große Werte von n die größte Wahrscheinlichkeit w_{μ_0} beliebig klein machen kann. Unter Benutzung einer von Stirling herstammenden Formel, nach welcher für große Werte von n näherungsweise $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ gesetzt werden darf, kann man nämlich w_{μ_0} leicht auf die Form $\frac{1}{\sqrt{2\pi n w v}}$ bringen, aus welcher die Richtigkeit der Behauptung sofort hervorgeht.

$w_{190} = 0,02327$; $w_{210} = 0,02254$;
$w_{189} = 0,02187$; $w_{211} = 0,02115$;
$w_{188} = 0,02042$; $w_{212} = 0,01974$;
$w_{187} = 0,01895$; $w_{213} = 0,01831$;
$w_{186} = 0,01747$; $w_{214} = 0,01689$;
$w_{185} = 0,01601$; $w_{215} = 0,01549$.

Die Tabelle zeigt, daß die Werte auf beiden Seiten von w_{200} abnehmen, und zwar zuerst langsam, dann aber um so schneller, je weiter man sich in der Reihe von w_{200} entfernt[1]).

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei den 1200 Versuchen die Anzahl der Erfolge zwischen 195 und 205 liegt, ist gleich der Summe

$$w_{195} + w_{196} + \cdots + w_{200} + \cdots + w_{204} + w_{205} = 0,330;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß bei den 1200 Versuchen die Anzahl der Erfolge zwischen 190 und 210 liegt, gleich der Summe

$$w_{190} + w_{191} + \cdots + w_{200} + \cdots + w_{209} + w_{210} = 0,584;$$

die Wahrscheinlichkeit, daß bei den 1200 Versuchen die Anzahl der Erfolge zwischen 185 und 215 liegt, gleich der Summe

$$w_{185} + w_{186} + \cdots + w_{200} + \cdots + w_{214} + w_{215} = 0,7705.$$

Die Summe der vollständigen, aus 1201 Gliedern bestehenden Reihe $w_0 + w_1 + \cdots + w_{1200}$ ist gleich 1. Der kleine Teil der Reihe, welcher nur das Glied w_{200} und die 30 benachbarten umfaßt, liefert also schon den bei weitem größten Beitrag zu dieser Summe, und wenn auch die Wahrscheinlichkeit, daß bei 1200 Würfen mit einem Würfel die Eins genau 200 mal erscheint, gering ist $\left(\text{noch nicht ganz } \frac{1}{32}\right)$, so erreicht doch die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl der Erfolge zwischen 185 und 215 liegt, den schon ziemlich beträchtlichen Wert 0,7705.

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter n Versuchen

---

1) Das gilt nicht etwa nur für dieses Zahlenbeispiel; in der Formel

$$w_\mu = \frac{n+1-\mu}{\mu} \cdot \frac{w}{v} \cdot w_{\mu-1},$$

aus welcher die w mit höherem Index als μ_0 zu berechnen sind, wird vielmehr allgemein der Bruch $\frac{n+1-\mu}{\mu}$ mit wachsendem μ immer kleiner.

die Zahl der Erfolge zwischen $\mu_0 - \lambda$ und $\mu_0 + \lambda$ liegt, gleich der Summe

$$S_\lambda = w_{\mu_0 - \lambda} + w_{\mu_0 - \lambda + 1} + \cdots + w_{\mu_0} + \cdots + w_{\mu_0 + \lambda - 1} + w_{\mu_0 + \lambda},$$

in welcher

$$w_\varrho = \binom{n}{\varrho} w^\varrho v^{n-\varrho}$$

zu setzen ist.

De Moivre, Stirling und Laplace ist es gelungen, für große Werte von n diese Summe näherungsweise durch einen geschlossenen Ausdruck, nämlich ein bestimmtes Integral, darzustellen. Auf die Ableitung der betreffenden Formel können wir hier nicht eingehen (vgl. z. B. das unter A, S. 267 zitierte Lehrbuch von E. Czuber); wir wollen aber die wichtigen, aus ihr zu ziehenden Folgerungen mitteilen:

1. Wenn für $\frac{\lambda}{n}$ ein fester (beliebig kleiner) Wert gegeben ist, so kann man durch hinreichend große Werte von n die Summe S_λ, welche die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß die Anzahl der Erfolge von dem Produkte nw um nicht mehr als λ abweicht, dem Werte 1 beliebig nahe bringen.
2. Wenn ein fester, der Zahl 1 beliebig nahe kommender echter Bruch ω gegeben ist, so kann man durch genügend große Werte von n erreichen, daß auch schon bei beliebig kleinen Werten von $\frac{\lambda}{n}$ die Wahrscheinlichkeit $S_\lambda = \omega$ wird[1]).

Das in diesem Abschnitt D Vorgetragene bildet, bis auf die hier fehlende genauere quantitative Bestimmung, den wesentlichen Inhalt des Theorems von Jakob Bernoulli, welcher in seiner Ars conjectandi (Basel 1713) diese Untersuchung zwar noch nicht zum endgültigen Abschluß gebracht, sie doch aber in Angriff genommen und ziemlich weit geführt hat. Das Bernoullische Theorem bezeichnet man auch als das „Gesetz der großen Zahlen", wenngleich Poisson, der diesen Namen eingeführt hat, darunter eigentlich etwas anderes, nämlich die Verallgemeinerung des Bernoullischen Satzes für den Fall verstand, daß die Wahrscheinlichkeit w bei den aufeinanderfolgenden Versuchen verschiedene Werte annimmt.

---

1) In dem vorher durchgerechneten Zahlenbeispiel war $n = 1200$, $\lambda = 15$, $S_\lambda = 0{,}77$. Halten wir den Wert $\frac{\lambda}{n} = \frac{1}{80}$ fest, so können wir durch Vergrößerung von n die Wahrscheinlichkeit S_λ der Zahl 1 beliebig nahe bringen. Bleiben wir aber bei der Wahrscheinlichkeit 0,77, so können wir durch Vergrößerung von n erreichen, daß schon für beliebig kleine Werte von $\frac{\lambda}{n}$ $\left(\text{also auch kleinere als } \frac{1}{80}\right)$ $S_\lambda = 0{,}77$ wird.

Auf dem Gesetz der großen Zahlen beruht die praktische Bedeutung jeder Wahrscheinlichkeitsbestimmung. Auch derjenige, welcher von dem genauen Inhalt dieses Satzes keine klare Vorstellung besitzt, verbindet mit der Aussage, einem Ereignis komme die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zu, vor allen Dingen die Meinung, daß bei einer sehr großen Zahl von Versuchen das Ereignis etwa in dem sechsten Teil aller Fälle eintreffen werde. So stützt man sich auf diesen Satz, wenn man für ein Glücksspiel den Einsatz berechnet, den ein Spieler zu entrichten hat, falls keine der Parteien übervorteilt werden soll. Verpflichtet sich ein Unternehmer, jedem, der beim Werfen eines Würfels eine Eins erzielt, a Mark zu zahlen, und wird das Spiel eine sehr große Anzahl (n) von Malen ausgeführt, so hat nach dem Bernoullischen Satz der Unternehmer mit einer Wahrscheinlichkeit, die dem Werte 1 um so näher kommt, je größer n wird, im ganzen eine sich von $\frac{1}{6}na$ beliebig wenig unterscheidende Summe auszuzahlen. Wenn der Unternehmer weder verdienen noch verlieren will, so müssen also bei den n Spielen auch $\frac{1}{6}na$ Mark eingezahlt werden, bei jedem einzelnen Spiel daher $\frac{1}{6}a$ Mark, und allgemein, wenn ein Spieler beim Eintreten eines Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit w beträgt, a Mark erhalten soll, so hat er aw Mark als Einsatz zu entrichten. Dieses Produkt aw aus dem zu erwartenden Betrage und der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, bei dessen Eintreffen die Summe a gezahlt wird, nennt man die „mathematische Erwartung" des Spielers. Dieser Begriff der mathematischen Erwartung ist nicht nur bei Glücksspielen, sondern vor allem auch in dem Versicherungswesen von großer Wichtigkeit.

Andererseits bedient man sich des Bernoullischen Satzes, um theoretisch nicht bestimmbare Wahrscheinlichkeiten gewisser komplizierter Erscheinungen des praktischen Lebens aus einer großen Zahl von Versuchen oder Beobachtungen näherungsweise zu ermitteln. Wenn bei einer großen Zahl (n) von Menschen ein bestimmtes Ereignis, für dessen Eintreten die Wahrscheinlichkeit w sei, in m Fällen beobachtet worden ist, so weicht nach dem Bernoullischen Theorem m nur wenig von nw ab, w also nur wenig von $\frac{m}{n}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied eine gewisse Grenze nicht überschreitet, nähert sich dem Werte 1 immer mehr, je größer n wird. In den sogenannten Sterbetafeln sind die Anzahlen der Personen zusammengestellt, die von einer bestimmten Anzahl, z. B. 100 000, gleichzeitig Geborener nach 1, nach 2, nach 3 usw. Jahren sich noch am Leben befinden. Entnehmen wir einer solchen Tabelle, daß von

100000 gleichzeitig geborenen Personen männlichen Geschlechts nach 20 Jahren noch 59287, nach 30 Jahren noch 54454, nach 40 Jahren noch 48775 am Leben sind, so schließen wir daraus, daß für einen 20jährigen Mann die Wahrscheinlichkeit, mindestens noch 10 Jahre zu leben, etwa $\frac{54\,454}{59\,287}$, die, mindestens noch 20 Jahre zu leben, etwa $\frac{48\,775}{59\,287}$, die für einen 30jährigen Mann, mindestens 40 Jahre alt zu werden, etwa $\frac{48\,775}{54\,454}$ beträgt usw.[1])

E. Wahrscheinlichkeit a posteriori.

I. Bayessche Regel.

Bei allen bisher besprochenen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung handelte es sich um die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von Ereignissen, die aus einem bestimmten Komplex von Bedingungen hervorgehen können. Diese Art der Wahrscheinlichkeitsbestimmung wird als „apriorische“ bezeichnet. Natur- und sozialwissenschaftliche Untersuchungen führen aber häufig zu einer hiervon verschiedenen Kategorie von Wahrscheinlichkeitsaufgaben, der Aufsuchung einer Wahrscheinlichkeit „a posteriori“. Es sei das Eintreffen eines Ereignisses E beobachtet worden, und man wisse, daß es nur durch einen der sich gegenseitig ausschließenden Bedingungskomplexe $U_1, U_2, \ldots, U_n$ verursacht sein kann[2]), und daß, falls U_ν wirksam ist, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E w_ν beträgt $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$; dann ist die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Eintreffen von E gerade durch den bestimmten Bedingungskomplex U_ν bewirkt worden ist? Dieses Problem ist zuerst von dem Engländer Bayes behandelt worden, und zwar in zwei Arbeiten, die erst nach seinem Tode ein Freund (namens Price) in den Philosophical Transactions 1764 und 1765 veröffentlicht hat. Wir erörtern

a) den Fall, daß a priori, d. h. vor dem Eintreten von E, das Wirksamwerden jeder der Ursachen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(\text{also } \frac{1}{n}\right)$ besitzt.

1) Solche Sterbetafeln, die für die Lebensversicherung von außerordentlicher Wichtigkeit sind, und die sich auch für Wahrscheinlichkeitsaufgaben im Schulunterricht gut verwenden lassen, findet man z. B. in dem schon wiederholt erwähnten Lehrbuche von E. Czuber, wo auch ihre Herstellung ausführlich erörtert wird.

2) $U_1, U_2, \ldots, U_n$ bezeichnet man in der Literatur der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewöhnlich sämtlich als Ursachen, wenn im Sinne der Logik auch nur einer von diesen Bedingungskomplexen die wirkliche Ursache von E sein kann.

Um zu zeigen, daß eine solche aposteriorische Wahrscheinlichkeitsbestimmung durchaus keine besonderen Annahmen nötig macht[1]), kann man die Lösung der allgemeinen Aufgabe an der folgenden schematischen erläutern:

Man habe n gleichartige Urnen $U_1, U_2, \ldots, U_n$, deren jede s Kugeln enthalte. Von den s Kugeln der ν^{ten} Urne ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) seien a_ν weiß, so daß die Wahrscheinlichkeit, aus ihr eine weiße Kugel zu ziehen, $w_\nu = \frac{a_\nu}{s}$ ist. Jemand hat nun aus irgend einer der Urnen irgend eine Kugel herausgenommen; es stellt sich heraus, daß diese gezogene Kugel weiß ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus der bestimmten Urne U_r stammt?

Wie man sieht, werden die n Ursachen der allgemeinen Aufgabe durch die n Urnen repräsentiert. Die apriorische Wahrscheinlichkeit jeder der n Ursachen ist hier die gleiche $\left(\frac{1}{n}\right)$; denn die Wahl jeder Urne ist gleichmöglich. Für die Lösung der Aufgabe dürfen wir, weil alle Urnen gleich viel Kugeln enthalten, nach C, IV, Schluß der Aufgabe 2, S. 278, ohne das Resultat zu ändern, uns alle Kugeln in einer Urne vereinigt denken, wobei aber die aus der ν^{ten} stammenden das Zeichen ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) tragen sollen. Wir wissen, daß die gezogene Kugel weiß war, also werden die sämtlichen möglichen Fälle durch die sämtlichen weißen Kugeln, deren Anzahl $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ beträgt, repräsentiert. Günstig für die Ursache U_r sind nur die aus der Urne U_r stammenden a_r weißen Kugeln. Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß die gezogene weiße Kugel der Urne U_r entstammt,

$$W_r = \frac{a_r}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

oder, wenn wir Zähler und Nenner durch s teilen und $\frac{a_\nu}{s} = w_\nu$ setzen,

$$W_r = \frac{w_r}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}.$$

Diese, als **Bayessche Regel** bezeichnete, Formel stellt zugleich die Lösung der allgemeinen Aufgabe a) dar.

Zur Erledigung des **Falles** b), daß vor dem Eintreffen von E das Wirksamwerden der n Ursachen eine verschiedene Wahrscheinlichkeit, das Wirksamwerden von U_ν etwa die Wahrscheinlichkeit ω_ν besitzt ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), brauchen wir die schematische Aufgabe nur ein wenig abzuändern. Wir denken uns von vornherein in einer

1) Wie z. B. die, daß die gesuchte aposteriorische Wahrscheinlichkeit der apriorischen proportional sei.

Urne s_1 Kugeln, welche die Nummer 1 tragen, und von denen a_1 weiß sind, s_2 Kugeln, welche die Nummer 2 tragen, und von denen a_2 weiß sind usw., endlich s_n Kugeln, welche die Nummer n tragen, und von denen a_n weiß sind. Die n verschiedenen Ursachen werden hier durch die n Gruppen von Kugeln dargestellt, deren ν^{te} aus s_ν Kugeln besteht. Die apriorische Wahrscheinlichkeit für das Wirksamwerden von U_ν, d. h. für das Greifen einer Kugel aus der Gruppe der mit ν bezeichneten, ist $\omega_\nu = \frac{s_\nu}{S}$, wo $S = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$; die Wahrscheinlichkeit, daß, falls U_ν wirksam ist, das beobachtete Ereignis eintritt, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn man aus der Gruppe der mit ν bezeichneten Kugeln eine greift, diese weiß ist, beträgt $w_\nu = \frac{a_\nu}{s_\nu}$. Man habe nun aus der Urne eine Kugel gezogen und konstatiert, daß sie weiß ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie der mit der Nummer r bezeichneten Gruppe angehört?

Da man die Farbe der gezogenen Kugel kennt, hat man die Anzahl der möglichen Fälle gleich der Anzahl der weißen Kugeln in der Urne, also gleich $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ zu setzen; die Zahl der für die Ursache U_r günstigen Fälle ist gleich a_r, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W_r = \frac{a_r}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \frac{\frac{a_r}{s_r} \cdot \frac{s_r}{S}}{\frac{a_1}{s_1} \cdot \frac{s_1}{S} + \frac{a_2}{s_2} \cdot \frac{s_2}{S} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \cdot \frac{s_n}{S}}$$

$$= \frac{w_r\, \omega_r}{w_1 \omega_1 + w_2 \omega_2 + \cdots + w_n \omega_n}.$$

Diese Formel ist die Bayessche Regel für den Fall b).

II. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen.

Häufig sind unsere Kenntnisse zu unvollkommen, um für ein zu erwartendes Ereignis die Wahrscheinlichkeit a priori bestimmen zu können. Wenn wir z. B. von einer Urne nur wissen, daß sie weiße und schwarze Kugeln enthält, aber nicht, in welchem Verhältnisse diese gemischt sind, so fehlt uns die sichere Grundlage, um die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel angeben zu können. Liegen aber schon die Ergebnisse früherer Ziehungen von Kugeln aus dieser Urne vor, so kann man dieselben benutzen, um die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Erfolg bei künftigen Ziehungen zu ermitteln.

Es sei ein Ereignis E beobachtet worden, welches nur durch einen der einander ausschließenden Bedingungskomplexe $U_1, U_2, \ldots, U_n$ verursacht sein kann. Wie unter I. sei die Wahrscheinlichkeit, daß aus der Existenz von U_ν das Ereignis E hervorgeht, w_ν und ω_ν die aprioriscbe Wahrscheinlichkeit für das Wirksamwerden von U_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit W_F eines künftigen Ereignisses F, das auch nur entweder aus U_1 oder aus U_2 usw. oder aus U_n hervorgehen kann. Die Wahrscheinlichkeit, daß, falls U_ν wirksam ist, F eintritt, betrage w_ν'.

Die nach der Bayesschen Regel aus der Beobachtung von E für die Existenz von U_ν berechnete Wahrscheinlichkeit ist

$$W_\nu = \frac{w_\nu \omega_\nu}{w_1 \omega_1 + w_2 \omega_2 + \cdots + w_n \omega_n},$$

also die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis, daß einerseits U_ν wirksam ist und aus der als wirksam vorausgesetzten Ursache U_ν das Ereignis F hervorgeht, gleich dem Produkte $W_\nu w_\nu'$, deshalb die totale Wahrscheinlichkeit, daß F entweder durch U_1 oder durch U_2 usw. oder durch U_n zustande kommt,

$$W_F = W_1 w_1' + W_2 w_2' + \cdots + W_n w_n'$$
$$= \frac{w_1 \omega_1 w_1' + w_2 \omega_2 w_2' + \cdots + w_n \omega_n w_n'}{w_1 \omega_1 + w_2 \omega_2 + \cdots + w_n \omega_n}.$$

In dem speziellen Falle, daß $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n$, nimmt die rechte Seite den einfacheren Wert

$$\frac{w_1 w_1' + w_2 w_2' + \cdots + w_n w_n'}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

an.

Beispiel: In einer Urne mögen sich fünf Kugeln befinden. Man wisse nur, daß sie zum Teil weiß, zum Teil schwarz sind, aber nicht, wie viele es von jeder Art gibt. Man hat vier mal je eine Kugel herausgenommen und sie jedesmal vor der neuen Ziehung wieder hineingelegt. Bei drei Ziehungen hat man eine weiße, bei einer Ziehung eine schwarze Kugel erhalten. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn man abermals eine Kugel herausgreift, diese weiß ist?

Lösung: In bezug auf den Inhalt der Urne sind nur die folgenden vier Annahmen möglich:

U_1 : 4 weiße, 1 schwarze Kugel;

U_2 : 3 weiße, 2 schwarze Kugeln;

U_3 : 2 weiße, 3 schwarze Kugeln;

U_4 : 1 weiße, 4 schwarze Kugeln.

Da wir über das Mischungsverhältnis der Kugeln absolut nichts wissen, sind für unsere Kenntnis die vier Hypothesen U_1, U_2, U_3, U_4 gleich möglich, also $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{4}$[1]. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von drei weißen und einer schwarzen Kugel bei irgend einer bestimmten Reihenfolge ist

im Falle U_1: $\quad w_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$,

im Falle U_2: $\quad w_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{625}$,

im Falle U_3: $\quad w_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{625}$,

im Falle U_4: $\quad w_4 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{625}$,

folglich die nach der Bayesschen Regel bestimmte Wahrscheinlichkeit für die Existenz von U_1, U_2, U_3, U_4 bezüglich

$$W_1 = \frac{64}{146} = \frac{32}{73}, \quad W_2 = \frac{54}{146} = \frac{27}{73}, \quad W_3 = \frac{24}{146} = \frac{12}{73}, \quad W_4 = \frac{4}{146} = \frac{2}{73}$$

und endlich die Wahrscheinlichkeit für das Ergreifen einer weißen Kugel bei einer künftigen Ziehung

$$W_F = \frac{32}{73} \cdot \frac{4}{5} + \frac{27}{73} \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{73} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{73} \cdot \frac{1}{5} = \frac{235}{365} = \frac{47}{73}.$$

F. Bemerkung über die geometrische Wahrscheinlichkeit.

Bei allen von uns behandelten Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung war sowohl die Anzahl der möglichen wie die der günstigen Fälle stets eine endliche Zahl. Manche Untersuchungen führen aber auf Aufgaben, bei denen die möglichen und die günstigen Fälle durch alle zwischen gewissen Grenzen liegende (also unendlich viele) Werte einer oder mehrerer stetiger Veränderlichen gekennzeichnet sind. Da die ersten Probleme dieser Art geometrische

1) Würden wir irgend welche Kenntnis von dem Mischungsverhältnis benutzen können, so hätte unser Wahrscheinlichkeitsurteil einen größeren Wert.

Fragen betrafen und andere sich geometrisch deuten lassen, bezeichnet man solche Aufgaben als Aufgaben der geometrischen Wahrscheinlichkeit. Für sie ist zunächst die Definition der Wahrscheinlichkeit zu modifizieren. Czuber[1]) gibt die folgende, stets zutreffende Definition: „Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis aus dem Inhalt der Mannigfaltigkeit der ihm günstigen Fälle zu dem Inhalt der Mannigfaltigkeit aller als gleichberechtigt vorausgesetzten Fälle." Zur Berechnung geometrischer Wahrscheinlichkeiten reicht die Kombinatorik nicht mehr aus; um die Inhalte von Mannigfaltigkeiten zu finden, braucht man vielmehr im allgemeinen die Integralrechnung.

1) Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie (Nr. 24) im 7. Bande des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig 1899.

VI. Kapitel.

Die irrationalen Zahlen[1]).

§ 1. Einleitung.

Definition und Größenvergleichung der irrationalen Zahlen.

Im Gebiete der rationalen Zahlen sind, wie schon im Anfange des vorigen Kapitels gesagt worden ist, die vier Grundoperationen: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren (mit alleiniger Ausnahme der Division durch Null) stets ausführbar, im allgemeinen aber nicht mehr das Radizieren einer beliebigen positiven Zahl und das Logarithmieren einer beliebigen positiven Zahl für eine beliebige positive Basis (vgl. Kap. II, § 5 C u. D, S. 92 u. 96). Für alle Anwendungen der Arithmetik ist dieser Mangel unerheblich; denn, wenn auch aus einer vorgelegten positiven Zahl die n^{te} Wurzel nicht gezogen werden kann, so lassen sich doch stets n^{te} Potenzen rationaler Zahlen angeben, die sich von der vorgelegten Zahl beliebig wenig unterscheiden (vgl. Kap. II, § 5 C, S. 95), und ebenso können wir Numerus und Basis durch Hinzufügung oder Wegnahme beliebig kleiner Zahlen so abändern, daß für die neue Basis der Logarithmus des neuen Numerus wirklich existiert (Kap. V, § 5 B, S. 241), und da es sich bei allen Anwendungen der Arithmetik, wie schon wiederholt hervorgehoben wurde, niemals um absolute Genauigkeit, sondern immer nur darum handelt, daß der begangene Fehler eine gewisse Grenze nicht überschreitet, sind die erwähnten Abänderungen für das praktische Rechnen durchaus zulässig. Tatsächlich operieren auch Physik, Astronomie, Technik, kaufmännisches Rechnen usw. immer nur mit den rationalen Zahlen[2]).

---

1) Diesem Kapitel ist zugrunde gelegt die Programmabhandlung des Verf.: Irrationale Zahlen und Verhältnisse inkommensurabler Größen. Luisenstädt. Oberrealschule zu Berlin, 1900.

2) Daß auch die theoretische Arithmetik, Algebra und Analysis mit den rationalen Zahlen (sogar mit den positiven ganzen Zahlen) auskommen sollen, fordert L. Kronecker. In dem Aufsatze „Über den Zahlbegriff" (J. f. Math., Bd. 101, S. 337) zeigt er, worin bei ausschließlicher Verwendung der rationalen Zahlen die Existenz der Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung besteht.

Dem gegenüber entspringt aber aus dem theoretischen Bedürfnisse der reinen Mathematik nach ausnahmsloser Ausführung der Rechenoperationen die Frage, ob man nicht einen neuen Zahlbegriff einführen und die Rechenoperationen mit diesem so definieren könne, daß auch Gleichungen wie $x^2 = 3$ oder $10^x = 2$ in aller Strenge auflösbar werden. Noch von einem anderen Gesichtspunkt aus macht sich das Bedürfnis nach Erweiterung des Zahlbereiches geltend. Wenn man auf einer nach beiden Seiten unbegrenzten geraden Linie einen Punkt O und außerdem eine bestimmte Strecke $\mathfrak{E}$ wählt, so kann man jeder rationalen Zahl r einen einzigen bestimmten Punkt der Geraden zuordnen, nämlich den, welchen man erhält, wenn man von O aus die konstruierbare Strecke $r\mathfrak{E}$ abträgt, und zwar nach einer willkürlich festgesetzten Seite von O aus, falls r positiv, nach der entgegengesetzten, falls r negativ ist. Zwischen zwei beliebigen, einander noch so nahen, in dieser Art zu findenden „rationalen" Punkten der Geraden liegen immer noch unzählig viele andere; denn, wenn r_1 und r_2 zwei voneinander verschiedene positive rationale Zahlen bedeuten und etwa $r_2 > r_1$ ist, so ist z. B. die rationale Zahl $\frac{r_1 + r_2}{2}$ größer als r_1, aber kleiner als r_2, und deshalb liegt der dem Werte $\frac{r_1 + r_2}{2}$ entsprechende Punkt zwischen den zu r_1 und r_2 gehörigen Punkten. Ebenso erkennt man, daß zwischen den Punkten (r_1) und $\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)$ sicher wieder mindestens ein einer rationalen Zahl entsprechender Punkt liegt usw. Trotzdem also etwa zwischen den Punkten (1) und (2) unendlich viele derartige rationale Punkte sich befinden, kommen wir auf die beschriebene Art doch keineswegs zu sämtlichen Punkten der zwischen (1) und (2) liegenden Strecke. Dem Punkte z. B., welchen man erhält, wenn man von O aus die Diagonale $\mathfrak{D}$ des Quadrats mit der Seite $\mathfrak{E}$ abträgt, kann unmöglich ein rationaler Punkt entsprechen. Wäre nämlich $\mathfrak{D} = r\mathfrak{E}$, so müßte nach dem Pythagoreischen Lehrsatze das Quadrat über $\mathfrak{D} = r\mathfrak{E}$ doppelt so groß wie das Quadrat über $\mathfrak{E}$, d. h. $r^2 = 2$ sein. Eine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 wäre, gibt es aber nicht (Kap. II, § 5 C, S. 92). Es erhebt sich deshalb die Frage: Können wir solchen Punkten der Geraden, denen keine rationale Zahl entspricht, nicht Zahlen einer neu zu definierenden Art zuordnen?

Zur Beantwortung der aufgeworfenen Fragen scheint es uns am zweckmäßigsten, von den Algorithmen auszugehen, mittels deren wir früher die Aufgaben des Quadratwurzelausziehens und des Logarithmierens in dem vorher angegebenen Sinne gelöst haben. Bedeutet A eine beliebige positive rationale Zahl und n eine beliebige positive

ganze Zahl, so kann man stets (siehe Kap. III, § 3 F, S. 107) die ganze Zahl a_n so bestimmen, daß

$$\left(\frac{a_n}{10^n}\right)^2 < A < \left(\frac{a_n+1}{10^n}\right)^2.$$

Wählt man für n nacheinander die Werte 1, 2, 3, ..., so ergeben sich die Dezimalbrüche $\frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_3}{10^3}, \cdots$, die, wenn es nicht auf absolute Genauigkeit ankommt, als Ersatz für die nicht vorhandene $\sqrt{A}$ dienen können. Beispielsweise findet man für $A = 3$ und

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

nach dem Kap. I, § 10 G, S. 46—48 angegebenen Verfahren die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
1{,}7^2 &= 2{,}89 &< 3 < 1{,}8^2 &= 3{,}24,\\
1{,}73^2 &= 2{,}9929 &< 3 < 1{,}74^2 &= 3{,}0276,\\
1{,}732^2 &= 2{,}999824 &< 3 < 1{,}733^2 &= 3{,}003289,\\
1{,}7320^2 &= 2{,}99982400 &< 3 < 1{,}7321^2 &= 3{,}00017041,\\
1{,}73205^2 &= 2{,}9999972025 &< 3 < 1{,}73206^2 &= 3{,}0000318436, \ldots,
\end{aligned}$$

welche die Lösung der Gleichung $x^2 = 3$, soweit sie im Gebiete der rationalen Zahlen möglich ist, enthalten.

In ähnlicher Weise hat uns das Kap. V, § 5 C, I, S. 242 u. 243 angegebene Verfahren auf die Ungleichungen geführt:

$$\begin{aligned}
10^{\frac{4}{16}} &< 2 < 10^{\frac{5}{16}},\\
10^{\frac{9}{32}} &< 2 < 10^{\frac{10}{32}},\\
10^{\frac{19}{64}} &< 2 < 10^{\frac{20}{64}},\\
10^{\frac{38}{128}} &< 2 < 10^{\frac{39}{128}},\\
10^{\frac{77}{256}} &< 2 < 10^{\frac{78}{256}} \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Die Exponenten von 10 in den aufeinander folgenden Ungleichungen sind der Ersatz für den im Gebiete der rationalen Zahlen nicht vorhandenen Logarithmus von 2 für die Basis 10.

Die durch die beiden Algorithmen erhaltenen Doppelreihen

$$\begin{pmatrix} 1{,}7; & 1{,}73; & 1{,}732; & 1{,}7320; & 1{,}73205; & \ldots \\ 1{,}8; & 1{,}74; & 1{,}733; & 1{,}7321; & 1{,}73206; & \ldots \end{pmatrix}$$

bezüglich

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{16}; & \frac{9}{32}; & \frac{19}{64}; & \frac{38}{128}; & \frac{77}{256}; \cdots \\ \frac{5}{16}; & \frac{10}{32}; & \frac{20}{64}; & \frac{39}{128}; & \frac{78}{256}; \cdots \end{pmatrix}$$

haben folgende Eigenschaften:

In dem ersten Teil der Doppelreihe ist jedes Glied größer als das vorhergehende oder gleich demselben, im zweiten Teil ist jedes Glied kleiner als das vorhergehende oder gleich demselben[1]). Irgend ein Glied der zweiten Hälfte ist größer als irgend eins der ersten, und der Unterschied zweier entsprechenden Glieder beider Hälften wird, je weiter man in der Reihe fortschreitet, immer kleiner und kann schließlich beliebig klein gemacht werden.

Wir betrachten nunmehr allgemein Doppelreihen

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, & \ldots \\ A_1, & A_2, & \ldots, & A_n, & \ldots \end{pmatrix},$$

die aus unbegrenzt vielen rationalen Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;\quad A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

bestehen, welche für alle Werte von n den Ungleichungen genügen:

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n,$$

während nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl δ sich stets eine ganze positive Zahl N so angeben läßt, daß für $n \geqq N$

$$A_n - a_n < \delta.$$

Eine derartige Doppelreihe wollen wir kurz durch das Symbol $(a_n; A_n)$ bezeichnen. Es kann vorkommen, daß zu einer bestimmten Doppelreihe $(a_n; A_n)$ sich eine rationale Zahl a derart finden läßt, daß für jeden beliebigen Wert von n

$$a_n \leqq a \leqq A_n.$$

Ist z. B.

$$a_n = 0,\overbrace{33\ \ldots\ 33}^{(n \text{ Dezimalstellen})} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^n}$$

und

$$A_n = 0,\overbrace{33\ \ldots\ 34}^{(n \text{ Dezimalstellen})} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10^n},$$

1) Reihen von dieser Beschaffenheit bezeichnet man als „monoton".

so hat man für alle Werte von n

$$a_n < a_{n+1} < \frac{1}{3} < A_{n+1} < A_n,$$

während

$$A_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann; also wird $a = \frac{1}{3}$. Niemals können zwei verschiedene rationale Zahlen a, a' zu einer Doppelreihe in dieser Beziehung stehen; denn aus

$$a_n \leqq a \leqq A_n \quad \text{und} \quad a_n \leqq a' \leqq A_n$$

würde für beliebige Werte von n folgen:

$$|a' - a| \leqq A_n - a_n.$$

Da sich die rechte Seite durch hinreichend große Werte von n beliebig klein machen läßt, kann die linke Seite keinen von Null verschiedenen Wert haben.

Jedesmal, wenn eine solche rationale Zahl a existiert, daß für alle Werte von n

$$a_n \leqq a \leqq A_n,$$

wollen wir diese Zahl a als Wert der Doppelreihe $(a_n;\ A_n)$ betrachten.

Umgekehrt lassen sich jeder rationalen Zahl a derartige Doppelreihen zuordnen; z. B. die Doppelreihe

$$(a;\ a) \quad \text{oder} \quad \left(a - \frac{1}{n};\quad a + \frac{1}{n}\right) \text{ usw.}$$

Nun gibt es aber auch Doppelreihen $(a_n;\ A_n)$, welchen keine rationale Zahl a derart entspricht, daß für alle n

$$a_n \leqq a \leqq A_n,$$

z. B. die vorher schon angeführte Doppelreihe, welche der Algorithmus zur Aufsuchung von Zahlen, die $\sqrt{3}$ ersetzen sollen, liefert. Gäbe es nämlich für diese Doppelreihe eine derartige rationale Zahl a, so würde aus

$$a_n \leqq a \leqq A_n$$

folgen:

$$a_n^2 \leqq a^2 \leqq A_n^2.$$

Da andererseits aber auch

$$a_n^2 < 3 < A_n^2,$$

so müßte

$$|a^2 - 3| < A_n^2 - a_n^2$$

für alle Werte von n sein. Die rechte Seite sinkt mit wachsendem n unter jede angebbare Größe, also könnte der feste Wert $|a^2 - 3|$ nur gleich Null sein, d. h., es gäbe eine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 3 wäre, was bereits (Kap. II, § 5 C, S. 92) als unmöglich nachgewiesen ist.

Auch von allen Doppelreihen $(a_n; A_n)$, bei welchen

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n$$

und $A_n - a_n$ durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann, ohne daß eine rationale Zahl existiert, die der Bedingung $a_n \leqq a \leqq A_n$ (für alle Werte von n) genügt, werden wir im folgenden zeigen, daß sie bei geeigneter Definition für die Gleichheit und für das Größer- bezüglich Kleinersein sich in eine bestimmte, feste Ordnung zueinander und zu den rationalen Zahlen bringen lassen, und daß bei passender Erklärung der Rechnungsarten man mit ihnen ebenso operieren kann wie mit den rationalen Zahlen. Wir bezeichnen deshalb diese Doppelreihen auch als Zahlen, und zwar, da sie eine rationale Zahl nicht zum Werte haben, als **„irrationale Zahlen"**. Die Auffassung solcher Doppelreihen als Zahlen ist natürlich ein willkürlicher Akt unseres Intellekts, welcher aber durch den § 8 ausführlich zu erbringenden Nachweis weiter gerechtfertigt werden wird, daß die so definierten irrationalen Zahlen ebenso wie zunächst die natürlichen und dann auch die gebrochenen und die negativen Zahlen das vollkommene Abbild gewisser Beziehungen zwischen Dingen der Außenwelt darstellen[1]). Es wird sich als möglich erweisen,

1) G. Cantor (Math. Ann. Bd. 21, S. 562) unterscheidet zwei Arten, in denen von der Realität der Zahlbegriffe gesprochen werden kann. Einmal, sagt er, dürfen wir die Zahlen insofern als wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserm Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandteilen unseres Denkens aufs beste unterschieden werden und zu ihnen in bestimmter Beziehung stehen. Diese Art der Realität bezeichnet Cantor als immanente. Dann könne aber auch den Zahlen insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellekt gegenüberstehenden Außenwelt gehalten werden müssen. Diese zweite Art der Realität nennt Cantor die transiente. Der oben angedeutete Nachweis wird uns die Überzeugung verschaffen, daß den jetzt definierten irrationalen Zahlen in diesem Sinne nicht nur die immanente, sondern auch die transiente Realität zukommt. Vgl. hierzu auch H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, § 2, S. 7.

z. B. beliebigen Strecken $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ irrationale Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ derart zuzuordnen, daß, wenn im geometrischen Sinne $\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{B}$, auch in dem von uns noch zu definierenden Sinne $\alpha \gtreqless \beta$, und daß, wenn $\mathfrak{C}$ die geometrische Summe der Strecken $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ darstellt, auch $\gamma = \alpha + \beta$ usw.

Wir beginnen jetzt mit der Einordnung der Doppelreihen in die Reihe der rationalen Zahlen. Es sei zunächst $(a_n;\ A_n)$ eine Doppelreihe, die den rationalen Wert a besitzt. Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß irgend eine rationale Zahl r kleiner als dieser rationale Wert a ist, besteht darin, daß r kleiner ist als alle a_n von einem bestimmten Werte des Index n an; die hinreichende und notwendige Bedingung für $r > a$ besteht darin, daß r größer ist als alle A_n von einem bestimmten Werte des Index an, und endlich die hinreichende und notwendige Bedingung für $r = a$ ist, daß für alle Werte von n gleichzeitig $r \geqq a_n$ und $r \leqq A_n$. Daß diese Bedingungen hinreichend sind, ist selbstverständlich; daß sie auch notwendig sind, ergibt sich in folgender Weise. Durch genügend große Werte von n kann die Differenz $a - a_n$ kleiner als irgend eine angebbare positive Zahl, demnach, wenn $r < a$, auch kleiner als $a - r$ gemacht werden. Aus $a - a_n < a - r$ folgt aber $r < a_n$. Ebenso kann die Differenz $A_n - a$ durch Wahl eines genügend großen Wertes von n beliebig klein gemacht werden, also, falls $r > a$, auch kleiner als $r - a$, woraus sich $r > A_n$ ergibt.

Wenn nunmehr $(a_n;\ A_n)$ eine Doppelreihe ohne rationalen Wert, also eine irrationale Zahl ist, die wir mit α bezeichnen wollen[1]), so definieren wir jetzt die Größenbeziehungen zwischen α und irgend einer rationalen Zahl r durch diejenigen Relationen zwischen r und a_n, A_n, welche wir soeben als hinreichend und notwendig für die betreffenden Größenbeziehungen zwischen r und einer Doppelreihe $(a_n; A_n)$ von rationalem Werte nachgewiesen haben, d. h., wir wollen dann und nur dann $r < \alpha$ nennen, wenn r kleiner ist als alle a_n von irgend einem bestimmten Werte des Index an, dann und nur dann $r > \alpha$, wenn r größer ist als alle A_n von irgend einem Werte des Index an. Hieraus folgt sofort, daß die irrationale Zahl α größer ist als alle Glieder a_n des ersten Teils der sie definierenden Doppelreihe und kleiner als alle Zahlen A_n des zweiten Teils dieser Doppelreihe.

Zwei irrationale Zahlen $(a_n;\ A_n) = \alpha$ und $(b_n;\ B_n) = \beta$ sollen einander gleich heißen, wenn jede rationale Zahl, die kleiner (bezüglich größer) als α ist, auch kleiner (bezüglich größer) als β ist,

---

1) Die irrationalen Zahlen werden wir in diesem Kapitel im allgemeinen durch griechische, die rationalen Zahlen durch lateinische Buchstaben bezeichnen.

und jede rationale Zahl, die kleiner (bezüglich größer) als β ist, auch kleiner (bezüglich größer) als α ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn es keine rationale Zahl gibt, die kleiner als die eine und größer als die andere irrationale Zahl ist.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort der Satz, daß, wenn $\beta = \alpha$ und $\alpha = \gamma$, auch $\beta = \gamma$ ist. Denn aus $\beta = \alpha$ folgt, daß jede rationale Zahl r, die kleiner als β ist, auch kleiner als α sein muß, und aus $\alpha = \gamma$ ergibt sich weiter, daß sie auch kleiner als γ ist. Ebenso sieht man, daß jede rationale Zahl, die kleiner als γ, auch kleiner als β sein muß, woraus $\beta = \gamma$ folgt.

Wenn es eine rationale Zahl r gibt, die größer als α und gleichzeitig kleiner als β ist, so sagen wir, α sei kleiner als β oder β größer als α. Alsdann kann es nicht etwa eine andere rationale Zahl r' geben, so daß $r' < \alpha$ und $r' > \beta$; vielmehr ist dann jede rationale Zahl r', die kleiner als α ist, auch kleiner als β. Denn aus $r' < \alpha$ folgt $r' < a_n$ von einem bestimmten Werte von n an, aus $r > \alpha$ ergibt sich aber $r > A_n$ von einem bestimmten Werte des Index an. Da nun alle A_n größer als irgend ein a_n sind, so muß $r > r'$, wegen $r < \beta$ also auch $r' < \beta$ sein. Ebenso folgt, daß jede rationale Zahl, die größer als β, auch größer als α ist. Die Definition für die Größenbeziehung zweier irrationalen Zahlen ist also wirklich eine bestimmte. Aus ihr erschließt man leicht den Satz, daß, wenn $\alpha > \beta$ und $\beta > \gamma$, notwendig $\alpha > \gamma$ sein muß. Die Voraussetzung ergibt nämlich die Existenz rationaler Zahlen r und r', so daß $\alpha > r > \beta$ und $\beta > r' > \gamma$, woraus zunächst $r > r'$ und dann $\alpha > \gamma$ folgt.

Durch die getroffenen Festsetzungen sind nunmehr die irrationalen Zahlen in eine bestimmte Ordnung zueinander und zu den rationalen Zahlen gebracht. Beide Kategorien von Zahlen bilden vereinigt die Gesamtheit der reellen Zahlen. Jede reelle Zahl kann als Wert einer Doppelreihe angesehen werden.

Aus den für die Gleichheit und die Ungleichheit zweier irrationalen Zahlen aufgestellten Definitionen können wir noch Kriterien herleiten, welche es gestatten, die Frage der Gleichheit bezüglich Ungleichheit ausschließlich mittels derjenigen rationalen Zahlen zu entscheiden, welche bereits in den die irrationalen Zahlen definierenden Doppelreihen vorkommen. Wenn $\alpha = (a_n; A_n)$ und $\beta = (b_{n'}; B_{n'})$ und wenn jedes a_n kleiner als irgend ein $B_{n'}$ ist, so können wir zunächst den Schluß ziehen, daß α nicht größer als β sein kann. Denn wäre etwa $\alpha > \beta$, so müßte eine rationale Zahl r existieren, so daß $r < \alpha$ und $r > \beta$; es müßte also einerseits r kleiner sein als alle a_n von einem bestimmten Werte des Index an und andrerseits größer als alle $B_{n'}$ von einem bestimmten Werte des Index an. Diese Folgerung steht aber mit der gemachten Voraussetzung in Widerspruch; falls $a_n < B_{n'}$

(für alle Werte von n, n'), kann also nur $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ sein. Ebenso ergibt sich aus $b_{n'} < A_n$ (für alle Werte von n, n'), daß entweder $\beta < \alpha$ oder $\beta = \alpha$. Wenn nun für alle Werte n, n' gleichzeitig $a_n < B_{n'}$ und $b_{n'} < A_n$, so muß $\alpha = \beta$ sein. Umgekehrt schließt man leicht aus $\alpha = \beta$, daß für alle Werte n, n' notwendig $a_n < B_{n'}$ und $b_{n'} < A_n$ ist; denn es ist jedes $a_n < \alpha$, also nach der für die Gleichheit zweier irrationalen Zahlen aufgestellten Definition auch jedes $a_n < \beta$; nun ist aber β kleiner als irgend ein $B_{n'}$, folglich $a_n < B_{n'}$; ebenso ergibt sich $b_{n'} < A_n$[1]).

Die hinreichende und notwendige Bedingung für $\alpha > \beta$ besteht darin, daß für genügend große Werte von n, n' auch $a_n > B_{n'}$; denn, wenn $\alpha > \beta$, so gibt es eine rationale Zahl r derart, daß $\alpha > r > \beta$, also für hinreichend große Werte von n, n' einerseits $a_n > r$ und andererseits $r > B_{n'}$, woraus $a_n > B_{n'}$ folgt. Weiß man umgekehrt, daß $a_n > B_{n'}$ für genügend große Werte von n, n', so ergibt sich aus den Ungleichungen $\alpha > a_n$, $a_n > B_{n'}$, $B_{n'} > \beta$, daß $\alpha > \beta$ sein muß.

Ein und dieselbe irrationale Zahl kann der Wert von mehreren Doppelreihen sein, deren Glieder voneinander verschieden sind. Es läßt sich aber jede irrationale Zahl durch eine eindeutig bestimmte Doppelreihe darstellen, z. B. so, daß die Glieder systematische Brüche mit einer beliebig gewählten Grundzahl g sind, jedes Glied eine Stelle mehr enthält als das vorhergehende und die Differenz zweier entsprechenden Glieder beider Hälften eine Einheit der letzten Stelle beträgt. Ist die irrationale Zahl α durch die Doppelreihe $(a_n; A_n)$ gegeben, so können wir nach Annahme einer beliebigen positiven ganzen Zahl ν den Index n so groß wählen, daß $A_n - a_n < \frac{1}{g^\nu}$. Man bestimme nun die positive ganze Zahl b_ν derart, daß $\frac{b_\nu}{g^\nu} \leq a_n < \frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$, also $A_n < \frac{b_\nu + 2}{g^\nu}$. Es ist dann $\frac{b_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{b_\nu + 2}{g^\nu}$. Man hat jetzt noch α mit $\frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$ zu vergleichen; je nachdem $\alpha \lessgtr \frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$, ist $\frac{b_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{b_\nu + 1}{g^\nu}$ oder $\frac{b_\nu + 1}{g^\nu} < \alpha < \frac{b_\nu + 2}{g^\nu}$. Damit haben wir α zwischen zwei Brüche eingeschlossen, deren Nenner g^ν sind, und deren eindeutig bestimmte Zähler sich um 1 unterscheiden. Bezeichnen wir den kleineren der beiden Zähler jetzt mit c_ν (also entweder $c_\nu = b_\nu$ oder $c_\nu = b_\nu + 1$),

---

1) Wenn die beiden Doppelreihen $(a_n; A_n)$ und $(b_{n'}; B_{n'})$ die rationalen Werte a bezüglich b haben, so kann von einem gewissen Werte des Index n an stets $a_n = a$ und von einem gewissen Werte des Index n' an stets $B_{n'} = b$ sein. Alsdann würde aus $a = b$ für die betreffenden Werte der Indices $a_n = B_{n'}$ folgen. Von diesem Falle abgesehen, gilt das oben angegebene Kriterium auch für Doppelreihen von rationalen Werten.

so ist $\frac{c_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}$. Indem wir diese Rechnung für alle positiven ganzzahligen Werte von ν und für $\nu = 0$ ausgeführt denken, erhalten wir die Doppelreihe $\left(\frac{c_\nu}{g^\nu};\ \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}\right)$, die wegen der für alle Werte von ν geltenden Ungleichungen $\frac{c_\nu}{g^\nu} < \alpha < \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}$ tatsächlich gleich der vorgelegten irrationalen Zahl α ist. Daß die beiden Doppelreihen

$$\left(\frac{c_\nu}{g^\nu};\ \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d_\nu}{g^\nu};\ \frac{d_\nu + 1}{g^\nu}\right),$$

deren Glieder systematische Brüche mit derselben Grundzahl g sind, nur dann dieselbe irrationale Zahl darstellen können, wenn $c_\nu = d_\nu$ für alle Werte von ν, ist leicht zu erkennen.

Wir dürften uns also jede irrationale Zahl auf die Form

$$\left(\frac{c_\nu}{g^\nu};\ \frac{c_\nu + 1}{g^\nu}\right)$$

gebracht denken und uns dementsprechend bei der weiteren Behandlung der irrationalen Zahlen auf Doppelreihen dieser Art beschränken. Da jedoch für diese speziellen Doppelreihen die Erklärung der Rechenoperationen sich umständlicher gestaltet als für die allgemeinen, ziehen wir es vor, die letzteren beizubehalten. Wir haben aber dann die Verpflichtung, bei jeder Rechenoperation nachzuweisen, daß das Resultat ungeändert bleibt, wenn man eine der auftretenden Doppelreihen durch eine andere von gleichem Werte ersetzt.

§ 2. Addition.

Es seien $(a_n;\ A_n) = \alpha$ und $(b_n;\ B_n) = \beta$ zwei irrationale Zahlen. Wir zeigen zunächst, daß die Doppelreihe $(a_n + b_n;\ A_n + B_n)$, welche entsteht, wenn wir je zwei entsprechende Glieder[1]) der vorgelegten Doppelreihen addieren, die zur Definition einer bestimmten Zahl erforderlichen Eigenschaften[2]) besitzt.

Aus

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n$$

und

$$b_n \leqq b_{n+1} < B_{n+1} \leqq B_n$$

folgt:

$$a_n + b_n \leqq a_{n+1} + b_{n+1} < A_{n+1} + B_{n+1} \leqq A_n + B_n.$$

---

1) Man würde zu einer Doppelreihe von gleichem Werte gelangen, wenn man jedes a zu jedem b und jedes A zu jedem B addierte.

2) Siehe S. 295 u. 297.

Die Differenz

$$A_n + B_n - (a_n + b_n) = (A_n - a_n) + (B_n - b_n)$$

sinkt mit wachsendem n unter jeden angebbaren Wert, weil durch genügend große Werte von n sowohl $A_n - a_n$ als auch $B_n - b_n$ beliebig klein gemacht werden kann. Die Doppelreihe $(a_n + b_n; A_n + B_n)$ definiert also tatsächlich eine bestimmte Zahl, und diese Zahl wollen wir die Summe von α und β nennen. Um die Bezeichnung zu rechtfertigen, ist nachzuweisen, daß

I. die neu definierte Summe mit der im Bereiche der rationalen Zahlen definierten übereinstimmt, wenn $(a_n; A_n)$ und $(b_n; B_n)$ rational sind;

II. sie ungeändert bleibt, wenn eine der beiden Zahlen α, β durch eine gleiche ersetzt wird;

III. das kommutative und das assoziative Gesetz[1]) auch für den neuen Summenbegriff gültig sind.

I. Wenn

$$(a_n; A_n) = r \quad \text{und} \quad (b_n; B_n) = r'$$

rationale Zahlen darstellen, wenn also für alle positiven ganzzahligen Werte von n:

$$a_n \leqq r \leqq A_n,$$

$$b_n \leqq r' \leqq B_n,$$

so ist auch für alle diese n

$$a_n + b_n \leqq r + r' \leqq A_n + B_n;$$

d. h., die Doppelreihe $(a_n + b_n; A_n + B_n)$ ist gleich der im früher definierten Sinne genommenen Summe der rationalen Zahlen r und r'.

II. Die hinreichende und notwendige Bedingung[2]) für die Gleichheit der beiden irrationalen Zahlen

$$\beta = (b_{n'}; B_{n'}) \quad \text{und} \quad \gamma = (c_{n''}; C_{n''})$$

besteht in den Ungleichungen

$$b_{n'} < C_{n''},$$

$$c_{n''} < B_{n'}$$

1) Siehe Kap. I, § 3 B, S. 9.
2) Siehe S. 300.

(für alle positiven ganzzahligen Werte von n', n''), aus welchen sofort

$$a_n + b_{n'} < A_n + C_{n''},$$

$$a_n + c_{n''} < A_n + B_{n'},$$

also

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$$

folgt.

Zusatz: Aus $\beta > \gamma$ erschließt man leicht mittels des S. 300 gegebenen Kriteriums die Ungleichung

$$\alpha + \beta > \alpha + \gamma,$$

so daß sich aus

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$$

mit Notwendigkeit

$$\beta = \gamma$$

ergibt.

III. Da

$$a_n + b_n = b_n + a_n \quad \text{und} \quad A_n + B_n = B_n + A_n,$$

so ist auch

$$(a_n + b_n;\ A_n + B_n) = (b_n + a_n;\ B_n + A_n),$$

d. h.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Ebenso findet man

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \gamma + \beta.$$

§ 3. Subtraktion.

Auf die Subtraktion führt die Aufgabe, zu zwei gegebenen Zahlen $(a_n;\ A_n) = \alpha$ und $(b_n;\ B_n) = \beta$ eine dritte Zahl δ zu finden, so daß

$$\beta + \delta = \alpha.$$

Mittels des Kriteriums für die Gleichheit zweier irrationalen Zahlen[1]) überzeugt man sich leicht, daß

$$(b_n;\ B_n) + (a_n - B_n;\ A_n - b_n) = (a_n;\ A_n),$$

also

$$\delta = (a_n - B_n;\ A_n - b_n).$$

Daß die letzte Doppelreihe eine bestimmte Zahl darstellt, ergibt sich wie in § 2 für $(a_n + b_n;\ A_n + B_n)$; daß die Gleichung $\beta + \delta = \alpha$ nur e i n e Lösung haben kann, folgt aus § 2, II, Zusatz.

1) Siehe S. 300.

Die Zahl $(a_n - B_n;\ A_n - b_n)$ nennen wir die Differenz der Zahlen $(a_n;\ A_n)$ und $(b_n;\ B_n)$, und wir schreiben:

$$(a_n;\ A_n) - (b_n;\ B_n) = (a_n - B_n;\ A_n - b_n).$$

Sind

$$(a_n;\ A_n) = r \quad \text{und} \quad (b_n;\ B_n) = r'$$

rationale Zahlen, so folgt aus

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leqq r \leqq A_n \\ B_n \geqq r' \geqq b_n \end{array}\right\} \text{ (für alle Werte von } n\text{)},$$

daß

$$a_n - B_n \leqq r - r' \leqq A_n - b_n;$$

die Doppelreihe $(a_n - B_n;\ A_n - b_n)$ stellt also in diesem Falle die im früher definierten Sinne genommene Differenz der rationalen Zahlen r und r' dar.

Wenn

$$\alpha = \beta,$$

so ist für alle Werte von n

$$a_n < B_n, \quad b_n < A_n,$$

also

$$a_n - B_n < 0 < A_n - b_n,$$

d. h.,

$$\alpha - \beta = (a_n - B_n;\ A_n - b_n)$$

hat den Wert Null. Da die Differenz der positiven Zahl $A_n - b_n$ und der negativen Zahl $a_n - B_n$ durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann, so gilt dasselbe auch von $A_n - b_n$ und $|a_n - B_n|$.

Wenn

$$\alpha > \beta,$$

so ist für hinreichend große Werte von n

$$a_n > B_n,$$

woraus sofort $\alpha - \beta > 0$ folgt.

Ebenso ergibt sich aus

$$\alpha < \beta,$$

daß

$$\alpha - \beta < 0.$$

Nennen wir auch jede irrationale Zahl, die größer als Null, positiv und jede irrationale Zahl, die kleiner als Null, negativ, so heißt das

also, $\alpha - \beta$ ist positiv oder negativ, je nachdem α größer oder kleiner als β ist.

Jede negative Zahl $(d_n; D_n)$ kann auch in der Form

$$-(-D_n; -d_n)$$

geschrieben werden, wo

$$(-D_n; -d_n) > 0.$$

Die Gleichungen

$$\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$$

usw. folgen unmittelbar aus den für rationale Zahlen geltenden

$$a_n - (B_n + C_n) = a_n - B_n - C_n,$$

$$A_n - (b_n + c_n) = A_n - b_n - c_n \quad \text{usw.}$$

Wir wissen bereits (S. 298), daß für jeden Wert von ν

$$a_\nu < \alpha < A_\nu.$$

Die Differenz

$$\alpha - a_\nu = (a_n - a_\nu; A_n - a_\nu)$$

kann, wenn ν genügend groß gewählt wird, kleiner als jede beliebig klein gegebene positive Zahl gemacht werden, weil bei hinreichend großen Werten von n dasselbe von $A_n - a_\nu$ gilt. Ebenso sinkt für genügend große Werte von ν die Differenz $A_\nu - \alpha$ unter jede beliebig klein gegebene positive Zahl. Wir sind deshalb berechtigt, die Zahl α als Grenze sowohl der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wie der Reihe $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und diese Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots; A_1, A_2, A_3, \ldots$ als Näherungswerte von α zu bezeichnen[1]).

§ 4. Multiplikation.

Es seien

$$\alpha = (a_n; A_n), \quad \beta = (b_n; B_n)$$

zwei positive irrationale Zahlen, beide kleiner als eine rationale Zahl r. Indem wir n von vornherein auf hinreichend große Werte beschränken, können wir es erreichen, daß in den Doppelreihen nur positive Glieder vorkommen.

1) Von Näherungswerten einer irrationalen Zahl konnten wir selbstverständlich so lange nicht reden, wie wir nicht die irrationale Zahl selbst definiert hatten.

Wir beginnen mit dem Nachweis, daß die Doppelreihe $(a_n b_n; A_n B_n)$ eine bestimmte Zahl definiert. Aus

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n,$$
$$b_n \leqq b_{n+1} < B_{n+1} \leqq B_n$$

folgt:

$$a_n b_n \leqq a_{n+1} b_{n+1} < A_{n+1} B_{n+1} \leqq A_n B_n.$$

Ferner ist:

$$A_n B_n - a_n b_n = (A_n - a_n) B_n + (B_n - b_n) a_n.$$

Da $a_n < r$ und für hinreichend große Werte von n auch $B_n < r$, folgt weiter:

$$A_n B_n - a_n b_n < r[(A_n - a_n) + (B_n - b_n)].$$

Durch Vergrößerung von n kann die rechte Seite der Ungleichung und daher auch die linke beliebig klein gemacht werden.

Die somit als existierend nachgewiesene Zahl $(a_n b_n; A_n B_n)$ definieren wir als das **Produkt** der beiden Zahlen $(a_n; A_n)$ und $(b_n; B_n)$.

Multiplizieren wir z. B. die Doppelreihe

$$(1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732; \ldots;\ 1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733; \ldots),$$

auf welche uns der Algorithmus zur Berechnung solcher Zahlen geführt hat, deren Quadrat nahezu gleich 3 ist (siehe S. 294), mit sich selbst, so erhalten wir:

$$(1{,}7^2;\ 1{,}73^2;\ 1{,}732^2; \ldots;\ 1{,}8^2;\ 1{,}74^2;\ 1{,}733^2; \ldots).$$

Da in dieser letzteren Doppelreihe jedes Glied der ersten Hälfte kleiner als 3, jedes Glied der zweiten Hälfte größer als 3 ist, hat sie selbst den rationalen Wert 3, so daß die durch die Doppelreihe (1,7; 1,73; 1,732; . . .; 1,8; 1,74; 1,733; . . .) definierte irrationale Zahl in aller Strenge die im rationalen Gebiete nicht vorhandene Quadratwurzel aus 3 darstellt. Nach der Bemerkung am Schlusse des vorigen Paragraphen dürfen wir jetzt die Zahlen 1,7; 1,73; 1,732; . . . oder auch 1,8; 1,74; 1,733; . . . als Näherungswerte von $\sqrt{3}$ bezeichnen und auch behaupten, daß z. B.

$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733.$$

Sind die beiden Doppelreihen $(a_n; A_n)$ und $(b_n; B_n)$ rational, so stellt $(a_n b_n; A_n B_n)$ das im früher definierten Sinne genommene Produkt dar; Beweis wie in § 2, S. 302.

Die Formeln

$$\alpha\beta = \beta\alpha;\ \alpha\beta\gamma = \alpha\gamma\beta;\quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

folgen unmittelbar aus den entsprechenden für rationale Zahlen.

Wenn

$$\zeta = (z_n;\ Z_n) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = (a_n;\ A_n)$$

irgend eine endliche positive Zahl ist, so hat man für alle Werte von n, für die $a_n > 0$,

$$a_n z_n < 0$$

und für alle n

$$A_n Z_n > 0,$$

also

$$\alpha \zeta = 0.$$

Wenn dagegen

$$\alpha = (a_n;\ A_n), \quad \beta = (b_n;\ B_n)$$

bezüglich größer sind als die positiven, von Null verschiedenen Zahlen r, r', so folgt aus

$$\left.\begin{array}{l} r < a_n \\ r' < b_n \end{array}\right\} \text{ (für hinreichend große Werte von } n\text{)},$$

daß

$$rr' < a_n b_n,$$

$\alpha\beta$ also eine von Null verschiedene positive Zahl ist.

Es sei ferner $\alpha = (a_n;\ A_n)$ wieder eine beliebige positive Zahl und $\varepsilon = (e_n;\ E_n) = 1$, also $e_n < 1 < E_n$. Dann ist

$$\alpha\varepsilon = (a_n e_n;\ A_n E_n) = (a_n;\ A_n) = \alpha,$$

weil $a_n e_n < A_n$ und $a_n < A_n E_n$. (Siehe das Kriterium für die Gleichheit zweier irrationalen Zahlen S. 300.)

Sind α, β, γ positive Zahlen und $\beta > \gamma$, so ist $\alpha\beta > \alpha\gamma$. Aus $\beta > \gamma$ folgt nämlich (vgl. § 3), daß die der Gleichung $\beta = \gamma + \delta$ genügende Zahl δ positiv ist. Da nun $\alpha\beta = \alpha\gamma + \alpha\delta$ und $\alpha\delta > 0$, so ergibt sich $\alpha\beta > \alpha\gamma$. Wenn insbesondere $\gamma = 1$, so folgt für $\alpha > 0$, $\beta > 1$, daß $\alpha\beta > \alpha$; wenn $\beta = 1$, so folgt für $\alpha > 0$, $\gamma < 1$, daß $\alpha\gamma < \alpha$.

Wir haben uns bisher auf die Multiplikation positiver Zahlen beschränkt. Ist einer der Faktoren oder sind beide Faktoren negativ, so setzen wir den absoluten Wert des Produkts gleich dem Produkt der absoluten Werte der Faktoren und bestimmen das Vorzeichen nach den für die Multiplikation relativer Zahlen (Kap. IV, § 5 A) aufgestellten Regeln.

§ 5. Division.

$\alpha = (a_n;\ A_n)$ und $\beta = (b_n;\ B_n)$ seien positive Zahlen, von denen α kleiner als eine positive rationale Zahl r und β größer als eine

positive, von Null verschiedene Zahl r' sei. Es soll die Zahl ξ gefunden werden, welche der Gleichung

$$\beta \xi = \alpha$$

genügt. Daß es nicht mehr als eine solche Zahl geben kann, folgt daraus, daß, wenn $\xi' \gtrless \xi$, auch $\beta \xi' \gtrless \beta \xi$ (siehe § 4). Wir behaupten, daß die Gleichung durch die Doppelreihe $\left(\frac{a_n}{B_n}; \frac{A_n}{b_n}\right)$ erfüllt wird.

Es ist zunächst zu zeigen, daß diese Doppelreihe eine bestimmte Zahl darstellt.

Da

$$a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n$$

und

$$B_n \geqq B_{n+1} > b_{n+1} \geqq b_n,$$

so folgt[1]):

$$\frac{a_n}{B_n} \leqq \frac{a_{n+1}}{B_{n+1}} < \frac{A_{n+1}}{b_{n+1}} \leqq \frac{A_n}{b_n}.$$

Die Differenz

$$\frac{A_n}{b_n} - \frac{a_n}{B_n} = \frac{A_n B_n - a_n b_n}{b_n B_n} = \frac{(A_n - a_n) B_n + (B_n - b_n) a_n}{b_n B_n}$$

sinkt mit wachsendem n unter jede angebbare Größe, da der Zähler beliebig klein gemacht werden kann, der Nenner für hinreichend große Werte von n aber größer als r'^2 bleibt.

Weiter ist das Produkt

$$(b_n; B_n) \cdot \left(\frac{a_n}{B_n}; \frac{A_n}{b_n}\right) = \left(a_n \cdot \frac{b_n}{B_n}; A_n \cdot \frac{B_n}{b_n}\right) = (a_n; A_n),$$

weil für alle n

$$a_n \cdot \frac{b_n}{B_n} < A_n$$

und

$$a_n < A_n \cdot \frac{B_n}{b_n}.$$

Die Zahl $\left(\frac{a_n}{B_n}; \frac{A_n}{b_n}\right)$, welche also tatsächlich die Lösung der Gleichung $\beta \xi = \alpha$ darstellt, bezeichnen wir als den Quotienten $\alpha : \beta$ oder $\frac{\alpha}{\beta}$.

Daß, wenn α und β rationale Zahlen sind, der neu eingeführte Begriff des Quotienten mit dem für rationale Zahlen definierten identisch ist, ergibt sich wie in den §§ 2, 3, 4.

1) Wie in § 4 denken wir uns n von vornherein auf so große Werte beschränkt, daß $a_n > 0$, $b_n > 0$. A_n und B_n sind für alle Werte von n positiv.

Aus den Ungleichungen am Schlusse des § 4 folgt unmittelbar, daß, je nachdem $\alpha \gtreqless \beta$, $\frac{\alpha}{\beta} \gtreqless 1$.

Daß die für rationale Quotienten bestehenden Relationen auch für Quotienten irrationaler Zahlen gültig bleiben, wollen wir nur an dem Beispiel der Formel

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}$$

(unter der Voraussetzung $\alpha > \beta$) zeigen.

Nach den angegebenen Rechnungsvorschriften findet man

$$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} = \left(\frac{a_n - B_n}{C_n};\ \frac{A_n - b_n}{c_n}\right)$$

und

$$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \left(\frac{a_n}{C_n} - \frac{B_n}{c_n};\ \frac{A_n}{c_n} - \frac{b_n}{C_n}\right).$$

Da

$$\frac{a_n}{C_n} - \frac{B_n}{C_n} < \frac{A_n}{c_n} - \frac{b_n}{C_n}$$

und

$$\frac{a_n}{C_n} - \frac{B_n}{c_n} < \frac{A_n}{c_n} - \frac{b_n}{c_n},$$

sind die rechten, also auch die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen einander gleich.

Wenn Dividend und Divisor nicht beide positiv sind, so dividiert man den absoluten Wert des ersteren durch den des letzteren und bestimmt das Vorzeichen des Quotienten nach den für die Division relativer Zahlen (Kap. IV, § 6) geltenden Vorzeichenregeln.

§ 6. Berechnung von rationalen Funktionen irrationaler Zahlen.

Ist aus mehreren irrationalen Zahlen $\alpha = (a_n;\ A_n)$, $\beta = (b_n;\ B_n)$ usw. durch wiederholte Anwendung der vier Grundrechnungsarten eine neue Zahl $\xi = (x_n;\ X_n)$ zu berechnen, etwa $\xi = \frac{\alpha + \beta}{\gamma(\delta - \varepsilon)}$, so hat man nach den in den §§ 2—5 gegebenen Regeln die erste mit der zweiten, das Ergebnis mit der dritten usw. zu verknüpfen. Für das obige Beispiel erhält man so:

$$\alpha + \beta = (a_n + b_n;\ A_n + B_n),$$

$$\gamma(\delta - \varepsilon) = [c_n(d_n - E_n);\ C_n(D_n - e_n)],$$

$$\xi = \left[\frac{a_n + b_n}{C_n(D_n - e_n)};\ \frac{A_n + B_n}{c_n(d_n - E_n)}\right].$$

Bei jeder numerisch durchzuführenden Rechnung ist von den eine irrationale Zahl α definierenden Reihengliedern a_n, A_n natürlich immer nur eine beschränkte Anzahl bekannt, bezüglich durch einen Algorithmus (wie den der Wurzelausziehung) bestimmbar. Es lassen sich aber stets solche a_n, A_n finden, die sich von α um weniger als eine beliebig kleine vorgeschriebene positive Zahl unterscheiden. Ersetzt man nun in der zu berechnenden rationalen Funktion die gegebenen irrationalen Zahlen dann, wenn sie als Summanden, Faktoren, Minuenden, Dividenden auftreten, durch ihre unteren Näherungswerte, dann, wenn sie als Subtrahenden oder Divisoren vorkommen, durch ihre oberen Näherungswerte (eine Zahl, die in einem Divisor Subtrahend oder in einem Subtrahenden Divisor ist, durch einen unteren Näherungswert), so erhält man eine rationale Zahl x_n, im obigen Beispiel $x_n = \frac{a_n + b_n}{C_n(D_n - e_n)}$, die kleiner als die gesuchte Zahl ξ ist. Bestimmt man noch in analoger Art die rationale Zahl X_n, im obigen Beispiel $X_n = \frac{A_n + B_n}{c_n(d_n - E_n)}$, die größer als ξ ist, so hat man die gesuchte Zahl zwischen zwei rationale Grenzen eingeschlossen, deren Unterschied durch geeignete Wahl der verwendeten Näherungswerte beliebig klein gemacht werden kann. Wie weit man die Genauigkeit in den Näherungswerten zu treiben hat, um eine vorgeschriebene Genauigkeit des Resultats zu erzielen, ist bereits Kap. III, § 8 B auseinandergesetzt.

§ 7. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren.

A. Doppelreihen, deren Glieder irrationale Zahlen sind.

Um eine Potenz auch für irrationale Werte des Exponenten definieren zu können, beweisen wir den

Satz: Zu jeder aus unbegrenzt vielen **irrationalen** Zahlen bestehenden Doppelreihe $(\alpha_n;\ A_n)$, für welche

$$\alpha_n < \alpha_{n+1} < A_{n+1} < A_n$$

bei allen Werten von n und

$$A_n - \alpha_n$$

beliebig klein bei hinreichend großen Werten von n ist, gehört stets eine einzige, bestimmte (rationale oder irrationale) Zahl ϱ, so daß

$$\alpha_n < \varrho < A_n$$

für alle Werte von n.

Diese Zahl ϱ betrachten wir (in Übereinstimmung mit § 1, S. 296 u. S. 297) als den Wert der Doppelreihe $(\alpha_n;\ A_n)$.

Beweis: Die Ungleichungen

$$\alpha_n < \alpha_{n+1} < \alpha_{n+2}; \quad A_n > A_{n+1} > A_{n+2}$$

besagen nach § 1, S. 299, daß rationale Zahlen r_n, r_{n+1}, R_n, R_{n+1} existieren, die den Relationen genügen:

$$\alpha_n < r_n < \alpha_{n+1} < r_{n+1} < \alpha_{n+2}; \quad A_n > R_n > A_{n+1} > R_{n+1} > A_{n+2},$$

aus denen für alle Werte von n folgt:

$$r_n < r_{n+1} \quad \text{sowie } R_n > R_{n+1},$$

und da $\alpha_{n+1} < A_{n+1}$, ist auch

$$r_n < R_n.$$

Weil

$$\alpha_n < r_n < R_n < A_n$$

und die Differenz $A_n - \alpha_n$ nach Voraussetzung durch hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann, gilt das Gleiche auch von $R_n - r_n$. Damit ist gezeigt, daß die Doppelreihe $(r_n; R_n)$ die zur Definition einer bestimmten Zahl ϱ erforderlichen Eigenschaften besitzt. Aus

$$\alpha_n < r_n \leqq \varrho \leqq R_n < A_n$$

ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

Während also die aus rationalen Zahlen bestehenden Doppelreihen im allgemeinen über den rationalen Zahlenbereich hinausführen, gelangt man durch die jetzt betrachteten Doppelreihen mit irrationalen Gliedern nicht etwa wieder zu neuen Zahlen.

Zusatz 1: Die im Beweise eingeführten Zahlen r_n, R_n sind nicht eindeutig bestimmt. Nimmt man jedoch statt ihrer andere, r_n', R_n', welche denselben Ungleichungen genügen, so erkennt man leicht, daß

$$(r_n'; R_n') = (r_n; R_n) = \varrho.$$

Zusatz 2: Behält in der Doppelreihe $(\alpha_n; A_n)$ von einem bestimmten Werte des Index n an entweder α_n oder A_n stets denselben Wert, so ist im ersten Falle ϱ die größte Zahl der ersten Hälfte, im andern ϱ die kleinste Zahl in der zweiten Hälfte der Doppelreihe.

Zusatz 3: Die Rechenoperationen lassen sich an Doppelreihen aus irrationalen Zahlen ebenso ausführen wie an denen aus rationalen Zahlen. Bedeuten wieder α_n, A_n, α_n', A_n' irrationale, r_n, R_n, r_n', R_n' rationale Zahlen, und ist

$$(\alpha_n; A_n) = (r_n; R_n) = \varrho; \quad (\alpha_n'; A_n') = (r_n'; R_n') = \varrho',$$

so hat man z. B.:

$$\varrho + \varrho' = (\alpha_n + \alpha_n'; \; A_n + A_n'),$$
$$\varrho\varrho' = (\alpha_n \alpha_n'; \; A_n A_n') \quad \text{usw.}$$

Die Beweise sind leicht zu führen.

Ferner ist dann und nur dann

$$(\alpha_n; \; A_n) = (\alpha_n'; \; A_n'),$$

wenn für alle Werte von n

$$\alpha_n < A_n', \quad \alpha_n' < A_n.$$

B. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Aus der Definition des Produktes zweier irrationalen Zahlen (§ 4) folgt unmittelbar, wenn $\alpha = (a_n; \; A_n)$ eine irrationale und m eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\alpha^m = (a_n^m; \; A_n^m)$$

und

$$\alpha^{-m} = (A_n^{-m}; \; a_n^{-m}).$$

Die Beweise für die Regeln der Potenzrechnung (Siehe Kap. I, § 7 B) bieten keine Schwierigkeit.

Ohne weiteres ergibt sich dann auch die Gültigkeit des binomischen und des polynomischen Satzes (Kap. V, § 2 C) für den Fall, daß Binom bezüglich Polynom Summen irrationaler Zahlen sind.

Für $m > l$ und $\alpha > 0$ ist gleichzeitig mit $\alpha \gtrless 1$ auch $\alpha^m \gtrless \alpha^l$. (Siehe die Ungleichungen am Schlusse des § 4.)

C. Wurzeln mit ganzzahligen Exponenten bezüglich Potenzen mit rationalen Exponenten.

Von der Existenz einer positiven Zahl α, deren m^{te} Potenz gleich der positiven, rationalen oder irrationalen, Zahl z ist, überzeugt man sich leicht in folgender Weise. Bildet man die Reihe der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen:

$$0, \; 1^m, \; 2^m, \; 3^m, \ldots,$$

so kommt entweder z in dieser Reihe vor, oder es gibt zwei benachbarte Glieder, zwischen denen z enthalten ist. Im ersteren Falle ist $\sqrt[m]{z}$ eine ganze Zahl, im zweiten seien die beiden Glieder

$$a_0^m \quad \text{und} \quad A_0^m, \quad \text{also} \quad a_0^m < z < A_0^m, \quad A_0 - a_0 = 1.$$

Man berechne weiter:

$$a_0^m, \left(a_0 + \frac{1}{10}\right)^m, \left(a_0 + \frac{2}{10}\right)^m, \cdots, \left(a_0 + \frac{9}{10}\right)^m, A_0^m.$$

Entweder ist z ein Glied dieser Reihe, dann ist $\sqrt[m]{z}$ gleich einer ganzen Anzahl von Zehnteln, oder z liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern, die wir durch a_1^m und A_1^m bezeichnen $\left(A_1 - a_1 = \frac{1}{10}\right)$. Im letzteren Falle bilde man:

$$a_1^m, \left(a_1 + \frac{1}{100}\right)^m, \left(a_1 + \frac{2}{100}\right)^m, \cdots, \left(a_1 + \frac{9}{100}\right)^m, A_1^m$$

und wiederhole dieselbe Überlegung. So fortfahrend, findet man entweder für $\sqrt[m]{z}$ eine endliche Dezimalzahl, oder man erhält zwei unendliche Reihen rationaler Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots; A_0, A_1, A_2, \ldots,$ welche den Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} a_n \leqq a_{n+1} < A_{n+1} \leqq A_n \\ A_n - a_n = \frac{1}{10^n} \\ a_n^m < z < A_n^m \end{aligned}\right\} \text{ für alle Werte von } n.$$

Die durch die Doppelreihe $(a_n; A_n)$ dargestellte Zahl ist die gesuchte; denn zufolge der letzten Ungleichung ist ihre m^{te} Potenz gleich z. Das soeben angegebene Verfahren liefert sie in der am Schlusse des § 1 besprochenen speziellen Form. (Als Grundzahl für die systematischen Brüche hätten wir natürlich statt 10 auch irgend eine andere positive ganze Zahl außer 1 wählen können.)

Wenn m ungerade, so ist, wie aus der letzten Bemerkung in B folgt, $\alpha = (a_n; A_n)$ die einzige reelle Zahl, deren m^{te} Potenz den Wert z hat; ist m dagegen gerade, so ist auch $x = -(a_n; A_n)$ eine Lösung der Gleichung $x^m = z$. Falls z eine negative Zahl und m ungerade ist, bestimme man α so, daß $\alpha^m = -z$; alsdann wird $(-\alpha)^m = z$. Ist endlich z negativ und m gerade, so gibt es keine reelle Zahl, deren m^{te} Potenz gleich z wäre. Vgl. Kap. IV, § 7 B, S. 171 u. 172.

Bedeuten jetzt z, z' positive Zahlen und $(a_n; A_n), (a_n'; A_n')$ die positiven Werte von $\sqrt[m]{z}$ bezüglich $\sqrt[m]{z'}$, so erhält man nach der Definition eines Produktes:

$$\sqrt[m]{z} \cdot \sqrt[m]{z'} = (a_n a_n'; A_n A_n').$$

Andererseits ergibt sich aus den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} a_n^m < z < A_n^m, \\ a_n'^m < z' < A_n'^m, \\ \hline \end{aligned}$$

daß

$$(a_n a_n')^m < z z' < (A_n A_n')^m;$$

d. h., der positive Wert von $\sqrt[m]{zz'}$ ist gleich $(a_n a_n'; A_n A_n')$, womit in aller Strenge die Richtigkeit der Gleichung

$$\sqrt[m]{z} \cdot \sqrt[m]{z'} = \sqrt[m]{zz'}$$

bewiesen ist. Ebenso einfach ergeben sich die übrigen auf die absoluten Werte der Wurzeln aus positiven Zahlen bezüglichen Formeln (Kap. I, § 8 B).

Für eine endliche, bestimmte (rationale oder irrationale) Zahl z, die größer als 1 ist, und einen positiven ganzzahligen Wert von q sei

$$\sqrt[q]{z} = 1 + \delta_q.$$

δ_q ist eine positive, von q abhängige Zahl, die mit wachsendem q abnimmt. Bliebe δ_q für alle Werte von q größer als eine bestimmte positive Zahl ε, so wäre für alle Werte von q:

$$\sqrt[q]{z} > 1 + \varepsilon$$

oder

$$z > (1 + \varepsilon)^q > 1 + q\varepsilon$$

(Kap. V, § 2 C, S. 194).

Die rechte Seite der Ungleichung wächst für hinreichend große Werte von q über alle Grenzen, könnte also nicht kleiner als z bleiben; δ_q muß daher mit hinreichend wachsendem q unter jeden angebbaren Wert sinken.

Wenn

$$0 < z < 1, \quad \text{so ist} \quad \frac{1}{z} > 1.$$

Setzt man

$$\sqrt[q]{\frac{1}{z}} = 1 + \delta_q',$$

so ist δ_q' für alle Werte von q positiv und wird für genügend große Werte von q beliebig klein. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\sqrt[q]{z} = \frac{1}{1 + \delta_q'} = 1 - \frac{\delta_q'}{1 + \delta_q'};$$

d. h., $\sqrt[q]{z}$ ist für alle Werte von q kleiner als 1, kommt aber bei hinreichend großen Werten von q der Zahl 1 so nahe, wie man nur will.

Durch die Gleichung

$$z^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{z}\right)^p$$

(vgl. Kap. II, § 5 B, S. 87 ff.) sind jetzt auch die Potenzen mit rationalen Exponenten für eine beliebige positive Basis z definiert.

Falls q gerade und p ungerade ist, hat $(\sqrt[q]{z})^p$ zwei verschiedene reelle Werte; wir wollen in diesem Kapitel unter $z^{\frac{p}{q}}$ stets den positiven Wert verstehen.

Wenn $\frac{r}{s} > \frac{p}{q}$, wo p, q, r, s positive ganze Zahlen bedeuten, so ist gleichzeitig mit $z \gtrless 1$ auch $z^{\frac{r}{s}} \gtrless z^{\frac{p}{q}}$ (vgl. die letzte Bemerkung unter B).

D. Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Bedeutet z eine beliebige, rationale oder irrationale, Zahl größer als 1, und ist $\mu = (m_n;\ M_n)$ eine irrationale Zahl, so verstehen wir unter der Potenz z^μ den Wert der Doppelreihe $(z^{m_n};\ z^{M_n})$. Um uns von der Zulässigkeit dieser Definition zu überzeugen, beweisen wir zunächst, daß die (aus irrationalen Gliedern bestehende) Doppelreihe die zur Definition einer bestimmten Zahl erforderlichen Eigenschaften (§ 7 A, S. 310) besitzt.

Weil

$$m_n < m_{n+1} < M_{n+1} < M_n,$$

folgt aus der letzten Bemerkung unter C, daß

$$z^{m_n} < z^{m_{n+1}} < z^{M_{n+1}} < z^{M_n}.$$

Die Differenz $M_n - m_n$ kann durch hinreichend große Werte von n kleiner als $\frac{1}{q}$ gemacht werden, wo q eine beliebig große positive ganze Zahl bedeutet. Nach § 7 C wird deshalb für hinreichend große n die positive Differenz $z^{M_n - m_n} - 1$ und zufolge der Gleichung

$$z^{M_n} - z^{m_n} = z^{m_n}\left(z^{M_n - m_n} - 1\right)$$

auch die Differenz $z^{M_n} - z^{m_n}$ beliebig klein. Die Doppelreihe $(z^{m_n};\ z^{M_n})$ definiert also nach § 7 A, S. 310 tatsächlich eine bestimmte Zahl, die auch durch eine Doppelreihe rationaler Zahlen dargestellt werden kann. Sie ist stets positiv, weil für alle Werte von n

$$z^{m_n} > 0.$$

Für $z = 1$ wird $z^\mu = 1$.

Wenn

$$(m_n;\ M_n) = (m_n';\ M_n'),$$

so ist auch

$$\left(z^{m_n};\ z^{M_n}\right) = \left(z^{m_n'};\ z^{M_n'}\right);$$

denn aus der Voraussetzung folgt zunächst:

$$m_n < M_n', \quad m_n' < M_n,$$

also auch

$$z^{m_n} < z^{M_n'}, \quad z^{m_n'} < z^{M_n},$$

woraus sich die Richtigkeit unserer Behauptung nach der letzten Bemerkung in § 7 A, S. 312 ergibt.

Ist die Doppelreihe $(m_n;\ M_n)$ einer rationalen Zahl m gleich, so schließen wir aus

$$m_n \leqq m \leqq M_n,$$

daß

$$\left.\begin{array}{l} \\ z^{m_n} \leqq z^m \leqq z^{M_n}, \end{array}\right\} \text{(für alle Werte von } n)$$

also

$$(z^{m_n};\ z^{M_n}) = z^m.$$

Wenn

$$0 < z < 1 \quad \text{und} \quad \mu = (m_n;\ M_n),$$

so definieren wir

$$z^\mu = (z^{M_n};\ z^{m_n}).$$

Daß die Potenzregeln auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten gelten, ist nach dem Vorhergehenden (siehe insbesondere § 7 A, Zus. 3) leicht zu zeigen. Behufs Verwendung bei der Definition der Logarithmen werde nur hervorgehoben der

Satz: Auch wenn μ und λ irrationale Zahlen sind, ist für $\mu > \lambda$ gleichzeitig mit $z \gtrless 1$

$$z^\mu \gtrless z^\lambda.$$

Beweis: Es sei zunächst

$$z > 1 \quad \text{und} \quad \mu = (m_n;\ M_n), \quad \lambda = (l_n;\ L_n).$$

Wenn $\mu > \lambda$, so gibt es (§ 1, S. 299) eine rationale Zahl r und ganze Zahlen N, N' derart, daß

$$r < m_n, \quad \text{falls} \quad n \geqq N,$$
$$r > L_n, \quad \text{falls} \quad n \geqq N'.$$

Also hat man für alle Werte von n, die größer als N und N' sind,

$$\left.\begin{array}{l} z^r < z^{m_n}, \\ z^r > z^{L_n} \end{array}\right\} \text{(letzter Satz in § 7 C)}.$$

Da aber

$$\left.\begin{array}{l} z^{m_n} < z^\mu \\ z^{L_n} > z^\lambda \end{array}\right\} \text{(für alle Werte von } n),$$

und

so folgt:

$$z^\mu > z^\lambda.$$

Für den Fall $0 < z < 1$ ist der Beweis ganz ähnlich. Der Satz bleibt auch richtig, wenn eine der beiden Zahlen μ, λ rational, die andere irrational ist.

Die Bedeutung einer Potenz mit negativer Basis und irrationalem Exponenten können wir erst im nächsten Kapitel erörtern.

E. Logarithmen.

Wir haben μ den Logarithmus der Zahl α für die Basis z genannt, wenn die Gleichung besteht:

$$z^{\mu} = \alpha \cdot$$

Da einerseits die Potenz mit beliebigem reellen Exponenten bisher nur für eine positive Basis erklärt und andererseits der in D definierte Wert einer solchen Potenz stets positiv ist, beschränken wir sowohl z wie α auf positive, rationale oder irrationale, Werte; wir schließen auch noch den Wert $z = 1$ aus, da für alle μ nach D $1^{\mu} = 1$.

Unter diesen Annahmen läßt sich stets eine reelle Zahl μ finden, die der Gleichung $z^{\mu} = \alpha$ genügt. Daß es nicht mehr als eine solche Zahl geben kann, ist von vornherein klar, weil ja mit wachsendem μ die Potenz z^{μ}, falls $z > 1$, beständig wächst und, falls $z < 1$, beständig abnimmt.

Indem wir zunächst $z > 1$ und $\alpha > 1$ voraussetzen, bilden wir die Potenzen

$$z^0, \; z^1, \; z^2, \; z^3, \ldots$$

und prüfen, ob vielleicht ein Glied dieser Reihe gleich einer der Potenzen $\alpha^{g^0}, \alpha^{g^1}, \alpha^{g^2}, \alpha^{g^3}, \ldots, \alpha^{g^n}, \ldots,$ ist, wo g eine beliebig gewählte positive ganze Zahl ($\geqq 2$) bedeutet. Ist etwa

$$z^k = \alpha^{g^n} = z^{\mu \cdot g^n},$$

so findet man für μ den rationalen Wert $\frac{k}{g^n}$.

Wenn für keinen Wert von n die Potenz α^{g^n} gleich einer Potenz von z mit ganzzahligem Exponenten ist, so stelle man für jeden Wert von n fest, zwischen welchen Potenzen von z die Potenz α^{g^n} liegt. Ist für einen beliebigen Wert von n

$$z^{m_n} < \alpha^{g^n} < z^{M_n}, \quad M_n - m_n = 1,$$

oder

$$z^{m_n} < z^{\mu \cdot g^n} < z^{M_n},$$

so folgt:

$$\frac{m_n}{g^n} < \mu < \frac{M_n}{g^n}, \quad \frac{M_n}{g^n} - \frac{m_n}{g^n} = \frac{1}{g^n};$$

d. h., die gesuchte Zahl μ ist gleich dem Werte der Doppelreihe

$$\left(\frac{m_n}{g^n}; \ \frac{M_n}{g^n}\right).$$

Um sicher zu sein, daß diese wirklich eine Zahl bestimmt, haben wir noch zu zeigen, daß

$$\frac{m_{n+1}}{g^{n+1}} \geqq \frac{m_n}{g^n}$$

und

$$\frac{M_{n+1}}{g^{n+1}} \leqq \frac{M_n}{g^n}.$$

Aus den Ungleichungen

$$z^{m_n} < \alpha^{g^n} < z^{m_n+1}$$

und

$$z^{m_{n+1}} < (\alpha^{g^n})^g < z^{m_{n+1}+1}$$

schließen wir, daß

$$z^{m_{n+1}+1} > z^{m_n g}, \quad \text{also} \quad m_{n+1} \geqq m_n g$$

und

$$z^{m_{n+1}} < z^{(m_n+1)g}, \quad \text{also} \quad M_{n+1} \leqq M_n g,$$

woraus sich ohne weiteres die zu beweisenden Relationen ergeben.

Falls $0 < \alpha < 1$, bestimme man die der Gleichung $z^{\mu'} = \frac{1}{\alpha}$ genügende Zahl μ'. Es erfüllt alsdann $\mu = -\mu'$ die Gleichung $z^{\mu} = \alpha$. Ebenso ist, wenn $0 < z < 1$ und $\left(\frac{1}{z}\right)^{\mu'} = \alpha$, $\mu = -\mu'$ die Lösung der Gleichung $z^{\mu} = \alpha$. Die logarithmischen Formeln (vgl. Kap. I, § 8 C, S. 31) ergeben sich unmittelbar aus den Potenzregeln.

Da für hinreichend große Werte von n die rationalen Zahlen $\frac{m_n}{g^n}$ und $\frac{M_n}{g^n}$ der irrationalen Zahl $\mu = \left(\frac{m_n}{g^n}; \ \frac{M_n}{g^n}\right)$ beliebig nahe kommen (vgl. § 3, S. 305), dürfen wir sie jetzt als Näherungswerte des Logarithmus bezeichnen. Es sind dieselben Zahlen, die wir früher im rationalen Zahlengebiete (Kap. V, § 5 C) als Lösungen der Gleichungen gefunden haben (insbesondere für $g = 2$ und $g = 10$), die aus $z^{\mu} = \alpha$ entstehen, wenn man z und α um passend gewählte beliebig kleine Beträge ändert (Kap. V, § 5 B), und die beim praktischen Rechnen geradezu als Logarithmen der Zahl α für die Basis z bezeichnet zu werden pflegen.

§ 8. Größenverhältnisse als reelle Zahlen.

Wir wollen nunmehr den schon in § 1 (S. 297) angekündigten Nachweis liefern, daß die in diesem Kapitel behandelten reellen Zahlen das vollkommene Abbild gewisser Beziehungen unter Größen irgend welcher Art[1]), z. B. Linien, Flächen, Körpern, Winkeln usw. darstellen.

Wenn zu zwei Größen derselben Art $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ sich eine dritte, $\mathfrak{M}$, finden läßt, so daß

$$\mathfrak{A} = a\mathfrak{M}, \quad \mathfrak{E} = e\mathfrak{M},$$

wo a, e positive ganze Zahlen bedeuten, so heißt $\mathfrak{M}$ ein gemeinschaftliches Maß von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$, und diese beiden Größen selbst werden „kommensurabel" genannt. Gibt es noch eine Größe derselben Art, $\mathfrak{M}'$, so daß

$$\mathfrak{A} = a'\mathfrak{M}', \quad \mathfrak{E} = e'\mathfrak{M}',$$

wo auch a', e' positive ganze Zahlen sind, so ist

$$ae' = a'e \quad \text{oder} \quad \frac{a}{e} = \frac{a'}{e'}.$$

Den gemeinschaftlichen Wert der Brüche $\frac{a}{e}$, $\frac{a'}{e'}$ nennt man das Verhältnis der Größe $\mathfrak{A}$ zur Größe $\mathfrak{E}$; wir bezeichnen es durch $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$. Haben a, e, wie wir nunmehr voraussetzen wollen, keinen gemeinschaftlichen Teiler, dann ist (nach Kap. II, § 2, S. 79)

$$a' = ka, \quad e' = ke \quad (k \text{ eine ganze Zahl}),$$

folglich

$$\mathfrak{M} = k\mathfrak{M}',$$

d. h., $\mathfrak{M}$ ist ein Vielfaches jedes anderen gemeinschaftlichen Maßes und wird deshalb das größte gemeinschaftliche Maß von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ genannt.

In Kap. V, § 4 B haben wir mittels einer Kette von Gleichungen (S. 214 u. 215) den Quotienten $\frac{a}{e}$ in einen einfachen oder regelmäßigen Kettenbruch $k_0 \dotplus \frac{1}{k_1} \dotplus \frac{1}{k_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{k_{i-1}} \dotplus \frac{1}{k_i}$ entwickelt.

Da nun,

$$\begin{aligned} &\text{wenn} \quad a = a', &&\text{auch} \quad a\mathfrak{M} = a'\mathfrak{M}, \\ &\text{wenn} \quad a = a' + a'', &&\text{auch} \quad a\mathfrak{M} = a'\mathfrak{M} + a''\mathfrak{M}, \\ \text{und } &\text{wenn} \quad a = a'a'', &&\text{auch} \quad a\mathfrak{M} = a'(a''\mathfrak{M}), \end{aligned}$$

1) Wir bezeichnen solche in diesem Paragraphen stets durch große deutsche Buchstaben.

so entsprechen den Gleichungen auf S. 214 die folgenden Größenrelationen:

$$a\mathfrak{M} = k_0(e\mathfrak{M}) + e_1\mathfrak{M},$$
$$e\mathfrak{M} = k_1(e_1\mathfrak{M}) + e_2\mathfrak{M},$$
$$e_1\mathfrak{M} = k_2(e_2\mathfrak{M}) + e_3\mathfrak{M},$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$
$$e_{i-2}\mathfrak{M} = k_{i-1}(e_{i-1}\mathfrak{M}) + e_i\mathfrak{M},$$
$$e_{i-1}\mathfrak{M} = k_i(e_i\mathfrak{M}),$$

oder, wenn wir für $a\mathfrak{M}$ wieder $\mathfrak{A}$, für $e\mathfrak{M}$ wieder $\mathfrak{E}$ schreiben und gleichzeitig

$$e_1\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_1, \ldots, e_{i-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{i-1}, e_i\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_i = \mathfrak{M}$$

setzen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A} &= k_0\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1, \\ \mathfrak{E} &= k_1\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2, \\ \mathfrak{E}_1 &= k_2\mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3, \\ &\cdots\cdots, \\ \mathfrak{E}_{i-2} &= k_{i-1}\mathfrak{E}_{i-1} + \mathfrak{E}_i, \\ \mathfrak{E}_{i-1} &= k_i\mathfrak{E}_i = k_i\mathfrak{M}, \end{aligned}$$

wo wegen

$$e > e_1 > e_2 > \cdots > e_i$$

auch

$$\mathfrak{E} > \mathfrak{E}_1 > \mathfrak{E}_2 > \cdots > \mathfrak{E}_i.$$

Die Gleichungen (I) lehren, daß man für zwei kommensurable Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ auf dieselbe Weise wie für zwei ganze Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß finden kann; und umgekehrt, wendet man auf zwei Größen gleicher Art $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ dieses Verfahren an, und findet man nach einer endlichen Anzahl von Operationen eine Größe $\mathfrak{E}_i$, die in der vorhergehenden $\mathfrak{E}_{i-1}$ genau enthalten ist, so sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ kommensurabel, $\mathfrak{E}_i$ ist das größte gemeinschaftliche Maß von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ und der Kettenbruch $k_0 \dot{+} \frac{1}{k_1} \dot{+} \frac{1}{k_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{k_i}$, dessen Teilnenner sich bei dem Verfahren ergeben haben, der Wert des Verhältnisses $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$.

Wie aber bereits in § 1 dieses Kapitels gesagt (S. 293), gibt es auch Paare von Größen gleicher Art, die sicher nicht kommensurabel sind, z. B. die Diagonale und die Seite eines Quadrats. Unterwirft man zwei derartige Größen, was offenbar immer möglich ist, demselben Verfahren, so kann nach dem vorher Gesagten die Kette der

Gleichungen nie abbrechen, dementsprechend erhält man statt des endlichen Kettenbruchs, der im Falle zweier kommensurablen Größen den Wert ihres Verhältnisses darstellt, einen sich ins Unendliche erstreckenden Kettenbruch. Welchen Sinn, welchen Wert hat ein solcher unendlicher Kettenbruch? In Kap. V, § 4 haben wir uns zwar nur mit endlichen Kettenbrüchen beschäftigt, die Voraussetzung aber, daß die Kettenbruchentwicklung ein Ende nimmt, gar nicht benutzt bei Herleitung der folgenden unter den Zählern Z_μ und den Nennern N_μ der Näherungsbrüche U_μ bestehenden Relationen:

$$Z_\mu = k_\mu Z_{\mu-1} + Z_{\mu-2}, \quad N_\mu = k_\mu N_{\mu-1} + N_{\mu-2} \quad \text{(siehe (II) auf S. 219);}$$

$$U_\mu - U_{\mu-1} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{N_\mu N_{\mu-1}} \quad \text{(siehe (IV) auf S. 221);}$$

$$U_\mu - U_{\mu-2} = \frac{(-1)^\mu k_\mu}{N_\mu N_{\mu-2}} \quad \text{(siehe S. 223).}$$

Diese Formeln dürfen wir also auch dann gebrauchen, wenn das Kettenbruchverfahren nie abbricht. Indem wir es jetzt ganz unbestimmt lassen, aus wieviel Gleichungen das System (I) auf S. 320 besteht, drücken wir aus der ersten Gleichung $\mathfrak{E}_1$, aus der zweiten $\mathfrak{E}_2$, aus der dritten $\mathfrak{E}_3$ usw. durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ aus. Wir erhalten:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{A} - k_0 \mathfrak{E} = N_0 \mathfrak{A} - Z_0 \mathfrak{E};$$

$$-\mathfrak{E}_2 = k_1 \mathfrak{A} - (k_0 k_1 + 1)\mathfrak{E} = N_1 \mathfrak{A} - Z_1 \mathfrak{E};$$

$$\mathfrak{E}_3 = (k_2 N_1 + N_0)\mathfrak{A} - (k_2 Z_1 + Z_0)\mathfrak{E} = N_2 \mathfrak{A} - Z_2 \mathfrak{E}$$

und allgemein mittels des Schlusses von μ auf $\mu + 1$ und unter Verwendung der oben zitierten Rekursionsformeln für Z_μ und N_μ

$$(-1)^{\mu-1}\mathfrak{E}_\mu = N_{\mu-1}\mathfrak{A} - Z_{\mu-1}\mathfrak{E},$$

woraus sich ergibt:

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{A} = U_{\mu-1}\mathfrak{E} + (-1)^{\mu-1} \cdot \frac{\mathfrak{E}_\mu}{N_{\mu-1}}.$$

Bricht nun die Gleichungskette (I) auf S. 320 mit der i^{ten} Reihe ab, d. h., ist $\mathfrak{E}_{i+1} = 0$, so erhält man aus (II) für $\mu = i + 1$

$$\mathfrak{A} = U_i \mathfrak{E},$$

also $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E})$ gleich dem rationalen Werte $U_i = \frac{a}{e}$.

Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ jedoch inkommensurabel sind und daher die Kettenbruchentwicklung nie aufhört, so nehmen die Größen $\mathfrak{E}_\mu$ mit wachsendem

Index zwar ab, für keinen endlichen Wert von μ wird aber $\mathfrak{E}_\mu$ gleich Null. Es ergibt sich alsdann aus (II), indem wir erstens $\mu = 2m + 1$, zweitens $\mu = 2m' + 2$ setzen, wo m, m' beliebige positive ganze Zahlen bedeuten:

$$\mathfrak{A} = U_{2m}\,\mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{E}_{2m+1}}{N_{2m}}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{A} > U_{2m}\,\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{A} = U_{2m'+1}\,\mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{E}_{2m'+2}}{N_{2m'+1}}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{A} < U_{2m'+1}\,\mathfrak{E},$$

oder zusammengefaßt:

(III) $$U_{2m}\,\mathfrak{E} < \mathfrak{A} < U_{2m'+1}\,\mathfrak{E}.$$

Hieraus folgt schon, daß jeder Näherungswert U mit geradem Index kleiner ist als irgend ein Näherungswert U mit ungeradem Index. Aus der Gleichung

$$U_\mu - U_{\mu-2} = \frac{(-1)^\mu \cdot k_\mu}{N_\mu N_{\mu-2}} \quad \text{(siehe vorige Seite)}$$

schließen wir weiter, daß

$$U_{2m+2} > U_{2m}, \quad U_{2m'+1} < U_{2m'-1},$$

daß also die Näherungswerte, deren Index eine gerade Zahl ist, mit wachsendem Index zunehmen, die, deren Index eine ungerade Zahl ist, mit wachsendem Index abnehmen.

Endlich zeigt die Gleichung (siehe (IV), S. 221)

$$U_{2m+1} - U_{2m} = \frac{1}{N_{2m+1}N_{2m}},$$

daß durch hinreichend große Werte von m die Differenz $U_{2m+1} - U_{2m}$ beliebig klein gemacht werden kann. Die aus unendlich vielen rationalen Zahlen bestehende Doppelreihe

$$U_0,\ U_2,\ U_4,\ \ldots;\ \ \ldots\ U_5,\ U_3,\ U_1$$

besitzt also alle zur Definition einer bestimmten Zahl $(U_{2m};\ U_{2m+1})$ erforderlichen Eigenschaften (siehe § 1, S. 297)[1]. Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ inkommensurabel sind, ist diese Zahl sicher irrational, denn aus der Ungleichung

$$U_{2m} < \frac{p}{q} < U_{2m+1},$$

1) Man hätte das auch aus Gleichung (II), S. 321, schließen können, ohne die Formeln für $U_\mu - U_{\mu-1}$ und $U_\mu - U_{\mu-2}$ zu benutzen. Vgl. die S. 292 zitierte Programmarbeit.

wo $\frac{p}{q}$ ein rationaler Bruch ist, würde folgen:

$$U_{2m}\mathfrak{E} < \frac{p}{q}\mathfrak{E} < U_{2m+1}\mathfrak{E},$$

und weil nun auch (siehe Gleichung (III) auf voriger Seite)

$$U_{2m}\mathfrak{E} < \mathfrak{A} < U_{2m+1}\mathfrak{E},$$

so müßte für alle Werte von m

$$\left|\mathfrak{A} - \frac{p}{q}\mathfrak{E}\right| < (U_{2m+1} - U_{2m})\mathfrak{E}$$

sein. Da sich die rechte Seite durch hinreichend große Werte von m beliebig klein machen läßt, könnte nur

$$\left|\mathfrak{A} - \frac{p}{q}\mathfrak{E}\right| = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A} = \frac{p}{q}\mathfrak{E}$$

sein, was aber der Voraussetzung widerspricht.

Unter dem Werte des Verhältnisses der Größe $\mathfrak{A}$ zur Größe $\mathfrak{E}$ wollen wir nunmehr die Zahl $\alpha = (U_{2m};\ U_{2m+1})$ verstehen, wo die U die Näherungswerte des Kettenbruches sind, den man durch Anwendung des Kettenbruchverfahrens auf die Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ erhält.

Daß im Falle zweier kommensurablen Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$ diese Definition des Verhältnisses mit der S. 320 gegebenen (als Wert des endlichen Kettenbruches) übereinstimmt, zeigt die Relation (IX) in Kap. V, § 4 B, S. 223[1]).

Die Doppelreihe $(U_{2m};\ U_{2m+1})$ hat zufolge der Relation (III), S. 322, die Eigenschaft, daß die unendlich vielen Größen $U_{2m}\mathfrak{E}$, die aus $\mathfrak{E}$ durch Multiplikation mit den Gliedern der ersten Hälfte der Doppelreihe gebildet werden, sämtlich kleiner sind als die bestimmte, sicher existierende Größe $\mathfrak{A}$, und die Größen $U_{2m+1}\mathfrak{E}$, die in derselben Weise aus $\mathfrak{E}$ mittels der Glieder ihrer zweiten Hälfte entstehen, sämtlich größer als $\mathfrak{A}$ sind. Diese Erkenntnis hat gerade zu der Idee geführt, jedesmal, wenn eine solche Doppelreihe mit den angegebenen Eigenschaften (S. 297) vorliegt, eine neue Zahl zu definieren oder zu schaffen, welche

1) O. Stolz (Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. Teil, VII. Abschnitt, 13) stellt den Wert des Verhältnisses durch einen endlichen oder unendlichen Dezimalbruch (bezüglich systematischen Bruch mit beliebiger Basis) dar. Mir scheint indessen die Verwendung der Kettenbrüche natürlicher, weil auf sie die Prüfung der Kommensurabilität zweier gleichartigen Größen mit Notwendigkeit führt.

größer ist als alle Zahlen der ersten Hälfte und kleiner als alle Zahlen der zweiten Hälfte der Doppelreihe.

Allerdings folgt aus dem Vorhergehenden durchaus nicht etwa umgekehrt, daß, wenn $(a_n; A_n)$ eine beliebige irrationale Zahl bedeutet und $\mathfrak{E}$ eine beliebige Größe irgend eines Größengebietes ist, dann immer eine Größe $\mathfrak{A}$ desselben Größengebietes existieren müßte, so daß für alle n

$$a_n \mathfrak{E} < \mathfrak{A} < A_n \mathfrak{E}.$$

Das Erfülltsein dieser Forderung stellt vielmehr die charakteristische Bedingung für eine besondere Eigenschaft des Größengebietes dar, die man „Stetigkeit“ nennt. Daß etwa die sämtlichen Abschnitte einer geraden Linie ein solches „stetiges“ Größensystem bilden, ist weder selbstverständlich noch beweisbar. Diese Aussage involviert vielmehr, wie es zuerst G. Cantor[1]) und E. Dedekind[2]) klar erkannt und ausgesprochen haben, ein Axiom, das der arithmetischen Behandlung der Linien zugrunde zu legen ist. Wir wollen uns im folgenden auf Größensysteme beschränken, die in dem genannten Sinne stetig sind[3]), und zeigen, daß irgend welchen Relationen unter Größen eines solchen Gebietes die gleichen Relationen unter Zahlen entsprechen und umgekehrt.

Weil wir wiederholt Gebrauch davon machen werden, überzeugen wir uns zunächst davon, daß, wenn wieder

$$\alpha = (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = (U_{2m}; U_{2m+1})$$

und $\frac{p}{q}$ einen rationalen Bruch bedeutet, gleichzeitig mit $\frac{p}{q} \lesseqgtr \alpha$ auch

1) Math. Ann. Bd. 5, S. 128. „Um aber den in diesem Paragraphen dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § 1 definierten Zahlgrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein Axiom hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, daß auch umgekehrt zu jeder Zahlgröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist der Zahlgröße, und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem Paragraphen erklärt wird. Ich nenne diesen Satz ein Axiom, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.“

2) Stetigkeit und irrationale Zahlen, 3. Aufl., Braunschweig 1905, S. 11. „Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“ „Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken.“

3) Die Feststellung, ob diese Voraussetzung für ein bestimmtes Größensystem zutrifft, ist natürlich nicht Sache der Arithmetik.

$\frac{p}{q}\mathfrak{E} \lessgtr \mathfrak{A}$ ist. Hat man z. B. $\frac{p}{q} < \alpha$, so folgt für hinreichend große Werte von m

$$\frac{p}{q} < U_{2m},$$

also auch $\frac{p}{q}\mathfrak{E} < U_{2m}\mathfrak{E} < \mathfrak{A}$ usw.

Aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ergibt sich selbstverständlich $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$; denn die zur Bestimmung der beiden Verhältniszahlen dienenden Kettenbruchentwicklungen sind identisch.

Wenn $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, so gibt es stets rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ (und zwar unendlich viele), so daß

$$\mathfrak{A} > \frac{p}{q}\mathfrak{E} > \mathfrak{B}.$$

Man braucht[1]) nämlich eine ganze Zahl q nur so zu wählen, daß gleichzeitig

$$q(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) > \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad q\mathfrak{B} > \mathfrak{E}\,^{2)},$$

und dann die positive ganze Zahl p so zu bestimmen, daß

$$(p-1)\mathfrak{E} \leqq q\mathfrak{B} < p\mathfrak{E}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt schon:

$$\frac{p}{q}\mathfrak{E} > \mathfrak{B};$$

aus

$$q(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) > \mathfrak{E}$$

ergibt sich:

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{B} + \frac{1}{q}\mathfrak{E}$$

und, weil

$$\mathfrak{B} \geqq \frac{p-1}{q}\mathfrak{E},$$

auch

$$\mathfrak{A} > \frac{p}{q}\mathfrak{E}.$$

Die Größenrelationen

$$\mathfrak{A} > \frac{p}{q}\mathfrak{E}, \quad \frac{p}{q}\mathfrak{E} > \mathfrak{B}$$

---

1) Nach Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, I. Teil, 5. Abschnitt, S. 71.

2) Die Möglichkeit, q diesen Ungleichungen entsprechend zu bestimmen, setzt für unser Größensystem die Gültigkeit des Archimedischen Axioms voraus, welches besagt, daß, wenn von zwei Größen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ des Systems $\mathfrak{D}$ die kleinere ist, doch stets ein Vielfaches von $\mathfrak{D}$ existiert, das größer als $\mathfrak{C}$ ist.

sind aber, wie vorher gezeigt, äquivalent den Zahlenungleichungen

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) > \frac{p}{q}, \quad \frac{p}{q} > (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}),$$

so daß aus unserer Voraussetzung $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ zu folgern ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) > (\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$. Ebenso erkennt man, daß, wenn $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) < (\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$. Daher können wir jetzt weiter schließen, daß auch umgekehrt aus

$$\text{(IV)} \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) \gtreqless (\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$$

die entsprechende Relation

$$\mathfrak{A} \gtreqless \mathfrak{B}$$

folgt.

Gleichen Größen entsprechen also gleiche Zahlen (nämlich die Verhältnisse dieser Größen zu irgend einer als Einheit gewählten Größe desselben Systems), ungleichen Größen im selben Sinne ungleiche Zahlen und umgekehrt.

Es sei jetzt

$$\text{(V)} \quad \left.\begin{array}{l} (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = (U_{2m}; U_{2m+1}) = \alpha, \text{ also } U_{2m}\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A} \leqq U_{2m+1}\mathfrak{E} \\ \text{und} \\ (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) = (U'_{2m}; U'_{2m+1}) = \beta, \text{ also } U'_{2m}\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{B} \leqq U'_{2m+1}\mathfrak{E}^{1)} \end{array}\right\} \text{für alle Werte von } m,$$

so folgt durch Addition:

$$(U_{2m} + U'_{2m})\,\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \leqq (U_{2m+1} + U'_{2m+1})\,\mathfrak{E},$$

also auch:

$$U_{2m} + U'_{2m} \leqq (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{E}) \leqq U_{2m+1} + U'_{2m+1};$$

d. h. aber:

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{E}) &= (U_{2m} + U'_{2m}; U_{2m+1} + U'_{2m+1}) \\ &= (U_{2m}; U_{2m+1}) + (U'_{2m}; U'_{2m+1}) \\ &= (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Liegt also eine Gleichung zwischen Größen derselben Art vor:

$$\text{(VII)} \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \cdots = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \cdots,$$

und bedeutet $\mathfrak{E}$ irgend eine als Einheit gewählte Größe desselben Systems, so ist zunächst nach (IV)

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \cdots, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \cdots, \mathfrak{E})$$

1) Die Gleichheitszeichen sind hinzugefügt, um den Fall kommensurabler Größen nicht auszuschließen.

und dann nach (VI):

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) + \cdots = (\mathfrak{A}', \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B}', \mathfrak{E}) + \cdots$$

oder, wenn wir zur Abkürzung für die Zahlen die entsprechenden griechischen Buchstaben setzen:

(VIII) $$\alpha + \beta + \cdots = \alpha' + \beta' + \cdots.$$

Falls umgekehrt eine Gleichung wie (VIII) unter Zahlen gegeben ist, so lassen sich zufolge unserer Voraussetzung, daß das Größensystem $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots)$ ein stetiges sein soll, nach willkürlicher Wahl der Größe $\mathfrak{E}$ immer Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \ldots$ dieses Systems so finden, daß

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = \alpha, \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) = \beta, \ldots; \quad (\mathfrak{A}', \mathfrak{E}) = \alpha', \quad (\mathfrak{B}', \mathfrak{E}) = \beta', \ldots,$$

also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) + \cdots = (\mathfrak{A}', \mathfrak{E}) + (\mathfrak{B}', \mathfrak{E}) + \cdots,$$

woraus nach (VI) wieder folgt:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \cdots, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \cdots, \mathfrak{E})$$

und nach (IV):

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \cdots = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \cdots,$$

so daß die Gleichungen (VII) und (VIII) tatsächlich vollkommen äquivalent sind.

Aus (V) ergibt sich weiter:

$$\mathfrak{E} \geqq \frac{\mathfrak{B}}{U'_{2m+1}}, \quad \mathfrak{E} \leqq \frac{\mathfrak{B}}{U'_{2m}},$$

und hieraus:

$$\frac{U_{2m}}{U'_{2m+1}} \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A} \leqq \frac{U_{2m+1}}{U'_{2m}} \mathfrak{B}$$

$$\frac{U_{2m}}{U'_{2m+1}} \leqq (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \leqq \frac{U_{2m+1}}{U'_{2m}};$$

d. h. aber

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) &= \left(\frac{U_{2m}}{U'_{2m+1}}; \ \frac{U_{2m+1}}{U'_{2m}}\right) \\ &= (U_{2m}; \ U_{2m+1}) : (U'_{2m}; \ U'_{2m+1})^{1)} \\ &= (\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) : (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}).\end{aligned}$$

Das Verhältnis irgend zweier gleichartigen Größen ist

1) Siehe die Definition des Quotienten zweier irrationalen Zahlen, § 5, S. 308.

also gleich dem Quotienten ihrer Verhältniszahlen in bezug auf irgend eine als Einheit gewählte Größe des Systems.

Mit Benutzung dieses Satzes läßt sich jetzt leicht zeigen, daß

$$(n\mathfrak{A},\ n\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}),$$
$$(\mathfrak{B},\ \mathfrak{A}) = 1 : (\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}) \text{ usw.},$$

daß überhaupt die beiden Glieder eines Verhältnisses den selben Gesetzen gehorchen wie Zähler und Nenner eines Bruches, wodurch die für das Verhältnis sonst übliche Schreibweise $\mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ oder $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ erst gerechtfertigt wird.

Aus der Gleichheit zweier Größenverhältnisse („Proportion" genannt)

(IX) $$(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}) = (\mathfrak{C},\ \mathfrak{D})$$

folgt nun auch unmittelbar die Gleichheit der beiden Zahlenquotienten

$$(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E}) : (\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}) = (\mathfrak{C},\ \mathfrak{E}) : (\mathfrak{D},\ \mathfrak{E})$$

oder

(X) $$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

und umgekehrt, nach willkürlicher Wahl von $\mathfrak{E}$ aus Gleichung (X) auch Gleichung (IX).

Wegen der Äquivalenz dieser beiden Gleichungen ergeben sich die Sätze über Gleichungen zwischen Verhältnissen irgend welcher Größen (Vertauschung der Innenglieder, der Außenglieder einer Proportion usw.), wie sie zuerst Euklid im fünften Buche seiner Elemente[1]) entwickelt hat, jetzt sofort aus denselben Sätzen für die ent-

1) Euklid gibt daselbst eine ausführliche Darstellung der Lehre von den Verhältnissen, ohne aber eine wirkliche, mathematisch brauchbare Definifion des Begriffes „Verhältnis" aufzustellen. Dagegen definiert er: Die beiden Verhältnisse $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E})$ und $(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}')$ (wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}'$ zwar auch untereinander gleichartig sind, aber nicht von derselben Art zu sein brauchen wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{E}$) sollen einander gleich heißen, wenn für alle positiven ganzen Zahlen p, q aus $q\mathfrak{A} \gtreqless p\mathfrak{E}$ auch $q\mathfrak{B} \gtreqless p\mathfrak{E}'$ folgt, und $(\mathfrak{A},\ \mathfrak{E})$ soll größer als $(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E}')$ genannt werden, wenn man wenigstens ein Paar ganzer Zahlen p, q finden kann, für welche gleichzeitig $q\mathfrak{A} > p\mathfrak{E}$ und $q\mathfrak{B} < p\mathfrak{E}'$. Ausschließlich auf Grund dieser Definitionen beweist Euklid im sechsten Buche der Elemente in einfacher Weise und mit vollkommener Strenge den Satz, daß zwei Dreiecke mit gleichen Höhen sich wie ihre Grundlinien verhalten, woraus sich sofort der Lehrsatz von der Proportionalität der auf zwei Strahlen durch parallele Linien gebildeten Abschnitte ergibt, auf welchem die ganze Ähnlichkeitslehre einwandfrei aufgebaut werden kann. — Die Euklidischen Definitionen für die Gleichheit bezüglich Ungleichheit zweier Verhältnisse

sprechenden Gleichungen zwischen Zahlenquotienten, deren Beweise gar keine Schwierigkeiten bieten, nachdem die Rechenoperationen für alle reellen Zahlen begründet sind.

§ 9. Historisches über die irrationalen Zahlen[1]).

Die klare Einsicht in das Wesen der irrationalen Zahlen und die rein arithmetische Begründung ihrer Theorie stammen erst aus der neuesten Zeit. Zwar war der Unterschied zwischen kommensurablen und inkommensurablen Verhältnissen schon den alten Griechen bekannt — die Erkenntnis, daß die Diagonale und die Seite eines Quadrats zueinander inkommensurabel seien, wird auf Pythagoras zurückgeführt —; die Auffassung inkommensurabler Verhältnisse als Zahlen war aber den Griechen durchaus fremd. Auch Euklid kennt keine irrationalen Zahlen; als Ersatz derselben bei der Begründung der Ähnlichkeitslehre dient ihm seine Theorie der Verhältnisse (Elemente, 5. Buch)[2]). Im Mittelalter operierte man zwar vielfach mit Wurzeln (numeri surdi), wußte auch wohl, daß die Wurzeln aus rationalen Zahlen im allgemeinen nicht wieder rationale Zahlen seien, stand aber doch im großen und ganzen auf dem Standpunkte der Approximationsmathematik, der für das praktische Rechnen ja auch heute noch vollkommen ausreicht (vgl. § 1, S. 292). Den Unterschied zwischen ratio-

---

können wir leicht aus unserer Definition des Verhältnisses als einer reellen Zahl und unserer Definition für die Gleichheit bezüglich Ungleichheit zweier reellen Zahlen herleiten. Die beiden Zahlen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) = \alpha$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}') = \beta$ haben wir nämlich § 1, S. 298 u. 299 dann und nur dann einander gleich genannt, wenn aus $\alpha \gtrless \frac{p}{q}$ auch stets $\beta \gtrless \frac{p}{q}$ folgt, wo $\frac{p}{q}$ irgend einen rationalen Bruch bedeutet. Nun ist $\alpha \gtrless \frac{p}{q}$ aber gleichbedeutend mit $\mathfrak{A} \gtrless \frac{p}{q}\mathfrak{E}$ oder $q\mathfrak{A} \gtrless p\mathfrak{E}$ und $\beta \gtrless \frac{p}{q}$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{B} \gtrless \frac{p}{q}\mathfrak{E}'$ oder $q\mathfrak{B} \gtrless p\mathfrak{E}'$. Ebenso ergibt sich aus der von uns § 1, S. 299 aufgestellten Definition, daß $\alpha > \beta$ heißen soll, wenn wenigstens eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ angegeben werden kann, so daß gleichzeitig $\alpha > \frac{p}{q}$, $\beta < \frac{p}{q}$, die Euklidische Bedingung für $(\mathfrak{A}, \mathfrak{E}) > (\mathfrak{B}, \mathfrak{E}')$.

1) Zur Geschichte der irrationalen Zahlen vgl. den Artikel von Pringsheim in der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. I, Teil I, Nr. 3 und den noch ausführlicheren Aufsatz von Molk in der französischen Ausgabe der Encyklopädie.

2) O. Stolz (Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, I. Teil, VI. Abschnitt, auch O. Stolz und A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Leipzig 1902, II. Abteilung, VI. Abschnitt) gibt eine Darstellung der Euklidischen Verhältnislehre in moderner Auffassung und Bezeichnung und begründet darauf eine Theorie der irrationalen Zahlen.

nalen und irrationalen Zahlen hat wohl zuerst Michael Stifel deutlich zum Ausdruck gebracht, welcher in seiner Arithmetica integra (Nürnberg 1544) sagt, daß zwischen zwei benachbarte ganze Zahlen einerseits unzählig viele rationale, andererseits unzählig viele irrationale Zahlen fallen, und daß keine von diesen Zahlen aus der einen Kategorie in die andere übergehen könne. Etwa 100 Jahre später bezeichnete Descartes (Géométrie, 1637) beliebige Streckenverhältnisse mit Buchstaben und rechnete mit ihnen wie mit Zahlen, und Newton stellte an die Spitze seiner Arithmetica universalis (1707) geradezu die Definition: „Per numerum abstractam quantitatis cuiusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, quae pro unitate habetur, rationem intelligimus“, von welcher er dann allerdings weiterhin keinen Gebrauch macht. An dieser geometrischen Begründung und Veranschaulichung des Zahlbegriffs hat man lange Zeit festgehalten. Man kann ja nun tatsächlich, wenn von zwei Größen derselben Art (z. B. Strecken) die eine als Einheit betrachtet wird, der andern nach dem § 8 auseinandergesetzten Verfahren einen endlichen oder einen unendlichen Kettenbruch zuordnen, je nachdem die beiden Größen kommensurabel oder inkommensurabel sind. Der endliche Kettenbruch ist eine rationale Zahl; der sich ins Unendliche erstreckende, welcher noch keine Bedeutung hat, könnte als neue, als irrationale Zahl definiert werden, und die Berechtigung, mit einem solchen Symbole wie mit einer Zahl zu operieren, könnte darin gefunden werden, daß ihm ebenso wie dem endlichen Kettenbruche eine bestimmte Größe (Strecke) entspricht. Zwei solche Zahlen würden dann als gleich oder ungleich zu erklären sein, je nachdem die entsprechenden Größen (Strecken) gleich oder ungleich sind, usw. Um nun sicher zu sein, daß ein aus solchen Symbolen durch irgend welche Rechenoperationen abgeleitetes neues Symbol stets auch wieder eine Zahl ist, müßte man wissen, daß nicht nur jeder Strecke ein derartiges Symbol, sondern auch umgekehrt jedem so gebildeten Symbole wieder eine bestimmte Strecke entspricht, d. h., man müßte von dem Cantor-Dedekindschen Axiom (siehe S. 324) Gebrauch machen, würde also zur Begründung der Theorie der irrationalen Zahlen ein der Arithmetik fremdes Element nötig haben. Zur Vermeidung dieses Übelstandes haben fast zu gleicher Zeit mehrere hervorragende Mathematiker rein arithmetische Theorien der irrationalen Zahlen gegeben.

Dedekind[1]) geht von der Uberlegung aus, daß man die Ge-

1) Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, 3. Aufl. 1905. Vgl. auch Pasch, Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1882 und Math. Ann. Bd. 40 (1892), S. 149; Ricci, Della teoria dei numeri reali secondo il concetto di Dedekind, Giornale di Matematiche di Battaglini, Bd. 35 (4. Bd. der 2. Serie), Napoli 1897, S. 22—74.

samtheit aller rationalen Zahlen auf unendlich viele Arten so in zwei Klassen teilen kann, daß eine beliebige Zahl der ersten Klasse kleiner ist als irgend eine Zahl der zweiten Klasse. Jede solche Scheidung der rationalen Zahlen nennt er einen „Schnitt". Wenn es in der ersten Klasse eine größte oder in der zweiten Klasse eine kleinste rationale Zahl gibt, so bringt diese rationale Zahl den Schnitt hervor. Findet sich aber weder in der ersten Klasse eine größte noch in der zweiten eine kleinste rationale Zahl (z. B. wenn zur ersten Klasse alle rationalen Zahlen gehören, deren Quadrat kleiner als 2, und zur zweiten alle rationalen Zahlen, deren Quadrat größer als 2 ist), so „erschafft" Dedekind eine neue, eine irrationale Zahl, welche als durch den Schnitt vollständig definiert angesehen wird. Auf Grund dieser Definition sind nun die Größenbeziehungen zwischen den irrationalen Zahlen untereinander und zu den rationalen sowie die Rechenoperationen für die irrationalen Zahlen zu entwickeln. Die Dedekindsche Theorie hat namentlich den Vorteil, daß jeder bestimmten irrationalen Zahl nur ein einziger Schnitt entspricht; sie ist aber, wenigstens für den ersten Unterricht, etwas abstrakt und ihre Verwendung in der Analysis häufig nicht gerade bequem, weil die irrationalen Zahlen sich im allgemeinen nicht in Form von Schnitten darzubieten pflegen.

Weierstraß[1]) geht von einer aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Reihe rationaler Zahlen aus, bei der man angeben kann, welche rationale Zahlen überhaupt auftreten, und wie oft jede vorkommt. (Man denke z. B. an einen unendlichen Dezimalbruch, in dem jede beliebige Stelle durch einen bestimmten Algorithmus gefunden werden kann.) Einer solchen Reihe ordnet er eine neue Zahlgröße zu, für welche die Begriffe der Gleichheit und der Ungleichheit entwickelt und die Rechenoperationen definiert werden. Es läßt sich dann in aller Strenge zeigen, daß die Differenz zwischen der neu eingeführten Zahlgröße und der Summe einer hinreichend großen Anzahl von Gliedern der gegebenen Reihe beliebig klein gemacht werden kann, woraus sich die Berechtigung ergibt, die eingeführte Zahl als Grenzwert der Reihe zu bezeichnen.

Besser noch paßt sich dem Kalkül die auf Weierstraß fußende und als eine, namentlich für die Analysis glückliche Fortbildung der

1) Weierstraß hat seine Theorie in seinen Vorlesungen über „Analytische Funktionen" an der Universität Berlin vorgetragen, aber nicht selbst durch den Druck veröffentlicht. Mitteilungen über sie finden sich bei Kossak, Programmabhandlung des Friedrich-Werderschen Gymnasiums zu Berlin 1872, bei Pincherle, Giornale di Matematiche 18 (1880), S. 185 ff, und bei Biermann, Theorie der analytischen Funktionen, Leipzig 1887 (S. 19 ff).

Weierstraßschen Theorie bezeichnete Cantorsche[1]) Definition der irrationalen Zahlen an. Es gibt aus unendlich vielen rationalen Zahlen bestehende Reihen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in inf., deren Glieder mit wachsendem Index sich einer bestimmten rationalen Zahl beliebig nähern. Wenn beispielsweise

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{2^\nu}, \quad \text{so ist} \quad \lim_{n=\infty} a_n = 1.$$

Bei einer solchen Reihe läßt sich stets nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ eine Zahl N so finden, daß für alle positiven ganzzahligen Werte von ν und für $n \geq N$ die Differenz $a_{n+\nu} - a_n$ dem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist. Wenn nun die Glieder einer unendlichen Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die letztere Bedingung erfüllen, ohne daß ein rationaler Grenzwert existiert (z. B. für

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{c_\nu}{10^\nu},$$

falls die c_ν nur die Werte 0, 1, 2, ..., 9 annehmen, ohne eine Periode zu bilden), so ordnet ihr Cantor eine Zahl b zu, welche dadurch zu einer bestimmten Größe wird, daß für sie die vier Grundrechnungsarten sowie Gleichheit und Ungleichheit definiert werden.

Eine mit der Cantorschen fast identische Theorie hat auch schon Ch. Méray[2]) kurz vor Cantor publiziert[3]).

Für den Anfänger schien es uns am zweckmäßigsten, behufs Feststellung des Begriffs der irrationalen Zahlen von den Algorithmen auszugehen, durch die wir im Gebiete der rationalen Zahlen die Werte berechnet haben, welche die nicht existierenden Lösungen gewisser Gleichungen wie $x^2 = a$ und $g^x = a$ (a, g beliebige positive rationale Zahlen) für praktische Zwecke zu ersetzen vermögen. Deshalb haben wir unserer Darstellung die Definition der irrationalen Zahlen durch zwei gegeneinander konvergierende monotone Reihen zugrunde gelegt, die einerseits für das numerische Rechnen mit irra-

1) G. Cantor, Math. Ann. Bd. 5 (1872), S. 123; Math. Ann. Bd. 21 (1883), S. 545 ff. — Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, Journal f. Mathematik, Bd. 74 (1872), S. 172. — Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, I. Teil, VII. Abschnitt. — Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, Leipzig 1902, II. Abteilung, VII. Abschnitt.

2) Revue des sociétés savantes: sciences mathématiques (2) 4, 1869, S. 284 und Nouveau précis d'Analyse infinitésimale, Paris 1872, Art. 1—9.

3) Einen eigenartigen und zwar ablehnenden Standpunkt gegenüber allen diesen arithmetischen Theorien nimmt G. Frege ein in dem Werke „Grundgesetze der Arithmetik", 2. Bd., Jena 1903, S. 69—162.

tionalen Zahlen unmittelbar geeignet ist, weil sie eine zu findende irrationale Zahl sofort zwischen eine untere und eine obere Grenze einzuschließen gestattet (siehe § 6) und andererseits auch eine einfache und naturgemäße Erklärung des Größenverhältnisses als einer reellen Zahl ermöglicht (siehe § 8)[1]).

1) Dieser, als Modifikation der Cantorschen Theorie anzusehende Gedankengang findet sich auch, wenigstens andeutungsweise, bei Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892. Bachmann stützt indessen, ebenso wie Cantor, die Definitionen für das Größer-, Kleiner-, Gleichsein auf den Begriff der Differenz zweier irrationalen Zahlen, während wir die Definitionen für diese Beziehungen schon in § 1 vor Entwicklung der Rechenoperationen gegeben haben, um gleich von vornherein die neu definierten Zahlen in die Reihe der rationalen einordnen zu können. Vgl. auch Capelli, Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue. Giornale di Matematiche di Battaglini, Bd. 35, 4. Bd. der zweiten Serie, Napoli 1897.

VII. Kapitel.

Die komplexen Zahlen.

§ 1. Historische Einleitung.

Nach Einführung der irrationalen Zahlen sind wir imstande, aus einer beliebigen positiven Zahl jede Wurzel zu ziehen (siehe Kap. VI, § 7 C), und auch zu irgend einer positiven Zahl für jede positive Basis den Logarithmus zu finden (Kap. VI, § 7 E). Unlösbar für uns ist aber noch immer die Aufgabe, die Zahl x so zu bestimmen, daß $x^{2n} = -a$, wo $2n$ irgend eine gerade Zahl und $-a$ irgend eine negative Zahl bedeutet; denn die $(2n)^{te}$ Potenz jeder reellen, positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen, Zahl ist positiv. Ja, wir können eine Gleichung wie $x^2 = -100$ auch nicht etwa dadurch zu einer lösbaren machen, daß wir die gegebenen Zahlen 2 und -100 durch andere, ihnen beliebig nahekommende ersetzen (vgl. Kap. II, § 5 C und Kap. III, § 3 F). Ebensowenig können wir bisher den Logarithmus einer negativen Zahl für eine positive Basis angeben. Dementsprechend hielt man das ganze Altertum und Mittelalter hindurch an der Auffassung fest, daß es Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht gebe; von Logarithmen war damals überhaupt noch nicht die Rede. Noch Cardano bezeichnet 1539 in seiner „Practica Arithmeticae generalis" die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als „unmöglich". Derselbe Cardano ist dann aber einige Jahre später (Ars magna, 37. Kapitel, 1545) der erste, welcher den Mut hat, mit Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zu rechnen, und zwar ebenso wie mit den sonstigen Zahlen. Er zeigt, daß die unauflösbar erscheinende Aufgabe, die Zahl 10 in zwei Summanden zu zerlegen, deren Produkt 40 sei, formal durch die beiden Ausdrücke $5 \pm \sqrt{-15}$ in dem Sinne gelöst wird, daß, wenn man auf diese Ausdrücke die gewöhnlichen Rechnungsregeln anwendet und dabei das Produkt $\sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15}$ gleich -15 setzt, tatsächlich ihre Summe 10 und ihr Produkt 40 wird. Cardano operiert hier mit dem Symbol $\sqrt{-15}$, das doch zunächst nichts anderes als ein Zeichen für eine Aufgabe, eine Forderung ist (nämlich eine Zahl zu suchen, deren Quadrat den Wert -15 hat), ohne weiteres wie mit einem Zeichen für eine wirklich vorhandene Zahl. Bei dieser Auffassung ist die Mathematik

etwa zwei und ein halbes Jahrhundert stehen geblieben. Im Verlaufe des 17. und des 18. Jahrhunderts machte man von den Quadratwurzeln aus negativen Zahlen einen immer umfassenderen Gebrauch. Je weiter Arithmetik, Algebra und Analysis fortschritten, um so mehr drängten sie sich geradezu den Mathematikern auf, denen es gar nicht mehr möglich war, ohne sie auszukommen. Das Wort „imaginär" führte 1637 Descartes in seiner „Géométrie" für solche Gleichungswurzeln ein, denen eine Größe nicht entspricht [1]). Im 18. Jahrhundert erwarben sich um die formale Ausbildung der Lehre von den imaginären Zahlen besondere Verdienste Cotes, de Moivre und vor allen L. Euler, von dem übrigens auch die Bezeichnung i für $\sqrt{-1}$ herrührt [2]). Aber auch die hervorragendsten Geister jener Zeit waren noch zu keiner klaren Vorstellung von dem Wesen und der Existenzberechtigung der imaginären Zahlen gelangt. Das Vorkommen imaginärer Faktoren bezeichnet Leibniz (in einem Aufsatze von 1702 über die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche) als „eine elegante und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, eine Mißgeburt der Ideenwelt, fast ein Doppellebewesen zwischen Sein und Nichtsein" (Cantor III, S. 273), und Euler sagt in seiner Algebra (Art. 143, 144), daß „die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, da sie weder größer noch kleiner als Null noch auch Null selber seien, nicht unter die möglichen Zahlen gerechnet werden können".

So können wir verstehen, daß, obwohl es unmöglich war, den großen Nutzen, welchen die imaginären Zahlen leisteten, zu verkennen, man ihrer Verwendung mißtrauisch gegenüberstand und die mit ihrer Hilfe gefundenen Resultate vielfach noch nachträglich, ohne sie zu benutzen, zu verifizieren suchte.

Volle Klarheit über das Wesen der imaginären Zahlen brachte erst das 19. Jahrhundert. Wir haben schon früher [3]) darauf hingewiesen, in welchen beiden Bedeutungen von der Realität irgend welcher Zahlbegriffe gesprochen werden kann. Zunächst gelang der Nachweis, daß den imaginären Zahlen (nach G. Cantors Terminologie) „transiente" Realität zukommt, oder daß sie (nach H. Hankel) zu den „actuellen" Zahlen zu rechnen sind, d. h., es gelang zu zeigen, daß sie als Ab-

---

1) „Caeterum radices tam verae (die positiven) quam falsae (die negativen) non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae: hoc est, semper quidem in qualibet aequatione tot radices quot dixi imaginari licet; verum nulla interdum est quantitas, quae illis, quas imaginamur, respondet." (Lateinische Ausgabe der „Géométrie" von 1659, Bd. I, S. 76; vgl. Cantor II, S. 795.)

2) „Formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posteriorem designabo, ita ut sit $i \cdot i = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$". Cantor IV, S. 315.

3) Kap. VI, § 1, S. 297, Anm. 1.

bild gewisser Beziehungen unter wirklichen Größen betrachtet werden können. Finden sich gewisse Ansätze und Versuche, die imaginären Zahlen geometrisch zu repräsentieren, auch schon bei John Wallis[1]) und bei Heinrich Kühn[2]), so gab die erste wirkliche und vollkommene Darstellung der imaginären Zahlen durch gerichtete Strecken doch der norwegisch-dänische Landmesser Caspar Wessel[3]) in einer der dänischen Akademie 1797 eingereichten Abhandlung „Om Directionens analytiske Betegning“, in welcher er die Addition und die Multiplikation solcher Strecken in der uns jetzt geläufigen Weise definiert und so für die Rechenoperationen an imaginären Zahlen ein reelles Substrat nachweist. Leider fand die schöne Arbeit Wessels bei seinen Zeitgenossen keine Beachtung; sie wurde lange Zeit ignoriert und erst etwa 100 Jahre nach ihrem Erscheinen der Vergessenheit entrissen[4]). Bis dahin hielt man Argands „Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires“ (Paris 1806, vgl. auch Annales de Gergonne, Bd. 4, S. 61 u. 133, Bd. 5, S. 197) für die erste Druckschrift, in welcher die Frage nach der geometrischen Repräsentation der imaginären Zahlen in völlig befriedigender Weise beantwortet wird. Den größten Einfluß auf die Verbreitung klarer Vorstellungen von dem Wesen der imaginären Zahlen hat aber Karl Friedrich Gauß ausgeübt. Wie wir jetzt wissen, hatte er zwar die geometrische Repräsentation der imaginären Zahlen frühzeitig gefunden, sie auch schon in einem Briefe an Bessel vom 18. Dezember 1811 (herausgegeben 1880) bei einer Darlegung der Grundprinzipien der Theorie von Funktionen einer komplexen Veränderlichen benutzt; aber dem mathematischen Publikum hat er doch erst 1831 in der Selbstanzeige seiner zweiten Abhandlung über die Theorie der biquadratischen Reste (Gauß' Werke, Bd. II, S. 165—178) die transiente Realität der sogenannten imaginären Größen in voller Ausführlichkeit und Deutlichkeit auseinandergesetzt und damit zur allgemeinen Anerkennung ihrer Gleichberechtigung mit den reellen Zahlen außerordentlich beigetragen. Gauß schreibt einen großen Teil der Schuld

1) Wallis, Algebra, Opera math. Bd. II, Kap. 66—69, 1693. Vgl. H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, S. 81 u. 82.

2) H. Kühn (Lehrer der Mathematik am Gymnasium in Danzig), „Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis“, veröffentlicht in den Akten der Petersburger Akademie für die Jahre 1750 und 1751. Vgl. Cantor III, S. 726—728.

3) 1745 zu Jonsrud in Norwegen geboren, lebte Wessel seit 1763 in Kopenhagen, wo er nach Vollendung seiner Studien die Stellung eines Landmessers bekleidete.

4) Sie wurde 1897 in französischer Übersetzung unter dem Titel „Essai sur la représentation analytique de la direction“ neu herausgegeben. Vgl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 28 (1897), S. 45 u. 497.

an der über diesen Gegenstand herrschenden Unklarheit der wenig schicklichen Benennung zu. Nachdem Größen aufgefunden waren, die den Quadratwurzeln aus negativen Zahlen entsprechen, fiel natürlich der Grund für die von Descartes eingeführte Bezeichnung fort, und es erscheint der von Gauß vorgeschlagene Name[1]) „komplexe Zahlen" für solche aus reellen Zahlen und $\sqrt{-1}$ zusammengesetzten Ausdrücke in der Tat weit angemessener.

Nunmehr wandte man sich auch der Prüfung der „immanenten" Realität der komplexen Zahlen zu, indem man diese nämlich unter einen noch allgemeineren Zahlbegriff, den der komplexen Zahlen aus beliebig vielen Einheiten, subsumierte, wobei sich das wichtige und interessante Ergebnis herausstellte, daß unter allen denkbaren Systemen komplexer Zahlen das der gewöhnlichen komplexen Zahlen das einzige ist, für welches die bei reellen Zahlen gültigen Rechnungsregeln sämtlich erhalten bleiben[2]). Als bahnbrechende Forscher auf dem Gebiete der allgemeinen komplexen Zahlen sind vor allen zu nennen Sir William Rowan Hamilton, welcher sich seit 1833 mit hierher gehörigen Untersuchungen beschäftigte, 1843 seine „Quaternionen" entdeckte, deren Theorie er dann ausführlich in den „Lectures on Quaternions" (Dublin 1853) und in den „Elements of Quaternions", 1866 (deutsche Übersetzung von P. Glan, 1882—1884) dargestellt hat, und Hermann Graßmann, welcher seine noch allgemeineren Untersuchungen in dem Werke „Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik", 1844, und in dessen Umarbeitung von 1862 niederlegte.

Um die Verbreitung klarer Anschauungen über das Wesen der komplexen Zahlen und den weiteren Ausbau der Theorie haben sich dann große Verdienste erworben namentlich H. Hankel durch seine „Theorie der komplexen Zahlensysteme", Leipzig 1867, und K. Weierstraß durch seine seit Beginn der sechziger Jahre des vorigen Jahrhunderts an der Universität Berlin gehaltenenen Vorlesungen[3]). Wegen der neueren Untersuchungen verweisen wir auf den Artikel „Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen" von E. Study

1) Gauß' Werke, Bd. II, S. 102.

2) Daß Gauß auch schon zu dieser Erkenntnis gelangt war, geht aus dem letzten Satze der vorher angeführten Selbstanzeige hervor.

3) Über die Weierstraßsche Einführung der komplexen Zahlen ist einiges veröffentlicht durch Kossak im Programm des Friedrich-Werderschen Gymnasiums zu Berlin vom Jahre 1872 auf Grund der Weierstraßschen Vorlesungen vom Wintersemester 1865/66 und durch Pincherle im Giornale di Matematiche (G. Battaglini), Bd. 18 (1880), S. 203—210, nach einer Vorlesung von 1877/78. Weierstraß selbst hat hierüber nur den eine besondere Frage dieses Gebiets behandelnden Aufsatz „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen", Göttingen 1884, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 311, publiziert

in Bd. I, S. 147–183 der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Wir wollen nun in § 2, der Hauptsache nach im Anschluß an Weierstraß (und zwar insbesondere an die im Wintersemester 1882/83 gehaltene Vorlesung), die Theorie der aus zwei Einheiten zusammengesetzten komplexen Zahlen entwickeln und zeigen, durch welche Forderungen man mit Notwendigkeit auf die gewöhnlichen komplexen Zahlen geführt wird, dann in § 3 ein Größensystem nachweisen, für welches sich Verknüpfungen definieren lassen, die den Rechenoperationen an den gewöhnlichen komplexen Zahlen vollkommen entsprechen und schließlich in § 4 zeigen, daß in dem Gebiete dieser komplexen Zahlen unsere sieben Rechenoperationen stets ausführbar sind, so daß damit die Arithmetik, soweit sie sich auf letztere bezieht, zu einem befriedigenden Abschluß geführt ist.

§ 2. Theorie der aus zwei Einheiten gebildeten komplexen Größen.

A. Definition. Gleichheit. Addition und Subtraktion. Übergang zu anderen Einheiten.

Wir sind zu den natürlichen Zahlen (Kap. I, § 1) gelangt, indem wir von Mengen ausgingen, deren sämtliche Elemente für den im Vordergrunde des Interesses stehenden Zweck als gleichwertig angesehen werden dürfen, zu den gebrochenen (Kap. II, § 1) durch Untersuchung von Mengen, zwischen deren Elementen gewisse Wertrelationen bestehen, und zu den relativen (Kap. IV, § 1), indem wir Mengen in Betracht zogen, in denen einander entgegengesetzte Elemente vorkommen. Alle diese Mengen konnten wir außer durch einen Gattungsnamen durch eine einzige Zahl vollständig charakterisieren. Wir wenden uns nunmehr zum Studium von Mengen, die sicher zwei Elemente enthalten, zwischen denen keine der erwähnten Beziehungen besteht, d. h., es sollen weder beide als gleichartig betrachtet werden dürfen noch das eine irgend einem rationalen oder auch irrationalen Vielfachen des andern oder des zum andern entgegengesetzten äquivalent sein. Wie früher abstrahieren wir wieder von allen besonderen Eigenschaften dieser Elemente, bleiben uns nur der soeben gekennzeichneten Unabhängigkeit des einen vom andern bewußt und bezeichnen das, was bei dieser Abstraktion aus den beiden Elementen wird, als die Einheiten e_1 bezüglich e_2. In der betrachteten Menge dürfen nun auch beliebig viele zu e_1 oder e_2 gleichwertige und auch alle durch

$$\frac{e_1}{n_1}, \quad \frac{-e_1}{n_1}, \quad \frac{e_2}{n_2}, \quad \frac{-e_2}{n_2}$$

(n_1, n_2 beliebige ganze Zahlen) zu bezeichnende Elemente vorkommen. Weiter setzen wir voraus, daß, wenn $\gamma = (c_n; C_n)$ irgend eine irrationale Zahl bedeutet (siehe Kap. VI, § 1), auch Größen a bezüglich b existieren, so daß für alle Werte von n

$$c_n e_1 < a < C_n e_1 \quad \text{und} \quad c_n e_2 < b < C_n e_2,$$

wir also im Einklange mit Kap. VI, § 8 unter γe_1 bezüglich γe_2 diese Größen a, b zu verstehen haben.

Durch Anwendung der in den früheren Kapiteln auseinandergesetzten Methoden können wir alle zu e_1 in Beziehung stehenden Glieder der Menge zu einem einzigen, $\alpha_1 e_1$, und ebenso alle zu e_2 in Beziehung stehenden Glieder zu dem einen Gliede $\alpha_2 e_2$ zusammenziehen, unsere Menge also durch das Symbol $(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2)$ charakterisieren, wo nun α_1, α_2 irgend welche positiven oder negativen, rationalen oder irrationalen Zahlen bedeuten[1]). Das Symbol $(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2)$ wollen wir nunmehr auch als eine Zahl auffassen, und zwar nennen wir es zum Unterschiede von den bisher eingeführten reellen Zahlen eine komplexe Zahl, weil es in nichts anderem besteht als dem Komplexe der beiden reellen Zahlen α_1, α_2, d. h. ihrer Zusammenfassung zu einem Begriffe. Die reellen Zahlen sind unter den komplexen enthalten; sie entsprechen dem Falle, daß die Menge nur Elemente von einerlei Art enthält, ihr also das Symbol $(\alpha_1 e_1, 0)$ oder einfacher $\alpha_1 e_1$ zukommt[2]). Die Berechtigung, einen solchen Inbegriff zweier Zahlen selbst als Zahl zu betrachten, beruht darauf, daß, wie wir zeigen werden, es möglich ist, auch für diese Zahlen die Gleichheit und die Rechenoperationen so zu definieren, daß die für reelle Zahlen bewiesenen Rechnungsgesetze gültig bleiben und die Operationen für $\alpha_2 = 0$ in die für die reellen Zahlen übergehen.

Da nach unserer Voraussetzung für kein reelles Zahlenpaar α_1, α_2 außer für

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$\alpha_1 e_1$ mit $\alpha_2 e_2$ gleichwertig ist, können wir zwei komplexe Zahlen

$$a = (\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2) \quad \text{und} \quad b = (\beta_1 e_1, \beta_2 e_2)$$

1) Wenn bei gewissen Untersuchungen α_1 und α_2 auf ganzzahlige Werte beschränkt werden, braucht man natürlich die Existenz der Bruchteile von e_1 und e_2 nicht vorauszusetzen.

2) Der Name „reelle Zahl" trifft also nicht das Wesen der Sache. Wir müßten eigentlich sagen „mittels einer Einheit gebildete Zahlen", behalten aber den aus historischen Gründen (siehe § 1) sich erklärenden Namen „reelle Zahl" bei, weil er nun einmal vollständig eingebürgert ist. Des Wortes „imaginäre Zahlen" werden wir uns im folgenden bedienen, um die komplexen Zahlen mit Ausschluß der reellen zu bezeichnen. Unter einer „rein imaginären" Zahl versteht man eine Zahl von der Form $\alpha_2 e_2$.

nur dann einander gleich nennen, wenn sowohl $\alpha_1 = \beta_1$ als auch $\alpha_2 = \beta_2$. Unmittelbar sieht man, daß sich aus dieser Erklärung der Satz ergibt, daß, wenn $a = b$ und $b = c$, auch $a = c$ sein muß.

Unter der Summe der irgend welchen Mengen entsprechenden Zahlen haben wir stets die Zahl verstanden, welche der durch Vereinigung der Mengen entstehenden neuen Menge zukommt. Dementsprechend definieren wir auch jetzt:

$$\text{(I)} \quad (\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) + (\beta_1 e_1,\ \beta_2 e_2) = ((\alpha_1 + \beta_1) e_1,\ (\alpha_2 + \beta_2)\, e_2).$$

Daß, wenn a, a', b, c irgend welche komplexen Zahlen bedeuten, aus

$$a = a'$$

auch

$$a + b = a' + b$$

folgt, und daß

$$a + b = b + a$$

sowie

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

ist auf Grund unserer Summendefinition sehr leicht zu zeigen.

Ebenso soll sein

$$(\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) - (\beta_1 e_1,\ \beta_2 e_2) = ((\alpha_1 - \beta_1)\, e_1,\ (\alpha_2 - \beta_2)\, e_2).$$

Unter dem Produkte $\mu \cdot (\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2)$ wie auch unter dem Produkte $(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2) \cdot \mu$, wo μ irgend eine reelle Zahl bedeutet, wollen wir die komplexe Zahl $((\mu\alpha_1)e_1,\ (\mu\alpha_2)e_2)$ verstehen. Es ist dann, wie leicht ersichtlich,

$$(\mu\nu)a = \mu(\nu a),$$

$$(\mu + \nu)a = \mu a + \nu a,$$

$$\mu(a + b) = \mu a + \mu b,$$

wenn μ, ν irgend welche reellen, a, b irgend welche komplexen Zahlen bedeuten.

Wir können unsere komplexen Zahlen auch noch in etwas anderer Form schreiben als bisher. Nach (I) ist nämlich

$$(\alpha_1 e_1,\ \alpha_2 e_2) = (\alpha_1 e_1,\ 0) + (0,\ \alpha_2 e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2.$$

Den Gegenstand unserer Betrachtungen bilden also die sämtlichen linearen Verbindungen der beiden Einheiten e_1 und e_2 mit beliebigen reellen Zahlen α_1, α_2 als Koeffizienten. Es drängt sich zunächst die Frage auf, ob, wenn $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ und $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ irgend welche Zahlen unseres Bereiches sind, nicht eine beliebige dritte Zahl

$c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ auch als lineare Verbindung von a, b mit reellen Koeffizienten darstellbar ist, d. h., ob es möglich ist, die reellen Zahlen ξ, η so zu bestimmen, daß

$$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = \xi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + \eta(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2).$$

Nach der Definition für die Gleichheit zweier komplexen Zahlen ist dafür hinreichend und notwendig, daß

$$\xi\alpha_1 + \eta\beta_1 = \gamma_1 \quad \text{und} \quad \xi\alpha_2 + \eta\beta_2 = \gamma_2.$$

Unter der Voraussetzung, daß $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \gtrless 0$, werden diese beiden Gleichungen durch die Werte

$$\xi = \frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \quad \eta = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

befriedigt. Die Bestimmung von ξ, η ist bei beliebigen Werten von γ_1, γ_2 dagegen unmöglich, wenn $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. In diesem Falle aber lassen sich zwei Zahlen λ, μ so angeben, daß

$$\lambda a + \mu b = 0\,[1].$$

Alle Zahlen unseres Bereiches können wir also wirklich durch zwei beliebige unter ihnen linear mit reellen Koeffizienten ausdrücken, außer durch zwei solche, zwischen denen eine lineare Relation mit reellen Koeffizienten besteht. Wenn es sich als zweckmäßig herausstellen sollte, dürfen wir demnach als Einheiten statt e_1 und e_2 auch zwei andere linear voneinander unabhängige Zahlen unseres Bereiches wählen[2].

B. Multiplikation.

Während sich die Definitionen für die Summe und die Differenz zweier komplexen Zahlen aus der Bedeutung der entsprechenden an Mengen auszuführenden Operationen naturgemäß und ungezwungen ergaben, liegt eine Notwendigkeit für eine bestimmte Definition des Produktes zweier komplexen Zahlen von vornherein durchaus nicht vor. Denselben Sinn wie für natürliche Zahlen hat ja die Multiplikation schon nicht mehr bei den gebrochenen, den relativen, den

---

1) Für λ, μ kann man irgend ein den beiden Gleichungen

$$\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 = 0, \quad \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 = 0$$

genügendes Wertsystem wählen.

2) Die unter A angestellten Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf Zahlgrößen ausdehnen, die aus beliebig vielen Einheiten zusammengesetzt sind.

irrationalen Zahlen (vgl. Kap. II, § 4, Kap. IV, § 5 A und Kap. VI, § 4). Es wird sich also nur um die Frage handeln können, ob es möglich ist, ein Rechnungsverfahren zur Herleitung einer Zahl c aus zwei gegebenen Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

aufzufinden, welches wir aus dem Grunde berechtigt sind, auch „Multiplikation" zu nennen, weil es erstens in dem speziellen Falle

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

in die früher definierte Multiplikation übergeht, und weil zweitens bei ihm die für die Multiplikation der bisher eingeführten Zahlen bewiesenen Regeln sämtlich gültig bleiben. Die letztere Forderung ist erfüllt (vgl. Kap. I, § 5 C), falls die drei als kommutatives, assoziatives und distributives Gesetz bezeichneten Gleichungen befriedigt werden. Damit wir bei der Multiplikation nicht aus unserem Zahlbereiche herauskommen, setzen wir weiter fest, daß das Produkt zweier beliebigen komplexen Zahlen wieder eine komplexe Zahl der Form $\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$ sei, wo γ_1, γ_2 reelle Koeffizienten bedeuten[1]). Was für beliebige komplexe Zahlen gelten soll, muß natürlich auch für die Einheiten e_1, e_2 zutreffen. Deshalb setzen wir:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} e_1 e_1 &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \\ e_1 e_2 = e_2 e_1 &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, \\ e_2 e_2 &= \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2, \end{aligned}$$

wo die auf den rechten Seiten auftretenden Koeffizienten zunächst irgend welche reellen Zahlen sind, und

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} (\alpha_1 e_1)(\beta_1 e_1) &= (\alpha_1 \beta_1)(e_1 e_1) = (\alpha_1 \beta_1)(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2), \\ (\alpha_1 e_1)(\beta_2 e_2) &= (\alpha_1 \beta_2)(e_1 e_2) = (\alpha_1 \beta_2)(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2), \\ (\alpha_2 e_2)(\beta_2 e_2) &= (\alpha_2 \beta_2)(e_2 e_2) = (\alpha_2 \beta_2)(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2). \end{aligned}$$

Wir haben nun die Aufgabe, zu untersuchen, ob wir die Koeffi-

1) Diese Festsetzung ist keine notwendige. H. Graßmann hat in seiner Ausdehnungslehre „Multiplikationen" definiert, bei welchen das Produkt von anderer Natur ist als die Faktoren. Vgl. neben den sonstigen Arbeiten Graßmanns insbesondere seinen Aufsatz „Sur les divers genres de multiplication", Journ. f. Math., Bd. 49, S. 123. H. Hankel (Theorie der komplexen Zahlensysteme, S. 106) nennt ein System komplexer Zahlen, welches die obige Forderung befriedigt, ein „begrenztes" System.

zienten λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 so bestimmen können, daß für das Produkt zweier beliebigen komplexen Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

die vorher aufgestellten Forderungen sämtlich erfüllt werden. Jedem Wertsystem der Koeffizienten λ, μ, ν entspricht eine bestimmte Multiplikation, und durch die Art und Weise der Produktbildung unterscheiden sich die verschiedenen möglichen Systeme komplexer Zahlen. Allerdings kann zwei verschiedenen Wertsystemen der λ, μ, ν doch sehr wohl dasselbe System komplexer Zahlen entsprechen, weil ja bei dem Übergange zu anderen Einheiten innerhalb desselben Systems sich auch die Multiplikationskoeffizienten ändern[1]).

Da auch das distributive Gesetz erhalten bleiben soll, müssen wir das Produkt der beiden Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

bilden können, indem wir jedes Glied der einen Summe mit jedem der andern multiplizieren.

Es muß also sein:

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha_1\beta_1)(e_1 e_1) + (\alpha_1\beta_2)(e_1 e_2) + (\alpha_2\beta_1)(e_2 e_1) + (\alpha_2\beta_2)(e_2 e_2) \\ &= (\alpha_1\beta_1)(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) + (\alpha_2\beta_2)(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2), \end{aligned}$$

also:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= (\alpha_1\beta_1\lambda_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mu_1 + \alpha_2\beta_2\nu_1)e_1 \\ &+ (\alpha_1\beta_1\lambda_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\mu_2 + \alpha_2\beta_2\nu_2)e_2. \end{aligned}$$

Die vorhergehenden Entwicklungen hatten nur den Zweck, zu zeigen, wie wir zur Gleichung (IV) gelangen. Nunmehr definieren

---

1) Wenn z. B.

$$a = 3e_1 + e_2, \quad b = 5e_1 + 2e_2$$

als neue Einheiten eingeführt werden, so ist

$$\begin{aligned} ab &= 15(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) + 11(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) + 2(\nu_1 e_1 + \nu_2 e_2) \\ &= (15\lambda_1 + 11\mu_1 + 2\nu_1)e_1 + (15\lambda_2 + 11\mu_2 + 2\nu_2)e_2, \end{aligned}$$

oder, weil

$$e_1 = 2a - b, \quad e_2 = -5a + 3b,$$

$$ab = \mu_1' a + \mu_2' b,$$

wo jetzt

$$\mu_1' = 30\lambda_1 + 22\mu_1 + 4\nu_1 - 75\lambda_2 - 55\mu_2 - 10\nu_2,$$

$$\mu_2' = -15\lambda_1 - 11\mu_1 - 2\nu_1 + 45\lambda_2 + 33\mu_2 + 6\nu_2$$

natürlich im allgemeinen von μ_1, μ_2 verschieden sind, trotzdem daß wir es mit demselben System komplexer Zahlen zu tun haben.

wir die rechte Seite von (IV) als das Produkt der beiden beliebigen komplexen Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2.$$

In (IV) sind (II) und (III) als Spezialfälle enthalten. Die Definition wird natürlich erst dann zu einer bestimmten, wenn den Koeffizienten λ, μ, ν bestimmte Werte beigelegt werden.

Da die rechte Seite von (IV) ungeändert bleibt, wenn man α_1 mit β_1 und α_2 mit β_2 vertauscht, so ist, gleichgültig welche Werte die Koeffizienten λ, μ, ν auch haben,

$$ab = ba.$$

Aus der Definition für die Gleichheit zweier komplexen Zahlen b, c und der des Produktes ergibt sich sofort, daß, falls $b = c$, auch

$$ab = ac.$$

Wenn

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2, \quad c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2,$$

so ist

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2) \cdot (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \\
&= [(\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 \lambda_1 + ((\alpha_1 + \beta_1)\gamma_2 + (\alpha_2 + \beta_2)\gamma_1)\mu_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\gamma_2 \nu_1] e_1 \\
&+ [(\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 \lambda_2 + ((\alpha_1 + \beta_1)\gamma_2 + (\alpha_2 + \beta_2)\gamma_1)\mu_2 + (\alpha_2 + \beta_2)\gamma_2 \nu_2] e_2 \\
&= [\alpha_1 \gamma_1 \lambda_1 + (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1)\mu_1 + \alpha_2 \gamma_2 \nu_1] e_1 \\
&+ [\alpha_1 \gamma_1 \lambda_2 + (\alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1)\mu_2 + \alpha_2 \gamma_2 \nu_2] e_2 \\
&+ [\beta_1 \gamma_1 \lambda_1 + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1)\mu_1 + \beta_2 \gamma_2 \nu_1] e_1 \\
&+ [\beta_1 \gamma_1 \lambda_2 + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1)\mu_2 + \beta_2 \gamma_2 \nu_2] e_2 \\
&= ac + bc,
\end{aligned}$$

d. h., es bleibt bei beliebigen Werten von λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 auch das distributive Gesetz bestehen.

Um die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes zu prüfen, bilden wir einerseits:

$$\begin{aligned}
(ab)c &= [(\alpha_1 \beta_1)(e_1 e_1) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)(e_1 e_2) + (\alpha_2 \beta_2)(e_2 e_2)] \cdot (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \\
&= (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)(e_1 e_1 e_1) + (\alpha_1 \beta_2 \gamma_1 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_1)(e_1 e_2 e_1) + (\alpha_2 \beta_2 \gamma_1)(e_2 e_2 e_1) \\
&+ (\alpha_1 \beta_1 \gamma_2)(e_1 e_1 e_2) + (\alpha_1 \beta_2 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_2)(e_1 e_2 e_2) + (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)(e_2 e_2 e_2)
\end{aligned}$$

und andrerseits:

$$a(bc) = (bc)a$$
$$= [(\beta_1\gamma_1)(e_1e_1) + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)(e_1e_2) + (\beta_2\gamma_2)(e_2e_2)] \cdot (\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2)$$
$$= (\alpha_1\beta_1\gamma_1)(e_1e_1e_1) + (\alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1)(e_1e_2e_1) + (\alpha_1\beta_2\gamma_2)(e_2e_2e_1)$$
$$+ (\alpha_2\beta_1\gamma_1)(e_1e_1e_2) + (\alpha_2\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1)(e_1e_2e_2) + (\alpha_2\beta_2\gamma_2)(e_2e_2e_2).$$

Die Vergleichung der beiden rechten Seiten lehrt, daß sicher

$$(ab)c = a(bc),$$

falls

$$(e_1e_1)e_2 = (e_1e_2)e_1$$

und

$$(e_1e_2)e_2 = (e_2e_2)e_1.$$

Diese beiden Gleichungen sind aber auch notwendig; denn sie stellen, weil wegen des schon bewiesenen kommutativen Gesetzes

$$(e_1e_2)e_1 = e_1(e_1e_2) \quad \text{und} \quad (e_2e_2)e_1 = e_1(e_2e_2),$$

das assoziative Gesetz für die Einheiten dar, für die es natürlich auch gelten muß, wenn es für beliebige komplexe Zahlen bestehen soll. Es fragt sich jetzt, welche Folgerungen sich aus beiden Gleichungen für die Koeffizienten λ, μ, ν ergeben. Wir erhalten:

$$(e_1e_1)e_2 = (\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2)e_2 = \lambda_1(e_1e_2) + \lambda_2(e_2e_2)$$
$$= \lambda_1(\mu_1e_1 + \mu_2e_2) + \lambda_2(\nu_1e_1 + \nu_2e_2)$$
$$= (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\nu_1)e_1 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\nu_2)e_2$$

und in derselben Weise:

$$(e_1e_2)e_1 = (\lambda_1\mu_1 + \mu_1\mu_2)e_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2^2)e_2,$$
$$(e_1e_2)e_2 = (\mu_1^2 + \mu_2\nu_1)e_1 + (\mu_1\mu_2 + \mu_2\nu_2)e_2,$$
$$(e_2e_2)e_1 = (\lambda_1\nu_1 + \mu_1\nu_2)e_1 + (\lambda_2\nu_1 + \mu_2\nu_2)e_2.$$

Unsere beiden Gleichungen sind also dann und nur dann erfüllt, wenn gleichzeitig:

$$\lambda_2\nu_1 = \mu_1\mu_2,$$
$$\text{(V)} \qquad \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\nu_2 = \mu_1\lambda_2 + \mu_2^2,$$
$$\mu_1^2 + \mu_2\nu_1 = \lambda_1\nu_1 + \mu_1\nu_2.$$

Schreibt man die beiden letzten Relationen in der Form

$$\text{(V a)} \qquad \lambda_2(\mu_1 - \nu_2) = \mu_2(\lambda_1 - \mu_2) \quad \text{und} \quad \mu_1(\mu_1 - \nu_2) = \nu_1(\lambda_1 - \mu_2),$$

so erkennt man, daß die erste aus ihnen folgt, außer wenn gleichzeitig $\mu_1 = \nu_2$ und $\lambda_1 = \mu_2$, in welchem Falle auch die erste Bedingungsgleichung in (V) beibehalten werden muß. Während also das kommutative und das distributive Gesetz bei beliebigen Werten der Koeffizienten λ, μ, ν erfüllt sind, erfordert die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes das Bestehen der Gleichungen (V) bezüglich (V a). Diesen genügende Wertsysteme der λ, μ, ν kann man leicht in folgender Weise angeben:

Wir setzen

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 - \mu_2 &= k\varepsilon, \\ \mu_1 - \nu_2 &= k\varepsilon', \\ \lambda_2 &= k'\varepsilon, \\ \mu_2 &= k'\varepsilon', \\ \mu_1 &= k''\varepsilon, \\ \nu_1 &= k''\varepsilon', \end{aligned}$$

d. h., wir bestimmen unsere Multiplikationskoeffizienten so, daß

$$\text{(VI a)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= k\varepsilon + k'\varepsilon', & \lambda_2 &= k'\varepsilon, \\ \mu_1 &= k''\varepsilon, & \mu_2 &= k'\varepsilon', \\ \nu_1 &= k''\varepsilon', & \nu_2 &= k''\varepsilon - k\varepsilon'; \end{aligned}$$

dann sind bei beliebigen Werten von k, k', k'', ε, ε' die Gleichungen (V) erfüllt. Wenn umgekehrt die sechs Zahlen λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 gegebene, mit den Gleichungen (V) in Einklang stehende Werte haben (wenn wir also bei einem bestimmten Multiplikationsverfahren bleiben), so sind die fünf Zahlen k, k', k'', ε, ε' noch nicht völlig bestimmt; wir können vielmehr einer von ihnen, z. B. ε, noch einen beliebigen, von Null verschiedenen Wert beilegen. Es ergibt sich nämlich dann aus der ersten Gleichung unter (VI):

$$k = \frac{\lambda_1 - \mu_2}{\varepsilon},$$

(VI b) aus der zweiten:

$$\varepsilon' = \frac{\mu_1 - \nu_2}{k} = \frac{(\mu_1 - \nu_2)\varepsilon}{\lambda_1 - \mu_2},$$

aus der dritten:

$$k' = \frac{\lambda_2}{\varepsilon},$$

aus der fünften:

$$k'' = \frac{\mu_1}{\varepsilon},$$

während die vierte und die sechste wegen (V a) von selbst erfüllt sind. In dem besonderen Falle $\lambda_1 - \mu_2 = 0$ gebe man ε' einen beliebigen von Null verschiedenen Wert[1]).

C. Division.

Es seien die komplexen Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad \text{und} \quad c = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

gegeben, und es soll die komplexe Zahl $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ so bestimmt werden, daß

$$ab = c.$$

Setzen wir für ab den Wert (IV) auf S. 343, so erhalten wir zur Berechnung von β_1 und β_2 die Gleichungen

$$(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \mu_1)\beta_1 + (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \nu_1)\beta_2 = \gamma_1,$$
$$(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \mu_2)\beta_1 + (\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \nu_2)\beta_2 = \gamma_2,$$

aus denen sich ergibt:

$$\beta_1 = \frac{\gamma_1(\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \nu_2) - \gamma_2(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \nu_1)}{\delta},$$
$$\beta_2 = \frac{-\gamma_1(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \mu_2) + \gamma_2(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \mu_1)}{\delta},$$

wo

$$\delta = (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \mu_1)(\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \nu_2) - (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \nu_1)(\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \mu_2)$$
$$= \alpha_1^2(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) + \alpha_2^2(\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1) + \alpha_1 \alpha_2(\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1),$$

oder bei Benutzung der Gleichungen (VI a):

$$\delta = k' \alpha_1^2(k \varepsilon \varepsilon' + k' \varepsilon' \varepsilon' - k'' \varepsilon \varepsilon) - k'' \alpha_2^2(k' \varepsilon' \varepsilon' - k'' \varepsilon \varepsilon + k \varepsilon \varepsilon')$$
$$- k \alpha_1 \alpha_2(k \varepsilon \varepsilon' + k' \varepsilon' \varepsilon' - k'' \varepsilon \varepsilon),$$

(VII) $\quad \delta = (k' \alpha_1^2 - k'' \alpha_2^2 - k \alpha_1 \alpha_2)\,\omega,$

wo

$$\omega = k \varepsilon \varepsilon' + k' \varepsilon' \varepsilon' - k'' \varepsilon \varepsilon.$$

---

1) Wenn z. B.

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu_1 = 0, \; \mu_2 = 1, \quad \nu_1 = -1, \quad \nu_2 = 0,$$

werden die Gleichungen (VI) sämtlich befriedigt durch

$$\varepsilon = 0, \quad k = 0, \quad k' = \frac{1}{\varepsilon'}, \quad k'' = -\frac{1}{\varepsilon'},$$

wo ε' eine beliebige von Null verschiedene Zahl ist.

Die Bestimmung von β_1 und β_2 ist möglich, d. h., die Division $c:a$ ist ausführbar dann und nur dann, wenn $\delta \gtrless 0$. Wir haben δ als Produkt zweier Faktoren dargestellt, von denen der zweite, ω, gar nicht von dem Divisor a, sondern nur von den Multiplikationskoeffizienten abhängt. Wählten wir k, k', k'', ε, ε' so, daß $\omega = 0$, so würde die Division für keinen Divisor a ausführbar sein. Wir unterwerfen deshalb von nun an die Zahlen $k, k', k'', \varepsilon, \varepsilon'$ der Beschränkung

(VIII) $$\omega \gtrless 0.$$

Aber auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann es bei beliebiger Wahl von k, k', k'' außer der Null noch unzählig viele Zahlen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

geben, durch welche sich nicht dividieren läßt, nämlich alle die, für welche

$$k'\alpha_1^2 - k''\alpha_2^2 - k\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Die Theorie der quadratischen Gleichungen lehrt, daß diese Gleichung durch von Null verschiedene reelle Werte von α_1, α_2 nicht befriedigt wird, wenn

(IX) $$k^2 + 4k'k'' < 0.$$

Legt man den Zahlen k, k', k'' auch noch die Bedingung (IX) auf, so darf man in unserem Gebiete komplexer Zahlen durch jede von Null verschiedene Zahl dividieren.

Hat in der Divisionsaufgabe, von welcher wir ausgingen, der Dividend c insbesondere den Wert Null, d. h., suchen wir b so zu bestimmen, daß

$$ab = 0,$$

so werden die Zähler von β_1 und β_2 gleich Null. Wenn nun $\delta \gtrless 0$, d. h., wenn entweder $k^2 + 4k'k'' < 0$ oder a doch zu den Zahlen gehört, durch welche man dividieren darf, so ergeben sich für β_1 und β_2 nur die Werte $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$. W e n n a l s o d a s P r o d u k t z w e i e r k o m p l e x e n Z a h l e n d e n W e r t N u l l h a t u n d d e r e i n e F a k t o r z u d e n Z a h l e n g e h ö r t, d u r c h w e l c h e d i e D i v i s i o n m ö g l i c h i s t, s o m u ß d e r a n d e r e g l e i c h N u l l s e i n.

Hieraus kann man sofort weiter schließen, daß, wenn a zu den Zahlen gehört, durch welche die Division erlaubt ist, aus

$$ab = ac$$

notwendig folgt

$$b = c.$$

D. Aufsuchung zweier Einheiten mit möglichst einfachen Multiplikationskoeffizienten.

Die bisherigen Entwicklungen in § 2 haben uns zu folgendem Ergebnis geführt: Für die aus zwei Einheiten e_1, e_2 gebildeten komplexen Zahlen lassen sich Addition, Subtraktion und Multiplikation so definieren, daß das Resultat der Rechnung stets ein bestimmtes ist, und daß auch, wenn nur die Multiplikationskoeffizienten λ, μ, ν den Gleichungen (V) genügen, die sämtlichen für reelle Zahlen erhaltenen Rechnungsgesetze gültig bleiben. Auch die Division ist im allgemeinen ausführbar, wenn die Ungleichung (VIII) befriedigt ist, und sogar für jeden Divisor (außer Null) möglich, wenn k, k', k'' noch der Ungleichung (IX) genügen. Es sind demnach alle die Systeme von komplexen Zahlen aus zwei Einheiten zulässig, deren Multiplikationskoeffizienten die angegebenen Bedingungen erfüllen.

Wir denken uns jetzt ein beliebiges System herausgegriffen, d. h., wir wählen für λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 irgend ein mit den Bedingungen verträgliches Wertsystem. Schon unter B, S. 343, haben wir darauf hingewiesen, daß die Multiplikationskoeffizienten sich ändern, wenn wir e_1 und e_2 durch zwei andere, linear voneinander unabhängige Zahlen desselben Systems ersetzen. Wir suchen nun, zwei solche zu finden, für welche die Multiplikationskoeffizienten besonders einfache Werte annehmen.

Um zu zeigen, daß es in jedem unserer Systeme komplexer Zahlen (d. h. bei jedem zulässigen Wertsystem der λ, μ, ν) eine Zahl gibt, welche die Eigenschaft besitzt, bei der Multiplikation jede Zahl unverändert zu lassen, berechnen wir den Quotienten $a : a$, indem wir in der unter C gelösten Divisionsaufgabe $c = a$, also $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \alpha_2$ setzen. Dann erhalten wir:

$$a : a = \frac{\alpha_1^2\mu_2 - \alpha_1\alpha_2(\mu_1 - \nu_2) - \alpha_2^2\nu_1}{\delta} e_1 + \frac{-\alpha_1^2\lambda_2 + \alpha_1\alpha_2(\lambda_1 - \mu_2) + \alpha_2^2\mu_1}{\delta} e_2,$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (VI) und des S. 347 für δ gefundenen Wertes (VII):

$$\begin{aligned} a : a &= \frac{\varepsilon'(\alpha_1^2k' - \alpha_1\alpha_2k - \alpha_2^2k'')}{\omega(\alpha_1^2k' - \alpha_1\alpha_2k - \alpha_2^2k'')} e_1 - \frac{\varepsilon(\alpha_1^2k' - \alpha_1\alpha_2k - \alpha_2^2k'')}{\omega(\alpha_1^2k' - \alpha_1\alpha_2k - \alpha_2^2k'')} e_2 \\ &= \frac{\varepsilon'}{\omega} e_1 - \frac{\varepsilon}{\omega} e_2. \end{aligned}$$

Ersetzen wir in ω die Zahlen k, k', k'', ε, ε' mittels der Gleichungen (VIb), S. 346, durch λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, so wird

$$\omega = \varepsilon \frac{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2}{\lambda_1 - \mu_2} = \varepsilon' \frac{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2}{\mu_1 - \nu_2}$$

und

$$a:a = \frac{\mu_1 - \nu_2}{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2} e_1 - \frac{\lambda_1 - \mu_2}{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2} e_2.$$

Die rechte Seite ist nur noch von den Multiplikationskoeffizienten λ, μ, ν abhängig; sie enthält aber nicht mehr die Koeffizienten α_1, α_2 von a. Daraus folgt, daß, wenn $a, b, c, \ldots$ irgend welche Zahlen des Systems bedeuten, jeder der Quotienten

$$a:a,\ b:b,\ c:c, \cdots$$

gleich ein und derselben eindeutig bestimmten Zahl

$$\text{(X)} \qquad e = \frac{\varepsilon'}{\omega} e_1 - \frac{\varepsilon}{\omega} e_2 = \frac{\mu_1 - \nu_2}{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2} e_1 - \frac{\lambda_1 - \mu_2}{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\nu_2} e_2$$

ist, welche also beim Multiplizieren jede beliebige Zahl ungeändert läßt[1]).

Diese Zahl e wählen wir als eine der beiden endgültig beizubehaltenden Einheiten und nennen sie deshalb eine Haupteinheit. Indem wir e_1 durch den aus (X) sich ergebenden Wert

$$e_1 = \frac{\omega}{\varepsilon'} e + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} e_2$$

ersetzen, denken wir uns zunächst alle Zahlen unseres Systems durch e und e_2 dargestellt[2]), was erlaubt ist, da zwischen ihnen keine lineare Relation besteht.

Für die Einheiten e, e_2 lauten die Multiplikationsformeln:

$$ee = e,$$

$$ee_2 = e_2 e = e_2 \;{}^{3)},$$

$$e_2 e_2 = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 = \frac{\nu_1 \omega}{\varepsilon'} e + \left(\frac{\nu_1 \varepsilon}{\varepsilon'} + \nu_2\right) e_2,$$

---

1) Stolz und Gmeiner (Theoretische Arithmetik, X. Abschnitt, S. 282) setzen die Existenz einer solchen Zahl voraus und erschließen daraus die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes, während oben im Texte der umgekehrte Weg eingeschlagen ist.

2) Weierstraß behält die Einheiten e_1, e_2 bei und zeigt direkt, daß es eine Zahl $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ gibt, deren Quadrat gleich dem Produkte aus einer reellen Zahl ϱ und der Größe $\frac{\varepsilon'}{\omega} e_1 - \frac{\varepsilon}{\omega} e_2$ ist. Dieser Gang erfordert aber etwas umständlichere Rechnungen.

3) Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus der vorher nachgewiesenen Eigenschaft der Zahl e. Selbstverständlich kann man sich von ihrer Richtigkeit nachträglich überzeugen, indem man unter Benutzung der Gleichung X die Multiplikation wirklich ausführt.

oder unter Benutzung der Gleichungen (VI a), S. 346:

$$e_2 e_2 = k'' \omega e + (2k'' \varepsilon - k \varepsilon') e_2 .$$

Die beiden ersten Multiplikationsformeln sind bereits so einfach wie nur möglich, nicht aber die dritte. Wir versuchen deshalb, als zweite Haupteinheit eine Zahl i zu wählen, deren Quadrat entweder von der Form ϱe oder von der Form σi ist, wo ϱ, σ reelle Zahlen bedeuten.

Hätten wir eine Zahl i gefunden, so daß

$$ii = \sigma i,$$

so würde sich, da ja

$$ei = i,$$

für diese ergeben:

$$ii = \sigma ei,$$

demnach

$$i = \sigma e,$$

i wäre also von e nicht linear unabhängig.

Wir bemühen uns deshalb, eine Zahl

$$i = \xi e + \eta e_2$$

so zu bestimmen, daß

$$ii = \varrho e .$$

Die Multiplikation ergibt:

$$ii = (\xi e + \eta e_2)^2 = \xi^2 e + 2\xi\eta e_2 + \eta^2(\alpha e + \beta e_2),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\alpha = k'' \omega = \mu_1 \frac{\mu_1 \mu_2 - \lambda_1 \nu_2}{\lambda_1 - \mu_2},$$

$$\beta = 2k'' \varepsilon - k\varepsilon' = \mu_1 + \nu_2,$$

oder

$$ii = (\xi^2 + \alpha\eta^2)e + \eta(2\xi + \beta\eta)e_2 .$$

Um unser Ziel zu erreichen, wählen wir ξ, η so, daß

$$2\xi + \beta\eta = 0,$$

also:

$$\xi = -\frac{1}{2}\beta\eta = -\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2)\eta .$$

Dann wird

$$ii = \eta^2 \left(\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha\right) e,$$

also in der Tat

(XI) $$ii = \varrho e,$$

wo

$$\varrho = \eta^2 \left(\frac{1}{4}\beta^2 + \alpha\right)$$
$$= \frac{\eta^2}{4} \cdot \varepsilon'^2 (k^2 + 4k'k''),$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (VI b):

$$\varrho = \frac{\eta^2}{4} \frac{(\mu_1 - \nu_2)^2}{(\lambda_1 - \mu_2)^2} [(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2 \mu_1].$$

Je nach den Werten der Multiplikationskoeffizienten kann ϱ positiv, Null oder negativ sein.

E. Die drei Typen von Systemen komplexer Zahlen aus zwei Einheiten.

Es sei

(XII) 1. $$k^2 + 4k'k'' > 0,$$

beziehungsweise

$$(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1 > 0;$$

dann ist für jeden reellen Wert von η auch

$$\varrho > 0.$$

In diesem Falle bestimmen wir die uns noch zur Verfügung stehende Zahl η so, daß

$$\eta^2 = \frac{4(\lambda_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 - \nu_2)^2[(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1]},$$

und wählen die einem der beiden aus dieser Gleichung resultierenden Werte von η entsprechende Zahl

$$i_1 = -\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2)\eta e + \eta e_2$$

als zweite Haupteinheit. Für e und i_1 lauten dann die Multiplikationsformeln:

(XII a)
$$ee = e,$$
$$ei_1 = i_1 e = i_1,$$
$$i_1 i_1 = e.$$

Da die Gleichungen (V), S. 345, bestehen, sind alle Multiplikationsgesetze gültig, und man erhält für das Produkt zweier beliebigen Zahlen:

$$a = \alpha e + \alpha_1 i_1, \quad b = \beta e + \beta_1 i_1$$
$$ab = (\alpha\beta + \alpha_1\beta_1)e + (\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)i_1.$$

Im allgemeinen ist, weil ω von Null verschieden, auch die Division ausführbar. Es gibt aber Zahlen, durch welche man nicht dividieren darf. Suchen wir nämlich die Zahl b so zu bestimmen, daß

$$ab = c = \gamma e + \gamma_1 i_1,$$

so müssen die Koeffizienten β und β_1 den Gleichungen genügen:

$$\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 = \gamma,$$
$$\alpha_1\beta + \alpha\beta_1 = \gamma_1.$$

Sie lassen sich bei beliebigen Werten von γ, γ_1 nicht bestimmen, wenn

$$\alpha^2 - \alpha_1^2 = 0,$$

also

$$\alpha_1 = \pm\alpha.$$

Es ist deshalb die Division durch die unendlich vielen Zahlen $\alpha(e \pm i_1)$ unmöglich. Daraus folgt noch eine weitere Abweichung von der Arithmetik der reellen Zahlen. Das Produkt

$$(e + i_1)(e - i_1) = ee - i_1 i_1 = e - e$$

hat den Wert Null, ohne daß einer der beiden Faktoren verschwindet.

Es fragt sich ferner, ob denn in diesem System die Aufgabe, aus einer beliebigen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, um derentwillen wir zu Systemen aus zwei Einheiten übergingen, lösbar ist. Soll

$$(\xi e + \xi_1 i_1)^2 = \alpha e + \alpha_1 i_1$$

sein, so müssen ξ, ξ_1 den Gleichungen genügen:

$$\xi^2 + \xi_1^2 = \alpha,$$
$$2\xi\xi_1 = \alpha_1,$$

aus denen sich sofort ergibt:

$$\xi + \xi_1 = \sqrt{\alpha + \alpha_1},$$
$$\xi - \xi_1 = \sqrt{\alpha - \alpha_1}.$$

Wir erhalten für ξ, ξ_1 nur dann reelle Werte, wenn sowohl

$$\alpha + \alpha_1 > 0 \quad \text{als auch} \quad \alpha - \alpha_1 > 0,$$

d. h., falls gleichzeitig

$$\alpha > 0 \quad \text{und} \quad \alpha > |\alpha_1|.$$

Aus Zahlen $\alpha e + \alpha_1 i_1$, welche diesen Bedingungen nicht genügen, läßt sich nicht die Quadratwurzel ziehen, z. B. nicht aus $-e$.

Eine weitere Eigenschaft des jetzt betrachteten Systems komplexer Größen erkennt man beim Übergange zu zwei neuen Einheiten g, h, die durch die Gleichungen definiert sind:

$$g = \frac{1}{2}(e + i_1),$$

$$h = \frac{1}{2}(e - i_1).$$

Für g, h lauten die Multiplikationsformeln:

$$gg = \frac{1}{4}(ee + i_1 i_1 + 2ei_1) = g,$$

$$gh = \frac{1}{4}(ee - i_1 i_1) \qquad = 0,$$

$$hh = \frac{1}{4}(ee + i_1 i_1 - 2ei_1) = h.$$

Sind

$$a = \alpha g + \alpha' h, \quad b = \beta g + \beta' h$$

zwei beliebige Zahlen des Systems, so erhält man:

$$a \pm b = (\alpha \pm \beta) g + (\alpha' \pm \beta') h,$$

$$ab = \alpha\beta g + \alpha'\beta' h,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} g + \frac{\alpha'}{\beta'} h.$$

Um also an zwei komplexen, auf die Grundeinheiten g, h bezogenen Zahlen irgend eine der vier Grundoperationen zu vollziehen, hat man die betreffende Rechnung erst an der einen und dann unabhängig hiervon an der zweiten Einheit auszuführen. Wir bekommen demnach nichts Neues, sondern nur eine Wiederholung der schon im Gebiete der aus einer Einheit gebildeten Größen studierten Operationen.

Aus all den angeführten Gründen sehen wir von der Einführung eines Systems komplexer Zahlen ab, dessen Multiplikationskoeffizienten der Ungleichung (XII) genügen.

Wir wenden uns nunmehr zu dem Falle, daß

$$\text{(XIII)} \qquad 2. \qquad (\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1 = 0,$$

in welchem für jeden Wert von η der Faktor ϱ in Gleichung (XI) auf S. 352 Null wird. Setzen wir für irgend einen Wert von η

$$i_0 = -\frac{1}{2}(\mu_1 + \nu_2)\eta e + \eta e_2,$$

so lauten die Multiplikationsformeln für e und i_0:

(XIII a)
$$ee = e,$$
$$ei_0 = i_0 e = i_0,$$
$$i_0 i_0 = 0.$$

Die letzte Gleichung zeigt schon, daß in diesem System ein Produkt verschwinden kann, ohne daß einer der Faktoren den Wert Null hat. Wenn

$$a = \alpha e + \alpha_0 i_0,$$
$$b = \beta e + \beta_0 i_0,$$

so folgt:

$$ab = \alpha\beta e + (\alpha\beta_0 + \alpha_0\beta) i_0.$$

Soll die Zahl b so bestimmt werden, daß

$$ab = c = \gamma e + \gamma_0 i_0,$$

so müssen β, β_0 den Gleichungen genügen:

$$\alpha\beta = \gamma,$$
$$\alpha_0\beta + \alpha\beta_0 = \gamma_0,$$

die für β, β_0 nur dann bestimmte, endliche Werte liefern, wenn

$$\alpha \gtrless 0.$$

Man kann also in diesem System durch keine Zahl von der Form $\alpha_0 i_0$ dividieren.

Ferner ist

$$(\xi e + \xi_0 i_0)^2 = \xi^2 e + 2\xi\xi_0 i_0.$$

Da stets $\xi^2 > 0$, kann man aus keiner Zahl $\alpha e + \alpha_0 i_0$ die Quadratwurzel ziehen, in welcher $\alpha < 0$, z. B. nicht aus $-e$.

Also auch in dem durch die Gleichung (XIII) charakterisierten Systeme weichen die Rechnungsregeln erheblich von denen der Arithmetik reeller Zahlen ab, und überdies ist in ihm auch nicht einmal die Aufgabe lösbar, welche uns zur Einführung von Systemen aus zwei Einheiten veranlaßt hat.

Wir wenden uns deshalb schließlich zu dem Fall, daß

(XIV) 3. $$k^2 + 4k'k'' < 0,$$

beziehungsweise

$$(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2\mu_1 < 0.$$

Unter dieser Bedingung wird für alle reellen Werte von η in Gleichung (XI), S. 352, der Faktor $\varrho < 0$. Legen wir η einen der beiden, sich

nur durch das Vorzeichen unterscheidenden Werte bei, für welche $\varrho = -1$ wird, d. h., bestimmen wir η aus

$$\eta^2 = -\frac{4(\lambda_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 - \nu_2)^2 [(\lambda_1 - \mu_2)^2 + 4\lambda_2 \mu_1]},$$

so wird

$$ii = -e,$$

(XIV a) während natürlich die beiden andern Multiplikationsformeln wieder lauten:

$$ee = e,$$

$$ei = ie = i.$$

Weil die Gleichungen (V), S. 345, erfüllt sind, bleiben die Multiplikationsgesetze sämtlich gültig. Aus (IX), S. 348, folgt schon, daß in dem jetzt betrachteten Systeme durch jede Zahl, außer durch Null dividiert werden kann. Um sich hiervon auch direkt zu überzeugen, bilde man:

$$ab = (\alpha e + \alpha' i)(\beta e + \beta' i) = (\alpha\beta - \alpha'\beta')e + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i.$$

Sucht man b so zu bestimmen, daß

$$ab = c = \gamma e + \gamma' i,$$

so findet man durch eine leichte Rechnung die Werte

(XV) $$\beta = \frac{\alpha\gamma + \alpha'\gamma'}{\alpha^2 + \alpha'^2}, \quad \beta' = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha^2 + \alpha'^2},$$

welche nur dann illusorisch werden, wenn gleichzeitig

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = 0.$$

Da man in diesem System also durch jede Zahl außer durch Null dividieren darf, folgt nach dem Satze am Schlusse von C, S. 348, daß ein Produkt nur dann verschwinden kann, wenn wenigstens einer seiner Faktoren gleich Null ist.

Es bleibt noch die Frage der Existenz der Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl des Systems zu prüfen. Soll

$$(\xi e + \xi' i)^2 = \alpha e + \alpha' i$$

sein, so müssen ξ, ξ' den Gleichungen

$$\xi^2 - \xi'^2 = \alpha,$$
$$2\xi\xi' = \alpha'$$

genügen, aus denen sich ergibt:

$$(\xi^2 + \xi'^2)^2 = \alpha^2 + \alpha'^2,$$
$$\xi^2 + \xi'^2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2},$$

wo der Quadratwurzel der positive Wert beizulegen ist; also

$$2\xi^2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2} + \alpha,$$

$$2\xi'^2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2} - \alpha.$$

Da die rechten Seiten dieser Gleichungen für keine reellen Werte von α, α' negativ werden, erhalten wir aus ihnen stets reelle Werte für ξ, ξ'; d. h., es läßt sich aus jeder Zahl unseres Systems die Quadratwurzel ziehen. Z. B. erhalten wir für $\alpha = -1$, $\alpha' = 0$:

$$\xi = 0, \quad \xi' = \pm 1,$$

also

$$\sqrt{-e} = \pm i\,\text{[1]}.$$

Da

$$x^2 + e = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

und ein Produkt nur verschwinden kann, wenn wenigstens einer seiner Faktoren gleich Null ist, kann die Gleichung

$$x^2 + e = 0$$

keine andere Lösung haben als $+i$ und $-i$.

Daß sich aus jeder Zahl des Systems auch eine Wurzel mit beliebigem ganzzahligem Wurzelexponenten ziehen läßt, werden wir in § 4 zeigen, ebenso die allgemeine Lösbarkeit der Aufgabe, zu einer beliebigen Zahl in bezug auf eine beliebige Basis den Logarithmus zu finden. Daß jede algebraische Gleichung, deren Koeffizienten Zahlen eines solchen Systems sind, auch wieder durch Zahlen des Systems befriedigt werden kann, ist der Inhalt des Fundamentalsatzes der Algebra, welcher in Bd. II behandelt wird.

Zusammenfassung:

Die in diesem § 2 angestellten Untersuchungen haben uns das Ergebnis geliefert, daß es drei Typen von Systemen komplexer Zahlen gibt, für welche die Multiplikationsgesetze sämtlich erhalten bleiben und auch die Division, wenigstens im allgemeinen, ausführbar ist. In jedem System der ersten durch Ungleichung (XII), S. 352, charakterisierten Gruppe gibt es zwei Einheiten e, i_1, für deren Multiplikation die Gleichungen (XII a) gelten. In jedem System der zweiten Gruppe (Gleichung (XIII), S. 354) gibt es zwei Einheiten e, i_0, deren Produkte durch (XIII a), S. 355, dargestellt sind; endlich in jedem System der

1) Diese Gleichung erscheint hier nicht als Definition, ist vielmehr ein bewiesener Lehrsatz.

dritten Gruppe (Ungleichung (XIV), S. 355) zwei Größen e, i, deren Multiplikation die Gleichungen (XIV a) bestimmen. Jede der drei Gruppen reduziert sich also tatsächlich auf ein einziges System, nämlich das der sämtlichen linearen Verbindungen des betreffenden Einheiten-Paares mit reellen Koeffizienten. Nur das dritte System besitzt die Eigenschaft, daß die Division durch jede von Null verschiedene Zahl möglich ist und infolgedessen auch ein Produkt immer nur dann verschwinden kann, wenn wenigstens einer der Faktoren Null ist, und daß außerdem die Quadratwurzelausziehung aus einer beliebigen Zahl des Systems wieder auf eine Zahl des Systems führt. Dieses dritte System, welches man als das der gewöhnlichen oder gemeinen komplexen Zahlen bezeichnet, ist also, zunächst jedenfalls unter allen Systemen aus zwei Einheiten, das einzige, für welches genau dieselben Rechnungsgesetze gelten wie für die reellen Zahlen, vor denen es aber den Vorzug hat, daß in ihm die erwähnte, für reelle Zahlen unlösbare Aufgabe lösbar wird.

Zusatz:

Wenn auch nicht durch das Bedürfnis, bisher unlösbare Aufgaben lösbar zu machen, veranlaßt, so hat man doch aus rein theoretischem Interesse auch Zahlensysteme studiert, die aus mehr als zwei Einheiten zusammengesetzt sind. Wie schon S. 341, Anm. 2 gesagt, lassen sich für solche Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einer reellen Zahl stets ohne Schwierigkeit in derselben Weise wie für Systeme aus zwei Einheiten behandeln. Es liegt dann nahe, für die Multiplikation zweier komplexen Zahlen eine derartige Definition zu fordern, daß das Produkt demselben Zahlbereiche angehört wie die Faktoren, und daß alle Multiplikationsgesetze erhalten bleiben. Auch dieses Ziel ist stets, und zwar noch auf unendlich viele Arten, zu erreichen. Aber es stellt sich dabei heraus, daß, wie man auch die Multiplikationskoeffizienten wählen möge, auf jeden Fall unendlich viele Zahlen existieren, durch welche man nicht dividieren kann, und daß es infolgedessen immer Produkte gibt, die den Wert Null annehmen, ohne daß einer der Faktoren verschwindet, was natürlich eine von der gewöhnlichen erheblich abweichende Algebra zur Folge hat[1]).

1) Schon Gauß schließt die bereits S. 336 zitierte Selbstanzeige seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste mit den Worten (Gauß' Werke, Bd. II, S. 178): „Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird." Gauß selber hat nun aber über diese Frage nichts weiter publiziert. Sie ist erst, und zwar in dem oben angegebenen Sinne, beantwortet worden von H. Hankel in seiner „Theorie der komplexen Zahlensysteme" (Leipzig 1867), S. 108 und etwa seit dem Anfange der sechziger Jahre des vorigen Jahrhunderts von Weierstraß in seinen Vorlesungen an der Universität Berlin.

Wenn man auf die Allgemeingültigkeit des kommutativen Gesetzes verzichtet, so gibt es noch ein einziges System komplexer Größen, für welches im übrigen alle für die reellen und die gewöhnlichen komplexen Zahlen gültigen Rechengesetze bestehen bleiben, also auch ein Produkt nur verschwinden kann, wenn einer der Faktoren Null ist. Es sind dies die „Quaternionen"[1]), d. h. die aus den Einheiten 1, i, j, k zusammengesetzten Zahlen, für welche die Multiplikationsgleichungen lauten:

$$\begin{array}{lll} ii = -1, & jj = -1, & kk = -1, \\ ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j. \end{array}$$

Da diese Relationen als Abbild gewisser Beziehungen und Operationen in der Geometrie des Raumes gedeutet werden können, haben die Quaternionen in neuerer Zeit vielfach Anwendung in der Geometrie und in der mathematischen Physik gefunden.

Läßt man noch mehr Abweichungen von den für reelle Zahlen gültigen Rechengesetzen zu, so sind eine große Anzahl weiterer komplexer Zahlensysteme denkbar. Die aus drei und die aus vier Einheiten zusammengesetzten sind in dem schon § 1 zitierten, von E. Study verfaßten Artikel über die Theorie der komplexen Größen im ersten Bande der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften vollständig zusammengestellt, wo auch die weitere neuere Literatur über dieses Gebiet zu finden ist.

F. Die gemeinen komplexen Zahlen. Sätze über den absoluten Betrag.

Wir beschränken uns im folgenden auf das System der gemeinen komplexen Zahlen, weil es einerseits das einzige ist, in welchem sämtliche für reelle Zahlen gültigen Rechnungsgesetze erhalten bleiben, und weil es andrerseits für die Bedürfnisse der Arithmetik, Algebra und Analysis vollkommen ausreicht.

Für die bisher mit dem Buchstaben e bezeichnete Haupteinheit, welche bei der Multiplikation jede beliebige Zahl ungeändert läßt, können wir jetzt auch ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit das Zeichen 1 einführen und dementsprechend für αe kurz α schreiben; denn, wenn c eine beliebige komplexe Zahl bedeutet, so ist ja

$$(\alpha e)c = \alpha(ec) = \alpha c.$$

1) Die Theorie der Quaternionen stammt von Hamilton; vgl. § 1, S. 337. In Deutschland ist sie erst durch die übersichtliche Darstellung in dem soeben zitierten Werke von Hankel recht bekannt geworden. Aus den Aufzeichnungen, die sich im Nachlaß von Gauß gefunden haben, geht übrigens hervor, daß dieser umfassende Geist bereits um das Jahr 1820 auch schon im Besitze des Quaternionenkalkuls gewesen ist. Daß die Quaternionen das einzige System komplexer Größen mit mehr als zwei Einheiten bilden, für welches außer dem kommutativen Gesetze der Multiplikation alle übrigen für die reellen Zahlen gültigen Gesetze erhalten bleiben, hat Frobenius im Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 63, bewiesen.

Mit den komplexen Zahlen $\alpha + \alpha' i$ rechnen wir nun genau so wie mit den reellen Zahlen, setzen nur überall für i^2 den Wert -1, also für i^{2n} den Wert $(-1)^n$ und für i^{2n+1} den Wert $(-1)^n \cdot i$.

Zwei komplexe Zahlen $\alpha + \alpha' i$ und $\alpha - \alpha' i$, die sich nur durch das Vorzeichen ihres imaginären Bestandteiles unterscheiden, nennt man (nach Cauchy) „konjugiert komplex" oder auch „konjugiert imaginär", ihr Produkt

$$(\alpha + \alpha' i)(\alpha - \alpha' i) = \alpha^2 + \alpha'^2$$

(nach Gauß) die „Norm" von $\alpha + \alpha' i$ und von $\alpha - \alpha' i$, den positiven Wert von $\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}$ (nach Weierstraß) den „absoluten Betrag" jeder der beiden konjugiert komplexen Zahlen. Für $\alpha' = 0$ hat der absolute Betrag die Kap. IV, § 1 für reelle (positive oder negative) Zahlen angegebene Bedeutung. Auch den absoluten Betrag einer komplexen Zahl bezeichnet man (nach Weierstraß) durch einen vor und einen hinter die Zahl gesetzten senkrechten Strich.

Für die absoluten Beträge komplexer Zahlen lassen sich leicht einige einfache Sätze beweisen.

1. Satz: Der absolute Betrag der Summe zweier komplexen Zahlen $a = \alpha + \alpha' i$ und $b = \beta + \beta' i$ ist, wenn $b = ka$, wo k irgend eine reelle positive Zahl (oder Null) bezeichnet, gleich der Summe der absoluten Beträge der Zahlen a, b, in allen übrigen Fällen aber kleiner als diese Summe.

Beweis: Setzen wir:

$$|a| = \varrho_1, \quad |b| = \varrho_2 \quad \text{und} \quad |a + b| = \varrho,$$

so wird

$$\sigma = \varrho_1 + \varrho_2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2} + \sqrt{\beta^2 + \beta'^2},$$

wo unter den Wurzeln natürlich die positiven Werte zu verstehen sind, also:

$$\sigma^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + 2\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)},$$

dagegen:

$$\varrho^2 = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha' + \beta')^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$

deshalb:

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \varrho^2) = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)} - (\alpha\beta + \alpha'\beta'),$$

oder:

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \varrho^2) = \sqrt{(\alpha\beta + \alpha'\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2} - (\alpha\beta + \alpha'\beta').$$

Es sei zunächst

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0.$$

Dann ist

$$\beta = k\alpha, \quad \beta' = k\alpha',$$

wo k irgend eine reelle Zahl bezeichnet, und

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' = k(\alpha^2 + \alpha'^2).$$

Wenn $k > 0$, ist auch die linke Seite der letzten Gleichung positiv und deshalb $\frac{1}{2}(\sigma^2 - \varrho^2) = 0$, also

$$\sigma = \varrho.$$

Wenn aber $k < 0$ und deshalb $(\alpha\beta + \alpha'\beta')$ negativ ist, dann wird

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \varrho^2) = -k(\alpha^2 + \alpha'^2) - k(\alpha^2 + \alpha'^2) = -2k(\alpha^2 + \alpha'^2) > 0;$$

folglich

$$\sigma > \varrho.$$

Ist

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta \gtrless 0,$$

so wird stets

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 - \varrho^2) > 0,$$

also

$$\sigma > \varrho.$$

Corollar: Durch wiederholte Anwendung des soeben bewiesenen Satzes findet man für beliebig viele komplexe Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn die n Zahlen aus einer von ihnen durch Multiplikation mit je einer positiven reellen Zahl hervorgehen.

2. Satz: Der absolute Betrag der Differenz zweier komplexen Zahlen $a = \alpha + \alpha' i$, $b = \beta + \beta' i$ ist, wenn $b = ka$, wo k irgend eine reelle positive Zahl (oder Null) bedeutet, gleich der Differenz der absoluten Beträge beider Zahlen, in allen übrigen Fällen aber größer als diese Differenz.

Beweis: Setzen wir dieses Mal

$$\varrho = |a - b| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha' - \beta')^2}$$

und unter der Voraussetzung $\varrho_1 > \varrho_2$

$$\delta = \varrho_1 - \varrho_2 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2} - \sqrt{\beta^2 + \beta'^2},$$

so wird:

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha'\beta',$$

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 - 2\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)},$$

deshalb:

$$\frac{1}{2}(\varrho^2 - \delta^2) = \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)} - (\alpha\beta + \alpha'\beta')$$
$$= \sqrt{(\alpha\beta + \alpha'\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2} - (\alpha\beta + \alpha'\beta').$$

Wie im Beweise des vorigen Satzes folgt, daß, wenn

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$$

und gleichzeitig

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' \geqq 0,$$

also

$$\beta = k\alpha, \quad \beta' = k\alpha',$$

wo k irgend eine positive Zahl (oder Null) bezeichnet,

$$\varrho = \delta;$$

daß aber, wenn $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ und $\alpha\beta + \alpha'\beta' < 0$, also $\beta = k\alpha$, $\beta' = k\alpha'$, wo k irgend eine negative Zahl bedeutet, und jedes Mal, wenn $\alpha\beta' - \alpha'\beta \gtrless 0$,

$$\varrho^2 - \delta^2 > 0,$$

also, weil ϱ und δ positiv,

$$\varrho > \delta,$$

d. h.

$$\varrho > \varrho_1 - \varrho_2.$$

Corollar: Wenden wir Satz 2 auf die Zahlen $a = \alpha + \alpha' i$ und $-b = -\beta - \beta' i$ an, so ergibt sich:

$$|a + b| \geqq |a| - |b|,$$

also mit Rücksicht auf Satz 1:

$$|a| - |b| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|.$$

3. Satz: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge der Faktoren.

Beweis: Wenn wieder

$$a = \alpha + \alpha' i, \quad \varrho_1 = \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2},$$
$$b = \beta + \beta' i, \quad \varrho_2 = \sqrt{\beta^2 + \beta'^2},$$

so ist

$$ab = \alpha\beta - \alpha'\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\,i,$$
$$\varrho = |ab| = \sqrt{(\alpha\beta - \alpha'\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2}.$$

Die schon bei den beiden vorigen Beweisen benutzte Identität ergibt unmittelbar:

$$\varrho = \varrho_1 \varrho_2.$$

Satz 3 gilt auch für beliebig viele Faktoren.

4. Satz: Der absolute Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der absoluten Beträge von Dividend und Divisor.

Beweis:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha + \alpha' i}{\beta + \beta' i} = \frac{\alpha\beta + \alpha'\beta'}{\beta^2 + \beta'^2} + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta^2 + \beta'^2}\,i, \quad \text{(vgl. S. 356);}$$

$$\varrho = \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{\sqrt{(\alpha\beta + \alpha'\beta')^2 + (\alpha'\beta - \alpha\beta')^2}}{\beta^2 + \beta'^2} = \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)}}{\beta^2 + \beta'^2}$$
$$= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2}}{\sqrt{\beta^2 + \beta'^2}} = \frac{|a|}{|b|}.$$

§ 3. Repräsentation der gemeinen komplexen Zahlen durch die Vektoren der Ebene.

A. Definition des Vektors. Gleichheit zweier Vektoren. Bestimmung des Vektors durch Länge und Amplitude.

Kap. VI, § 8 haben wir bereits die Längen von Strecken als Abbilder der reellen, rationalen und irrationalen, Zahlen kennen gelernt und gezeigt, daß Relationen unter Strecken und unter reellen Zahlen einander eindeutig entsprechen. Während dabei nur die Längen der Strecken von Interesse waren, wollen wir jetzt die Strecken einer Ebene hinsichtlich ihrer Länge und ihrer Lage ins Auge fassen. Sind A, B zwei beliebige Punkte der Ebene, so nennen wir die in der Richtung von A nach B zu durchlaufende gerade Verbindungslinie beider Punkte hinsichtlich ihrer Länge und ihrer Lage den „Vektor" AB; die Länge der Verbindungslinie ohne Rücksicht auf ihre Lage werden wir durch $|AB|$ und das Verhältnis dieser Länge zu einer als Einheit gewählten Länge durch einen griechischen Buchstaben bezeichnen.

Zwei Vektoren derselben Ebene AB und CD definieren wir als gleich, wenn erstens $|AB| = |CD|$, zweitens AB und CD entweder in derselben oder in parallelen Geraden liegen, und wenn drittens, falls AB und CD derselben Geraden angehören, der Übergang von A nach B eine Be-

wegung in derselben Richtung erfordert wie der Übergang von C nach D, und falls AB und CD in parallelen Geraden liegen, B und D sich auf derselben Seite der Verbindungslinie AC befinden. Sind die beiden ersten Bedingungen erfüllt, AB und CB aber nicht gleich-, sondern entgegengesetzt gerichtet, so nennt man AB und CD „entgegengesetzte" Vektoren. Aus der Definition der Gleichheit ergibt sich sehr leicht, unter Benutzung der elementaren Sätze über kongruente Dreiecke und über Parallelogramme, die Folgerung, daß, wenn

$$AB = CD \quad \text{und} \quad CD = EF,$$

auch

$$AB = EF$$

ist. Zufolge dieser Definition ist es ferner möglich, jeden beliebigen Vektor der Ebene durch einen solchen zu ersetzen, dessen Anfangspunkt in einen beliebig gegebenen Punkt der Ebene fällt. Man hat von diesem Punkte nur eine Gerade zu ziehen, welche zu dem Vektor parallel und ihm gleichgerichtet ist, und auf dieser eine Strecke abzutragen, deren Länge gleich der des Vektors ist. Zwei Vektoren, die im selben Punkte beginnen, können nur dann einander gleich sein, wenn auch ihre Endpunkte zusammenfallen.

Um die Lage eines Vektors in der Ebene bestimmen zu können, müssen wir noch einen geometrischen Begriff, den des „Winkels" einführen.

Irgend eine im Punkte O beginnende und sich beliebig weit erstreckende Gerade der Ebene („Halbgerade" oder „Strahl") kann man mit jeder anderen, auch in O anfangenden durch eine Drehung um den Punkt O zur Deckung bringen. Diese Drehung läßt sich in zweifacher Weise ausführen, entweder im Sinne des Uhrzeigers oder im entgegengesetzten. Die Größe der erforderlichen Drehung bezeichnet man als „Winkel"; sie kann durch das Verhältnis der Länge des Kreisbogens, den ein beliebiger Punkt der bewegten Geraden bei der Drehung durchläuft, zum Radius dieses Kreises gemessen werden; dieses Verhältnis ist nämlich, wie in der Geometrie gezeigt wird, vom Radius unabhängig. Wir geben ihm negatives oder positives Vorzeichen, je nachdem die Drehung im Uhrzeigersinne oder im entgegengesetzten ausgeführt wird. Einer vollen Umdrehung, d. h. einer Drehung des Strahls bis zurück in seine Anfangslage, entspricht das Verhältnis des ganzen Kreisumfangs zum Radius, d. h. die allgemein mit 2π bezeichnete Zahl. Der Winkel π heißt ein gestreckter, der Winkel $\frac{\pi}{2}$ ein rechter Winkel. Da sich der Strahl beliebig oft herumdrehen läßt, können die Winkel beliebig groß werden. Zwei Winkel, die sich um ein ganzes Vielfaches von 2π unterscheiden, führen den Strahl

in dieselbe Lage. Von irgend einer Lage des Strahls können wir stets zu einer beliebigen anderen durch eine Drehung um einen Winkel gelangen, der zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (entweder die untere oder die obere Grenze eingeschlossen) liegt. Unter $\sphericalangle AOB$ wollen wir den kleinsten Winkel verstehen, welcher die Halbgerade OA durch eine Drehung im positiven Sinn um den Punkt O in die Lage OB überführt.

Beliebig viele Winkel kann man stets summieren; es läßt sich leicht zeigen[1]), daß für die Addition der Winkel das kommutative wie das assoziative Gesetz gilt. Da es positive und negative Winkel von beliebiger Größe gibt, ist auch die Subtraktion zweier Winkel stets ausführbar.

Nehmen wir in der Ebene die Richtung einer beliebig gegebenen Halbgeraden als Anfangsrichtung an, so ist irgend ein Vektor der Ebene vollkommen bestimmt, wenn man erstens seine Länge und zweitens seinen Winkel mit der Anfangsrichtung kennt. Dieser Winkel, die „Amplitude" des Vektors genannt, ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Den Wert der Amplitude, welcher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (die obere Grenze eingeschlossen) liegt, wollen wir ihren Hauptwert nennen.

B. Addition der Vektoren.

Um die Summe zweier Vektoren AB und $A'B'$ zu bilden, ersetzen wir den Vektor $A'B'$ durch einen im Punkte B anfangenden Vektor BC und definieren alsdann:

$$AB + A'B' = AB + BC = AC,$$

d. h., unter der Summe der beiden Vektoren AB und BC verstehen wir die dritte Seite des durch AB und BC bestimmten Dreiecks[2]). Dieses Dreieck ABC reduziert sich auf die Strecke AC, falls AB und BC in dieselbe Gerade fallen.

Um zu prüfen, ob die soeben definierte Operation den Namen „Addition" verdient, untersuchen wir, ob für sie dieselben Gesetze gelten wie für die Addition aller von uns betrachteten Zahlenarten.

1. Wenn

$$AB = A'B' \quad \text{und} \quad BC = B'C',$$

so ist

$$AB + BC = A'B' + B'C',$$

1) Vgl. H. Thieme, Die Elemente der Geometrie, A, § 7.

2) Der hier als Summe von AB und BC definierte Vektor AC repräsentiert in der Graphostatik die Kraft (Resultante), deren Wirkung nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte mit der gemeinsamen Wirkung der durch AB und BC dargestellten Kräfte (Komponenten) gleichwertig ist.

da aus der Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ folgt, daß

$$AC = A'C'.$$

2. $$(AB + BC) + CD = AB + (BC + CD);$$

denn der Wert der linken Seite ist

$$AC + CD = AD$$

und der der rechten

$$AB + BD = AD.$$

3. $$AB + BC = BC + AB.$$

Es ist nämlich

$$AB + BC = AC.$$

Um $BC + AB$ zu bilden, ziehen wir die Gerade CD gleich und parallel AB. Dann ist

$$BC + AB = BC + CD = BD.$$

Fig. 1.

Aus der Kongruenz der Dreiecke ABC und BCD ergibt sich:

$$AC = BD.$$

Wenn in einer Reihe von beliebig vielen Vektoren

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1$$

der Anfangspunkt jedes folgenden mit dem Endpunkte des vorhergehenden und der Endpunkt des letzten mit dem Anfangspunkte des ersten zusammenfällt, so ist

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = A_1A_1 = 0,$$

insbesondere die Summe zweier entgegengesetzten Vektoren

$$AB + BA = AA = 0.$$

C. Subtraktion der Vektoren.

Die Differenz $AB - AC$ zweier Vektoren aufsuchen, die, wie wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen dürfen, im selben Punkte A anfangen, heißt, einen Vektor $\mathfrak{x}$ so bestimmen, daß $AC + \mathfrak{x} = AB$. Nach der vorher gegebenen Definition der Summe wird diese Gleichung durch den Vektor $\mathfrak{x} = CB$ und keinen andern von C ausgehenden Vektor befriedigt; d. h., die Differenz zweier im selben Punkte beginnenden Vektoren ist der Vektor, welcher sich vom

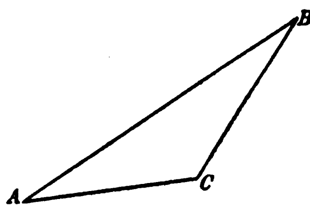


Fig. 2.

Endpunkte des Subtrahenden bis zum Endpunkt des Minuenden erstreckt. Die Subtraktion ist stets ausführbar. Wenn Minuend und Subtrahend einander gleich sind, so ist die Differenz Null. Für den Minuenden $AA = 0$ hat man:

$$AA - AC = 0 - AC = CA;$$

den zu AC entgegengesetzten Vektor CA können wir also auch $0 - AC$ oder kürzer $-AC$ schreiben. Ziehen wir BD parallel und gleich CA, so wird

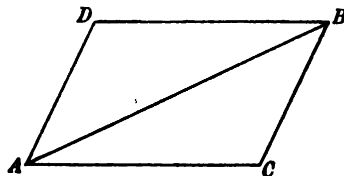


Fig. 3.

$$AB + CA = AB + BD = AD = CB,$$

also

$$AB - AC = AB + CA;$$

d. h., statt einen Vektor zu subtrahieren, kann man auch den entgegengesetzten addieren.

D. Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl.

Wenn α irgend eine reelle Zahl, AB einen beliebigen Vektor bedeutet, so verstehen wir unter $\alpha \cdot AB$ einen Vektor, der entweder in derselben Geraden liegt wie AB oder in einer parallelen, der dieselbe Richtung wie AB hat, wenn α positiv, die entgegengesetzte, wenn α negativ, und dessen Länge gleich der Strecke $|\alpha| \cdot |AB|$ ist, welche nach Kap. VI, § 8 unter Voraussetzung des Cantor-Dedekindschen Stetigkeitsaxioms für die geraden Linien auch dann immer existiert, wenn α irrational ist. Bedeutet andrerseits CD irgend einen Vektor, welcher auf derselben Geraden liegt wie AB oder auf einer parallelen, so gibt es stets eine reelle, positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl α, so daß $CD = \alpha \cdot AB$. Es ist α die Zahl, welche wir Kap. VI, § 8 als Wert des Verhältnisses

$$|CD| : |AB|$$

definiert haben, und zwar mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem AB und CD gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. Falls α, β von Null verschiedene Zahlen sind, und AB und CD weder auf derselben noch auf parallelen Geraden liegen, kann eine Gleichung von der Form $\alpha \cdot AB = \beta \cdot CD$ nicht bestehen.

E. Darstellung der sämtlichen Vektoren der Ebene durch zwei beliebige unter ihnen.

Zwei beliebige Vektoren der Ebene, die wir uns wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit von einem Punkt O ausgehend denken

können, seien $OE = \mathfrak{e}$ und $OJ = \mathfrak{i}$. Irgend ein dritter Vektor der Ebene heiße nach seiner Verlegung an denselben Anfangspunkt OP.

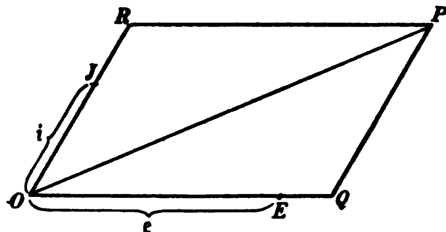


Fig. 4.

Die Parallele, welche man durch P zu der Geraden OJ zieht, möge OE in Q und die Parallele durch P zu OE die Gerade OJ in R schneiden. Nach der Definition der Summe ist

$$OP = OQ + QP = OQ + OR.$$

Zufolge D lassen sich aber stets reelle Zahlen α, β so bestimmen, daß $OQ = \alpha\mathfrak{e}$ und $OR = \beta\mathfrak{i}$, so daß also

$$OP = \alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i}.$$

Sind umgekehrt zunächst beliebige reelle Zahlen α, β gegeben, so kann man nach Wahl der Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ stets einen Vektor OP so bestimmen, daß die letzte Gleichung erfüllt ist.

Damit haben wir schon gezeigt, daß die sämtlichen von einem Punkte ausgehenden Vektoren der Ebene eine Menge bilden, wie sie in § 2 A charakterisiert ist. Es bleibt jetzt zu untersuchen, ob die Rechenoperationen für die Vektoren dieselben sind, wie für die aus solchen Mengen in § 2 abgeleiteten komplexen Zahlen, insbesondere wie für die gemeinen komplexen Zahlen.

1. Die Vektoren

$$OP = \alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i} \quad \text{und} \quad OP' = \alpha'\mathfrak{e} + \beta'\mathfrak{i}$$

   können nur dann einander gleich sein, wenn P und P' zusammenfallen (siehe A, S. 364), wenn also $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Das ist aber dieselbe Bedingung wie die für die Gleichheit zweier komplexen Zahlen § 2 A angegebene.

2. Stellt OS die Summe $OP + OP'$ dar, d. h., ist PS gleich und parallel OP', und schneiden die Parallelen durch P, P', S zu OI die Gerade OE beziehungsweise in den Punkten Q, Q', T und die Parallele durch P zu OE die Verbindungslinie ST in R, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $OP'Q'$ und PSR, daß

$$PR = OQ',$$

also

$$QT = PR = \alpha'\mathfrak{e}$$

und

$$OT = OQ + QT = \alpha\mathfrak{e} + \alpha'\mathfrak{e} = (\alpha + \alpha')\mathfrak{e}, \quad \text{(vgl. Kap. VI, § 8).}$$

Wenn die Parallele durch S zu OE die Gerade OI in U schneidet, so ergibt sich ebenso:

$$OU = (\beta + \beta')\,\mathfrak{i},$$

also:

$$OS = OT + TS = OT + OU = (\alpha + \alpha')\,\mathfrak{e} + (\beta + \beta')\,\mathfrak{i}.$$

Die Summe der beiden in der Form $\alpha\mathfrak{e} + \beta\mathfrak{i}$ bezüglich $\alpha'\mathfrak{e} + \beta'\mathfrak{i}$ dargestellten Vektoren wird also in genau derselben Weise gebildet wie die Summe zweier komplexen Zahlen (§ 2 A). Daraus folgt schon, daß für die Differenz das Entsprechende gilt.

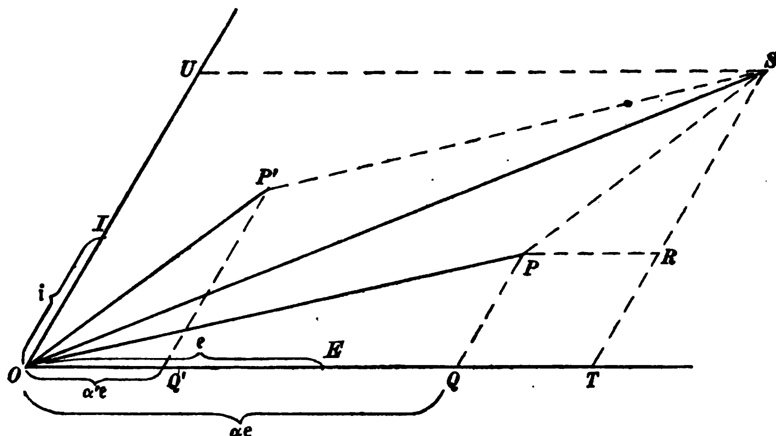


Fig. 5.

Die sämtlichen von einem Punkte ausgehenden Vektoren einer Ebene bilden also tatsächlich ein System komplexer, aus den Einheiten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ mittels reeller Zahlen gebildeter Größen, für welches die Gleichheit und die Addition ebenso definiert sind wie für die aus zwei Einheiten zusammengesetzten komplexen Zahlen. Mengen, welche in diesen Beziehungen mit den Systemen komplexer Zahlen übereinstimmen, gibt es nun allerdings sehr viele. Wir werden uns nunmehr die Frage vorzulegen haben, ob wir für Vektoren Rechenoperationen definieren können, die als Multiplikation bezüglich Division bezeichnet werden dürfen, weil sie denselben Gesetzen genügen wie Multiplikation bezüglich Division der reellen Zahlen, und deren Ergebnisse dem Produkte bezüglich Quotienten der den gegebenen Vektoren zugeordneten komplexen Zahlen eindeutig entsprechen.

F. Multiplikation der Vektoren.

1. Ein Produkt, in welchem ein Faktor ein Vektor ist, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, soll stets den Wert Null haben.

2. **Nach Wahl eines Vektors $OE = \mathfrak{e}$, auf dessen Richtung und Länge wir die Richtung bezüglich Länge aller Vektoren der Ebene beziehen, definieren wir das Produkt der beiden beliebigen Vektoren $AA' = \mathfrak{a}$ und $BB' = \mathfrak{b}$, welche mit $\mathfrak{e}$ die Winkel φ_1 bezüglich φ_2 einschließen, in folgender Weise:**

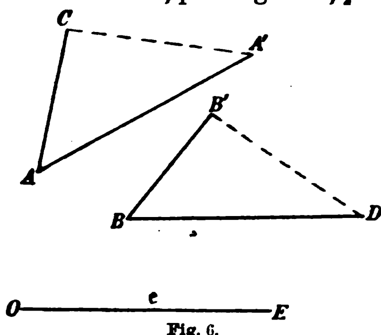


Fig. 6.

Wir ziehen durch B die Gerade BD gleich und parallel OE, verbinden D mit B', tragen an AA' in A den Winkel $DBB' = \varphi_2$ und an AA' in A' den Winkel BDB' an. Schneiden sich die Schenkel der beiden angetragenen Winkel in C, so nennen wir $AC = \mathfrak{c}$ das Produkt der beiden Vektoren AA' und BB'. Unmittelbar sieht man, daß die Amplitude φ_3 von AC in bezug auf OE gleich $\varphi_1 + \varphi_2$ ist. Da die Dreiecke $AA'C$ und BDB' wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkel einander ähnlich sind, besteht ferner die Proportion:

$$|AC| : |AA'| = |BB'| : |BD|$$

oder

$$|\mathfrak{c}| : |\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| : |\mathfrak{e}|.$$

Bezeichnen wir die Verhältnisse der Streckenlängen $|\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{c}|$ zur Strecke $|\mathfrak{e}|$ beziehungsweise durch α, β, γ, so folgt aus der letzten Proportion nach Kap. VI, § 8, S. 328:

$$\gamma : \alpha = \beta : 1,$$

also:

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Nach Wahl des Vektors $\mathfrak{e}$, auf den wir alle Vektoren der Ebene beziehen, ist durch $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ und $\gamma = \alpha\beta$ der Vektor $\mathfrak{c}$ vollkommen bestimmt[1]).

Ist einer der beiden gegebenen Vektoren, z. B. BB', von der Form $\beta\mathfrak{e}$, d. h., hat BB' dieselbe Richtung wie $\mathfrak{e}$, φ_2 also den Wert Null, so wird $\varphi_3 = \varphi_1$, d. h., $\mathfrak{c}$ besitzt dieselbe Richtung wie $\mathfrak{a}$. Wenn außerdem noch $\beta = 1$, also $BB' = \mathfrak{e}$, so ergibt sich auch $\gamma = \alpha$, demnach $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$. Die Multiplikation mit $\mathfrak{e}$ läßt also jeden Vektor der Ebene ungeändert.

1) Legen wir statt des Vektors $\mathfrak{e}$ einen Vektor $\mathfrak{e}'$ zugrunde, dessen Länge gleich $n\,|\mathfrak{e}|$ ist, und der mit $\mathfrak{e}$ den Winkel $(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}') = \delta$ einschließt, so erhalten wir als Wert des Produktes $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ einen Vektor $\mathfrak{c}'$ von der Länge $\frac{1}{n}\,|\mathfrak{c}|$, der mit $|\mathfrak{c}|$ den Winkel $(\mathfrak{c}', \mathfrak{c}) = \delta$ bildet.

Die hier für das Produkt zweier Vektoren aufgestellte Definition ist durchaus nicht die einzig mögliche (vgl. Anm. 1 auf S. 342); sie genügt aber, wie wir jetzt zeigen werden, den sämtlichen Multiplikationsgesetzen.

1. Wenn

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}',$$

so ist auch

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}';$$

denn es sind die zur Konstruktion des Produktes $\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'$ erforderlichen Dreiecke den vorher benutzten entsprechend kongruent und die homologen Seiten dieser Dreiecke parallel. Wir können also auch bei der Konstruktion des Produktes zweier Vektoren diese in einem beliebig gewählten Punkte anfangen lassen.

2. Die Richtigkeit des kommutativen Gesetzes

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$$

ergibt sich unmittelbar aus der Gültigkeit dieses Gesetzes für die Addition der Winkel ($\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$) und für die Multiplikation der reellen Zahlen ($\alpha\beta = \beta\alpha$).

3. Dasselbe gilt vom assoziativen Gesetz.

4. Es ist jetzt noch der Beweis[1]) für das distributive Gesetz zu liefern.

Es seien $OA = \mathfrak{a}$, $OB = \mathfrak{b}$, $OC = \mathfrak{c}$ drei beliebige Vektoren, $OS = \mathfrak{s} = OA + OB$ ($OASB$ also ein Parallelogramm). Mittels des Vektors $OE = \mathfrak{e}$ denken wir uns die Vektoren $OA' = \mathfrak{a}'$, $OB' = \mathfrak{b}'$, $OS' = \mathfrak{s}'$ in der vorher beschriebenen Weise so konstruiert, daß

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}\mathfrak{c}.$$

Dann ist zu zeigen, daß

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

oder

$$\mathfrak{s}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

oder

$$\mathfrak{s}' = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}',$$

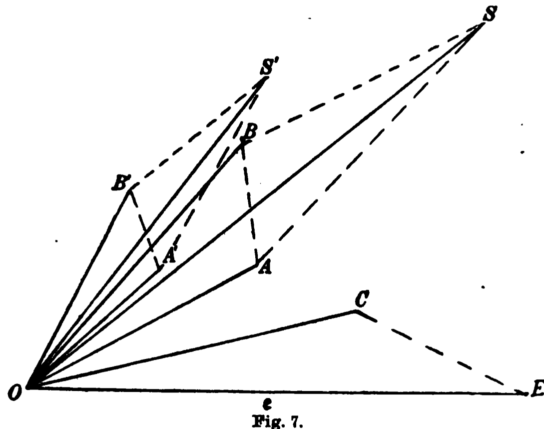


Fig. 7.

in anderen Worten, daß auch $OA'S'B'$ ein Parallelogramm ist.

1) Nach H. Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, § 21 und O. Stolz und J. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik, XI. Abschnitt, 6.

Nach der Konstruktion bestehen die Proportionen

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OC|}{|OE|}$$

und

$$\frac{|OB'|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OE|},$$

also ist auch

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}.$$

Da außerdem aus der Gleichheit der beiden Winkel AOA' und BOB' (jeder von ihnen ist gleich $\sphericalangle EOC$) folgt, daß

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB',$$

können wir schließen, daß

$$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\triangle AOS \sim \triangle A'OS'$$

und

$$\triangle OBS \sim \triangle OB'S'.$$

Unter Berücksichtigung der aus der Ähnlichkeit dieser Dreieckspaare resultierenden Winkelgleichheiten erkennt man, daß auch

$$\triangle ABS \sim \triangle A'B'S'.$$

Indem man jetzt noch von der Tatsache Gebrauch macht, daß nach Konstruktion $AOBS$ ein Parallelogramm ist, folgert man weiter:

$$\sphericalangle OB'A' = \sphericalangle S'A'B' \quad \text{und} \quad \sphericalangle OA'B' = \sphericalangle S'B'A';$$

also ist OB' parallel $A'S'$ und OA' parallel $B'S'$, demnach auch $OA'S'B'$ ein Parallelogramm, woraus sich die Gültigkeit des distributiven Gesetzes für die Multiplikation der Vektoren ergibt.

G. Division eines Vektors durch einen anderen.

Soll aus den Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, welche mit $\mathfrak{e}$ die Winkel φ_3 bezüglich φ_1 einschließen, und deren Längen zu $|\mathfrak{e}|$ die Verhältnisse γ bezüglich α haben, ein Vektor $\mathfrak{b}$ so bestimmt werden, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c},$$

so muß die Amplitude φ_2 von $\mathfrak{b}$ die Gleichung

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$$

und die Verhältniszahl $\beta = |\mathfrak{b}| : |\mathfrak{e}|$ die Gleichung

$$\alpha\beta = \gamma$$

erfüllen. Diese Relationen zeigen, daß, wenn α nicht gleich Null ist, die Aufgabe stets, und zwar nur auf eine Art, gelöst werden kann. Konstruieren läßt sich $\mathfrak{b}$, indem man (vgl. die Fig. 6, S. 370) durch einen beliebigen Punkt B den Vektor $BD = \mathfrak{e}$ zieht und über BD das dem Dreieck $AA'C$ ähnliche Dreieck BDB' zeichnet. $BB' = \mathfrak{b}$ ist der die Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ befriedigende Vektor.

H. Korrespondenz zwischen der Multiplikation (Division) der Vektoren und der Multiplikation (Division) der gemeinen komplexen Zahlen.

Bedeutet $\mathfrak{e}$ wieder den Vektor, welcher bei der Multiplikation jeden andern Vektor ungeändert läßt, und $\mathfrak{i}$ vorläufig einen beliebigen Vektor, ist ferner (vgl. E, S. 368)

$$\mathfrak{a} = \alpha_1\mathfrak{e} + \alpha_2\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{b} = \beta_1\mathfrak{e} + \beta_2\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \gamma_1\mathfrak{e} + \gamma_2\mathfrak{i},$$

so fragt es sich, ob γ_1, γ_2 ebenso von $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ abhängen wie die Koeffizienten des Produktes zweier gemeinen komplexen Zahlen von denen der Faktoren (vgl. § 2 E, S. 356). Wir stellen diese Untersuchung zunächst für die Produkte $\mathfrak{e}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$ an. Nach F ist ohne weiteres

$$\mathfrak{e}\mathfrak{e} = \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{e}\mathfrak{i} = \mathfrak{i}\mathfrak{e} = \mathfrak{i}.$$

Bezeichnen wir die Amplitude von $\mathfrak{i}$ in bezug auf $\mathfrak{e}$ mit ω und das Verhältnis $|\mathfrak{i}| : |\mathfrak{e}|$ mit ι, so ist nach F $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$ der Vektor, der die Amplitude 2ω und dessen Länge zu $|\mathfrak{e}|$ das Verhältnis ι^2 hat. Soll nun das Vektorenprodukt $\mathfrak{i}\mathfrak{i}$ ebenso aus den Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{i}$ zusammengesetzt sein, wie das Produkt ii aus den komplexen Einheiten e, i (vgl. § 2, (XIV a), S. 356), so muß

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = -\mathfrak{e}$$

werden. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn

1. $$2\omega = \pi \quad \text{oder} \quad = \pi + 2k\pi,$$

   wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, und

2. $$\iota^2 = 1, \quad \text{also} \quad \iota = 1$$

   ist.

Wir wählen deshalb von nun an als den zweiten der beiden Vektoren, durch welche wir die sämtlichen Vektoren der Ebene dar-

stellen, den, der dieselbe Länge wie e hat und mit e den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ einschließt[1]).

Um das Produkt

$$c = ab = (\alpha_1 e + \alpha_2 i)(\beta_1 e + \beta_2 i)$$

auf die Form $\gamma_1 e + \gamma_2 i$ zu bringen, können wir, da für die Multiplikation zweier Vektoren das distributive Gesetz unter F bewiesen ist, jedes Glied der ersten Summe auf der rechten Seite mit jedem Glied der zweiten multiplizieren. Alsdann erhalten wir:

$$\begin{aligned} c = ab &= (\alpha_1\beta_1) ee + (\alpha_1\beta_2) ei + (\alpha_2\beta_1) ie + (\alpha_2\beta_2) ii \\ &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) e + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) i. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Produktes zweier Vektoren sind also aus denen der als lineare Verbindungen von e, i gegebenen beiden Vektoren genau so zu bilden wie die Koeffizienten des Produktes zweier gemeinen komplexen Zahlen aus denen der in der Form linearer Verbindungen von e, i geschriebenen Faktoren.

Will man bei gegebenen Werten von α_1, α_2, γ_1, γ_2 die Zahlen β_1, β_2 so bestimmen, daß

$$\beta_1 e + \beta_2 i = \frac{\gamma_1 e + \gamma_2 i}{\alpha_1 e + \alpha_2 i},$$

so müssen β_1, β_2 denselben beiden Gleichungen ersten Grades genügen wie die Koeffizienten des Quotienten $\frac{\gamma_1 e + \gamma_2 i}{\alpha_1 e + \alpha_2 i}$; sie müssen also auch dieselben Werte $\frac{\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ beziehungsweise $\frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ besitzen.

I. Gegenseitig eindeutige Zuordnung der Vektoren der Ebene (bezüglich der Punkte der Ebene) und der gemeinen komplexen Zahlen.

Die Abschnitte E und H haben uns das Ergebnis geliefert, daß das System der in der Form $\xi e + \eta i$ dargestellten Vektoren einer Ebene dem der gemeinen komplexen Zahlen $\xi e + \eta i$ in dem Sinne

1) Ebensogut könnten wir auch den Vektor wählen, welcher mit e den Winkel $\frac{3}{2}\pi$ bildet. Die Festsetzung, daß die Richtungen von e und i aufeinander senkrecht stehen, ist also nicht etwa eine willkürliche Konvention, ergibt sich vielmehr mit Notwendigkeit einerseits aus der unter F aufgestellten Definition des Vektorproduktes, andrerseits aus der Forderung, daß die Multiplikationsregeln für die Vektoreinheiten e, i mit denen für die Einheiten e, i der gemeinen komplexen Zahlen übereinstimmen sollen.

eindeutig zugeordnet ist, daß, wenn man irgend welche der vier Grundoperationen einerseits an den Vektoren, andrerseits an den entsprechenden komplexen Zahlen ausführt, man wieder zu entsprechenden Individuen beider Systeme gelangt. Damit ist der in § 1 dieses Kapitels angekündigte Beweis von der transienten Realität der komplexen Zahlen geführt.

Zieht man, was ja keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, nur die Vektoren in Betracht, die von einem und demselben Punkte O ausgehen, so ist jeder derartige Vektor eindeutig durch seinen Endpunkt bestimmt; es werden also auch die gemeinen komplexen Zahlen und die Punkte der Ebene gegenseitig eindeutig zugeordnet. Der komplexen Zahl $\xi e + \eta i$ oder $\xi + \eta i$ entspricht der Endpunkt des Vektors $\xi \mathfrak{e} + \eta \mathfrak{i}$, d. h. derjenige Punkt P der Ebene, welcher in bezug auf das Koordinatensystem, dessen ξ-Achse in die Richtung von $\mathfrak{e}$, dessen η-Achse in die Richtung von $\mathfrak{i}$ fällt, bei Wahl von $|\mathfrak{e}|$ als Längeneinheit die Koordinaten ξ, η hat, und umgekehrt entspricht diesem Punkte die komplexe Zahl $\xi + \eta i$.

Nach dem Lehrsatze des **Pythagoras** ist

$$|OP|^2 = |\xi \mathfrak{e}|^2 + |\eta \mathfrak{i}|^2,$$

oder, wenn wir noch das Verhältnis $|OP| : |\mathfrak{e}| = \varrho$ setzen,

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Das Verhältnis der Vektorlänge zu $|\mathfrak{e}|$ ist also gleich dem absoluten Betrag (vgl. § 2 F, S. 360) der dem Vektor entsprechenden komplexen Zahl, und man erkennt, daß die § 2 F durch Rechnung bewiesenen Sätze über den absoluten Betrag der Summe bezüglich der Differenz zweier komplexen Zahlen dem planimetrischen Satze, daß eine Dreiecksseite kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden andern ist, äquivalent sind.

Weil jeder Vektor OP einerseits durch die Zahlen ϱ, φ, die sogenannten „Polarkoordinaten" des Punktes P, bestimmt ist und andrerseits einer einzigen komplexen Zahl $\xi + \eta i$ entspricht, findet eine gegenseitige Zuordnung auch zwischen den sämtlichen Wertsystemen (ϱ, φ) und den sämtlichen Wertsystemen (ξ, η) statt. Durch ϱ und φ werden ξ und η eindeutig bestimmt; zu einem gegebenen Wertsystem (ξ, η) gehört auch ein einziger Wert von ϱ, aber unendlich viele Werte von φ, die sich von dem durch die Bedingung $-\pi < \Phi \leq +\pi$ eindeutig charakterisierten Hauptwerte Φ durch Vielfache von 2π unterscheiden.

Wenn $\xi_1 + \eta_1 i$, $\xi_2 + \eta_2 i$ die den Vektoren $OP_1(\varrho_1, \varphi_1)$ bezüg-

lich $OP_2(\varrho_2, \varphi_2)$ entsprechenden komplexen Zahlen sind, so gehört, wie unter H gezeigt ist, zu dem Produkte

$$(\xi_1 + \eta_1 i)(\xi_2 + \eta_2 i) = (\xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2) + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) i$$

der Vektor $OP_1 \cdot OP_2$, dessen Polarkoordinaten nach F $\varrho_1 \varrho_2, \varphi_1 + \varphi_2$ sind; d. h., es entsprechen einander die Wertsysteme

$$(\xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2,\ \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) \quad \text{und} \quad (\varrho_1 \varrho_2,\ \varphi_1 + \varphi_2).$$

Ebenso folgt weiter, daß zur komplexen Zahl

$$(\xi_1 + \eta_1 i)(\xi_2 + \eta_2 i) \cdots (\xi_n + \eta_n i)$$

der Vektor mit den Polarkoordinaten $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n, \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$, insbesondere zur Potenz $(\xi + \eta i)^n$ das Wertsystem $\varrho^n, n\varphi$ gehört. $(\xi + \eta i)^n$ könnten wir demnach sofort in der Form $\Xi + Hi$ darstellen, falls wir imstande wären, zu jedem Wertsystem der Polarkoordinaten das entsprechende der rechtwinkligen Koordinaten anzugeben. Diese Forderung führt uns darauf, die Beziehungen zwischen den Wertsystemen (ϱ, φ) und (ξ, η) genauer zu studieren.

K. Darstellung der gegenseitigen Abhängigkeit von (ϱ, φ) und (ξ, η) mittels der trigonometrischen Funktionen.

Es sei φ irgend ein Winkel mit dem Anfangsschenkel OX, dem Endschenkel OZ, d. h., es messe φ die Größe der Drehung, welche im positiven Sinne auszuführen ist, um OX in die Lage OZ zu bringen. Nimmt man auf OZ einen Punkt P beliebig an und fällt von ihm auf OX das Lot PA, so ist, wie in der Ähnlichkeitslehre gezeigt wird, das Verhältnis der Länge von OA zur Länge von OP unabhängig von der Lage des Punktes P auf OZ; es ändert sich aber im allgemeinen mit dem Winkel φ, wird deshalb eine Funktion dieses Winkels, und zwar, zum Unterschiede von anderen Funktionen, der Kosinus von φ genannt; man schreibt

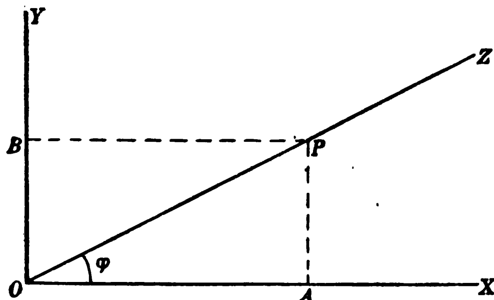


Fig. 8.

$$OA : OP = \cos\varphi.$$

Da P auf der Halbgeraden OZ selber liegt, hat OP stets positives Vorzeichen, während OA eine positive oder negative Größe ist, je

nachdem OA in die Richtung des Anfangsschenkels OX oder in die entgegengesetzte fällt.

Bildet OY mit OX den Winkel $\frac{\pi}{2}$, und ist B der Fußpunkt des von P auf OY gefällten Lotes, so stellt auch das Verhältnis $OB:OP$ eine von der Wahl des Punktes P auf OZ unabhängige Funktion von φ dar und wird der Sinus dieses Winkels genannt, in Zeichen:

$$OB:OP = \sin\varphi.$$

OB ist positiv oder negativ, je nachdem OB in die Richtung OY oder in die entgegengesetzte fällt.

Unmittelbar aus der Erklärung von Kosinus und Sinus ergeben sich die folgenden Eigenschaften dieser Funktionen:

1. Falls φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst,

so nimmt $\cos\varphi$ von 1 bis 0 ab, $\sin\varphi$ von 0 bis 1 zu;

falls φ von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst,

so nimmt $\cos\varphi$ von 0 bis -1 ab, $\sin\varphi$ von 1 bis 0 ab;

falls φ von π bis $\frac{3}{2}\pi$ wächst,

so nimmt $\cos\varphi$ von -1 bis 0 zu, $\sin\varphi$ von 0 bis -1 ab;

falls φ von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π wächst,

so nimmt $\cos\varphi$ von 0 bis 1 zu, $\sin\varphi$ von -1 bis 0 zu.

2. $$\cos(-\varphi) = \cos\varphi, \quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi.$$

3. $$\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2k\pi) = \sin\varphi,$$

wo k eine beliebige, positive oder negative, ganze Zahl bedeutet.

Nennt man ferner das Verhältnis $OB:OA$ die Tangente des Winkels φ (in Zeichen: $\operatorname{tang}\varphi = OB:OA$) und das Verhältnis $OA:OB$ die Kotangente des Winkels φ (in Zeichen: $\operatorname{cotg}\varphi = OA:OB$), so ist leicht ersichtlich, daß

4. $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

und für jede ganze Zahl k

5. $$\operatorname{tang}(\varphi + k\pi) = \operatorname{tang}\varphi, \quad \operatorname{cotg}(\varphi + k\pi) = \operatorname{cotg}\varphi.$$

Die vier Funktionen Kosinus, Sinus, Tangens, Kotangens heißen mit einem gemeinsamen Namen „goniometrische“ oder „trigonometrische“ Funktionen.

Fassen wir in Fig. 8 OP jetzt als Vektor auf, so erhalten wir mittels der soeben eingeführten Funktionen zwischen den rechtwinkligen und den Polarkoordinaten seines Endpunktes sofort die Beziehungen:

6. $$\cos\varphi = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\eta}{\xi}, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\xi}{\eta},$$

welche es unter Benutzung der trigonometrischen Tafeln gestatten, zu jedem Wertsystem (ϱ, φ) das zugehörige (ξ, η) und zu jedem Wertsystem (ξ, η) das zugehörige (ϱ, φ) zu finden. Es ergibt sich nämlich einerseits:

7. $$\xi = \varrho\cos\varphi, \quad \eta = \varrho\sin\varphi,$$

während andrerseits, wenn ξ, η gegeben sind, ϱ durch die unter I hergeleitete Gleichung

8. $$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

und φ durch eine der Gleichungen 6 bestimmt werden, wobei zu bemerken ist, daß Φ, der Hauptwert von φ,

wenn $\xi > 0$, $\eta > 0$, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$,

wenn $\xi > 0$, $\eta < 0$, zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$,

wenn $\xi < 0$, $\eta > 0$, zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π,

wenn $\xi < 0$, $\eta < 0$, zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $-\pi$

liegt.

Setzen wir in 8 für ξ und η die Werte 7 ein, so erhalten wir zwischen den Funktionen Kosinus und Sinus noch die Relation

9. $$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Zufolge 7 können wir die beliebige komplexe Zahl

$$\xi + \eta i$$

jetzt auch in die Form

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bringen, welche wir ihre trigonometrische Form nennen wollen, während der Faktor $\cos\varphi + i\sin\varphi$, den wir künftig der Kürze wegen auch $\left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\varphi\right]$ schreiben werden, nach Argand (Annales de Gergonne, Bd. 5, S. 208) der „Richtungsfaktor“ heißt.

Indem wir von dem unter H bewiesenen Satze, daß das Produkt zweier Vektoren, so wie es unter F definiert ist, in derselben Weise

aus seinen Faktoren gebildet werden kann wie das Produkt zweier gemeinen komplexen Zahlen aus diesen, d. h. von der Gleichung (vgl. S. 374)

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)\,\mathfrak{e} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,\mathfrak{i}$$

Gebrauch machten, erschlossen wir unter I, S. 376, daß der Punkt, welcher die rechtwinkligen Koordinaten $\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2$, $\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1$ besitzt, die Polarkoordinaten $\varrho_1\varrho_2$, $\varphi_1 + \varphi_2$ hat.

Es ist also nach Gleichung 7:

$$\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2 = \varrho_1\varrho_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

und

$$\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 = \varrho_1\varrho_2\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Führen wir noch auf den linken Seiten für die rechtwinkligen die Polarkoordinaten ein, und dividieren wir die entstehenden Gleichungen durch $\varrho_1\varrho_2$, so erhalten wir die wichtigen Relationen:

10. $$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

und

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1,$$

die sogenannten „Additionstheoreme“ der Funktionen Kosinus und Sinus, die sich hier als unmittelbare Konsequenzen des vorher zitierten, unter H bewiesenen Satzes ergeben haben, und deren Wichtigkeit darin besteht, daß aus ihnen sich alle Formeln der Goniometrie leicht ableiten lassen. Von diesen wollen wir der künftigen Benutzung wegen nur die folgenden anführen: Setzen wir in 10 für φ_2 überall $-\varphi_2$, was zulässig ist, weil ja alle unsere Entwicklungen für negative Winkel ebenso gelten wie für positive, so ergibt sich:

11. $$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

und

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_2\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Aus 10 und 11 erhalten wir weiter:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -2\sin\varphi_1\sin\varphi_2,$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\cos\varphi_2\sin\varphi_1,$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Für

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \beta,$$

also

$$\varphi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

gehen die vier letzten Gleichungen über in

12.
$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

§ 4. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen im Gebiete der komplexen Zahlen.

A. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Nach Einführung der trigonometrischen Funktionen können wir nunmehr die schon am Schlusse von § 3 I, S. 376, erwähnte Aufgabe, die n^{te} Potenz der beliebigen komplexen Zahl

$$\xi + \eta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\varphi$$

in der Form $\Xi + Hi$ darzustellen, sofort lösen. Da nach § 3 I die Potenz $(\xi + \eta i)^n$ dem Vektor entspricht, dessen Polarkoordinaten ϱ^n, $n\varphi$, dessen rechtwinklige Koordinaten also $\varrho^n\cos n\varphi$, $\varrho^n\sin n\varphi$ sind, erhalten wir unmittelbar:

(I) $$[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Diese Gleichung heißt die Moivresche Formel[1]).

Setzt man in § 2 E, Gleichung (XV), S. 356,

$$\gamma = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \alpha = \cos\varphi, \quad \alpha' = \sin\varphi,$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,i$$
$$= \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

1) Nach de Moivre, welcher in seinen „Miscellanea analytica" (1730), S. 1 die obige Gleichung zwar nicht selbst, aber doch eine eng mit ihr zusammenhängende veröffentlicht hat; vgl. Cantor III, S. 646. In der obigen Gestalt findet sich die Moivresche Formel erst bei Euler, Introductio in analysin infinitorum, Bd. I, Kap. 8.

also:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$
$$= [\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]^n$$
$$= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi);$$

d. h., die Gleichung (I) gilt auch, wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist.

Da die Potenz mit ganzzahligem Exponenten nur ein besonderer Fall des Produktes (bezüglich Quotienten) ist und für die Multiplikation und die Division der komplexen Zahlen dieselben Regeln gelten wie im Bereiche der reellen Zahlen, so bleiben auch die Kap. I, § 7 B und Kap. V, § 2 C abgeleiteten Potenzformeln für die Potenzen komplexer Zahlen mit ganzzahligen Exponenten bestehen.

Entwickelt man die linke Seite von Gleichung (I) nach dem binomischen Lehrsatz in eine Summe und vergleicht die reellen wie die rein imaginären Bestandteile auf beiden Seiten, so erhält man $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ in Form ganzer rationaler Funktionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$.

B. Wurzeln und Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Wenn man in Gleichung (I)

$$\varrho^n = A, \quad n\varphi = \alpha,$$

also

$$\varrho = \sqrt[n]{A}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{n}$$

setzt, wo $\sqrt[n]{A}$ die einzige positive Zahl bedeuten soll, deren n^{te} Potenz gleich der positiven Zahl A ist, so geht (I) über in

(I a) $$\left(\sqrt[n]{A}\left[{}^c_s\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]\right)^n = A\left[{}^c_s\,\alpha\right].$$

Die Zahl $\sqrt[n]{A}\left[{}^c_s\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right]$, deren n^{te} Potenz gleich der komplexen Zahl $A\left[{}^c_s\,\alpha\right]$ ist, haben wir nach der Kap. I, § 8 A eingeführten Terminologie als n^{te} Wurzel aus $A\left[{}^c_s\,\alpha\right]$ zu bezeichnen. Es fragt sich, ob sie die einzige Zahl ist, welche diese Eigenschaft besitzt. Da (I) für jeden Wert von φ, (I a) also für jeden Wert von α gilt, dürfen wir in (I a) α durch $\alpha + 2k\pi$ ersetzen, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Berücksichtigt man noch, daß (nach § 3 K, Gleichung 3)

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \quad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,$$

so geht (I a) über in

(I b) $$\left(\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right)^n = A\left[{c \atop s}\alpha\right].$$

Es sind also die n^{ten} Potenzen aller Zahlen $\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ gleich der vorgelegten komplexen Zahl $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$. Noch andere Zahlen von derselben Eigenschaft kann es nicht geben; denn, damit die n^{te} Potenz einer komplexen Zahl $\varrho\left[{c \atop s}\varphi\right]$ den Wert $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$ habe, muß einerseits $\varrho^n = A$ sein, und nach Kap. VI, § 7 C, S. 313, existiert nur eine positive Zahl von dieser Eigenschaft, eben die, welche wir mit $\sqrt[n]{A}$ bezeichnet haben; andrerseits muß

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

also

$$\cos n\varphi = \cos\alpha, \quad \sin n\varphi = \sin\alpha$$

sein. Der Kosinus und der Sinus zweier Winkel $n\varphi$ und α können aber nur dann übereinstimmen, wenn die Winkel entweder gleich sind oder sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden.

Die in (I b) enthaltenen, den unendlich vielen Werten von k entsprechenden Werte der n^{ten} Wurzel aus $A\left[{c \atop s}\alpha\right]$ sind nicht sämtlich voneinander verschieden. Bezeichnen k_1 und k_2 zwei Werte von k, so ist

$$\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k_1\pi}{n}\right)\right] = \left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}\right)\right]$$

dann und nur dann, wenn

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{2k_1\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}+2\lambda\pi,$$

wo λ Null oder eine ganze Zahl ist, also wenn

$$\frac{k_1}{n} = \frac{k_2}{n}+\lambda$$

oder

$$k_1 - k_2 = n\lambda$$

oder

$$k_1 \equiv k_2 \pmod{n}.$$

Da es genau n (mod n) voneinander verschiedene ganze Zahlen gibt, z. B. 0, 1, 2, ..., $(n-2)$, $(n-1)$, liefert Gleichung (I b) genau n Werte, nämlich die Zahlen

$$\sqrt[n]{A}\left[{c \atop s}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

für

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-2),\ (n-1),$$

deren jede als n^{te} Wurzel aus $A\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\,\alpha\right]$ zu bezeichnen ist. Einen beliebigen der n Werte der n^{ten} Wurzel aus einer komplexen Zahl $a = A\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\,\alpha\right]$ pflegt man $\sqrt[n]{*a}$ zu schreiben, so daß also

$$\text{(II)}\qquad \sqrt[n]{*A\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\,\alpha\right]} = \sqrt[n]{A}\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

für

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-2),\ (n-1).$$

„Hauptwert" der n^{ten} Wurzel nennt man den, welcher unter der Voraussetzung $-\pi < \alpha \leqq \pi$ dem Werte $k = 0$ entspricht. Wenn man den Hauptwert meint, läßt man das Zeichen * fort, schreibt also

$$\sqrt[n]{A\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\,\alpha\right]} = \sqrt[n]{A}\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right].$$

Die reellen Werte der n^{ten} Wurzel aus einer reellen Zahl.

Da unter den komplexen Zahlen ja auch die reellen enthalten sind (für die reellen positiven Zahlen ist $\alpha = 0$, für die reellen negativen $\alpha = \pi$), gilt das soeben Auseinandergesetzte auch von den n^{ten} Wurzeln aus reellen Zahlen. Während wir im Bereiche der reellen Zahlen (vgl. Kap. IV, § 7 B) unterscheiden mußten, ob der Radikand positiv oder negativ, ob der Exponent eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, und dementsprechend die n^{te} Wurzel aus einer reellen Zahl bald zwei, bald einen Wert hatte, bald gar nicht existierte, besitzt im Gebiete der komplexen Zahlen auch die n^{te} Wurzel aus einer reellen Zahl ausnahmslos und stets n voneinander verschiedene Werte. Ist der Radikand eine positive reelle Zahl A, also $\alpha = 0$, so ist der Hauptwert der n^{ten} Wurzel, $\sqrt[n]{A}$, auch positiv reell. Ein zweiter Wert kann nur dann reell werden, wenn $\frac{2k\pi}{n} = \pi$, also $k = \frac{1}{2}n$, was nur möglich ist, falls n eine gerade Zahl bedeutet. In diesem Falle erhalten wir tatsächlich für $k = \frac{1}{2}n$ den reellen negativen Wert $\sqrt[n]{A}\cos\pi = -\sqrt[n]{A}$. Ist der Radikand eine reelle negative Zahl, also $\alpha = \pi$, so ist der Hauptwert

$$\sqrt[n]{A\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\,\pi\right]} = \sqrt[n]{A}\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

niemals reell; z. B. ist der Hauptwert von

$$\sqrt{-1} = \left[{}^c_s\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = i$$

und der von

$$\sqrt[3]{-1} = \left[{}^c_s\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}.$$

Ein reeller Wert kann nur einem solchen k entsprechen, für welches

$$\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \pi$$

oder

$$2k + 1 = n,$$

d. h. ausschließlich dem Werte $k = \frac{n-1}{2}$, der nur bei ungeradem n eine ganze Zahl ist. Wenn n gerade, sind alle n Werte der n^{ten} Wurzel aus einer reellen negativen Zahl imaginär. Diese Folgerungen umfassen das, was Kap. IV, § 7 B, S. 171 ff., über die Existenz der Wurzeln aus positiven und negativen Zahlen gesagt ist.

Die imaginären Werte der n^{ten} Wurzel aus einer reellen Zahl.

Wenn eine bestimmte imaginäre Zahl unter den n Werten der n^{ten} Wurzel aus einer reellen Zahl vorkommt, so ist die konjugiert imaginäre auch unter diesen n Werten enthalten.

Beweis:

1. Ist der Radikand eine reelle positive Zahl A, also $\alpha = 0$, so haben wir

$$\sqrt[n]{{}^*A} = \sqrt[n]{A} \left[{}^c_s\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Wegen der Beziehungen

$$\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi, \quad \sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$$

sind die zu zwei Werten k_1 und k_2 von k gehörigen Werte der rechten Seite dann und nur dann konjugiert imaginär, wenn

$$\frac{2k_1\pi}{n} + \frac{2k_2\pi}{n} = 2\pi$$

oder

$$k_2 = n - k_1.$$

Für $k_1 = 0$ wird $k_2 = n$, also $k_2 \equiv 0 \pmod{n}$, d. h., k_1 und k_2 ergeben denselben reellen positiven Wert. Ist n gerade und $k_1 = \frac{n}{2}$, so wird

auch $k_2 = \frac{n}{2}$, d. h., k_1 und k_2 ergeben denselben reellen negativen Wurzelwert. Zu jedem andern Wert k_1 erhalten wir einen von ihm verschiedenen, die konjugierte Wurzel liefernden Wert k_2.

2. Ist der Radikand eine reelle negative Zahl $-A$, also $\alpha = \pi$, so wird

$$\sqrt[n]{{}^*-A} = \sqrt[n]{A}\left[{}^c_s\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Den Werten k_1 und k_2 von k entsprechen dann und nur dann konjugiert imaginäre Werte der rechten Seite, wenn

$$\frac{\pi}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \frac{2k_2\pi}{n} = 2\pi$$

oder

$$k_2 = n - 1 - k_1.$$

Für $k_1 = \frac{n-1}{2}$ wird auch $k_2 = \frac{n-1}{2}$. Im Falle eines ungeraden n entspricht dem Werte $k = \frac{n-1}{2}$ die einzige reelle negative Wurzel. Zu jedem anderen Werte von k_1 gehört ein die Gleichung $k_2 = n - 1 - k_1$ befriedigender, von k_1 verschiedener Wert k_2; zu jeder imaginären Wurzel existiert also die konjugierte.

Geometrische Repräsentation der n Werte der n^{ten} Wurzel aus einer komplexen Zahl.

Die in Gleichung (II) angegebenen n Werte von $\sqrt[n]{{}^*A\left[{}^c_s\,\alpha\right]}$ haben sämtlich den gleichen absoluten Betrag $\sqrt[n]{A}$, die ihnen entsprechenden Punkte liegen also auf einem Kreise um den Anfangspunkt O mit einem Radius, dessen Länge zur Längeneinheit das Verhältnis $\sqrt[n]{A}$ hat. Den zum Hauptwert ($k = 0$) zugehörigen Punkt findet man als Schnittpunkt dieses Kreises und des Strahls, welcher mit der Anfangsrichtung den Winkel $\frac{\alpha}{n}$ einschließt. Die den übrigen Werten entsprechenden Punkte erhält man, wenn man von diesem Punkte aus den Kreisumfang in n gleiche Bogen teilt.

Die Formeln für das Rechnen mit Wurzeln.

Wie schon Kap. IV, § 7 B hervorgehoben, beruht die Gültigkeit der Kap. I, § 8 B aufgestellten Gleichungen unter Wurzelausdrücken einerseits auf den Gesetzen des Potenzierens für ganzzahlige Exponenten,

andrerseits auf der Eindeutigkeit der Wurzeln im Gebiete der absoluten Zahlen. Die Potenzgesetze sind auch im komplexen Zahlbereiche gültig (siehe A, S. 381), die Wurzeln in diesem aber nicht mehr eindeutig. Wir werden die Richtigkeit der Wurzelformeln jetzt also erst zu prüfen, insbesondere festzustellen haben, in welchem Sinne Gleichungen zu verstehen sind, auf deren linker und rechter Seite je ein mehrwertiger Ausdruck steht. Wir beginnen mit der Untersuchung der Gleichung

(III) $$\sqrt[n]{{}^*a} \cdot \sqrt[n]{{}^*b} = \sqrt[n]{{}^*a\,b},$$

wo

$$a = A\left[{}^c_s\,\alpha\right], \qquad b = B\left[{}^c_s\,\beta\right].$$

Einerseits ist

$$\sqrt[n]{{}^*a} \cdot \sqrt[n]{{}^*b} = \sqrt[n]{A\,B} \cdot \left[{}^c_s\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \cdot \left[{}^c_s\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2h\pi}{n}\right)\right]$$
$$= \sqrt[n]{A\,B}\left[{}^c_s\left(\frac{\alpha+\beta}{n} + \frac{2(k+h)\pi}{n}\right)\right],$$

wo

$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$h = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Andrerseits hat man:

$$\sqrt[n]{{}^*a\,b} = \sqrt[n]{A\,B}\left[{}^c_s\left(\frac{\alpha+\beta}{n} + \frac{2l\pi}{n}\right)\right],$$

wo

$$l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Wenn jede der Zahlen h, k die Werte $0, 1, \ldots, n-1$ durchläuft, so nimmt auch $h+k$ genau n (mod n) voneinander verschiedene Werte an; es entspricht deshalb jedem Wert von $h+k$ ein Wert l und umgekehrt; d. h., jeder der Werte von $\sqrt[n]{{}^*a} \cdot \sqrt[n]{{}^*b}$ ist unter den Werten von $\sqrt[n]{{}^*ab}$ enthalten und jeder Wert von $\sqrt[n]{{}^*ab}$ unter den Werten von $\sqrt[n]{{}^*a} \cdot \sqrt[n]{{}^*b}$. Eine solche Gleichung zwischen zwei mehrwertigen Ausdrücken, in welcher jeder Wert der linken Seite gleich einem der rechten und jeder Wert der rechten Seite gleich einem der linken ist, nennt man nach M. Ohm[1]) eine „vollkommene" Gleichung. In diesem Sinne ist also Gleichung (III) eine vollkommene.

Dieselbe Eigenschaft läßt sich ebenso von der Gleichung

(IV) $$\sqrt[n]{{}^*a} : \sqrt[n]{{}^*b} = \sqrt[n]{{}^*(a:b)}$$

beweisen.

1) M. Ohm, Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik, II. Teil, S. 386.

Daß auch

(V) $$\sqrt[m]{*\sqrt[n]{*a}} = \sqrt[mn]{*a}$$

eine vollkommene Gleichung ist, kann auf demselben Wege, noch kürzer aber folgendermaßen gezeigt werden. Da man eine beliebige Zahl in die $(mn)^{\text{te}}$ Potenz erheben darf, indem man sie in die m^{te} und dann das erhaltene Resultat in die n^{te} Potenz erhebt, folgt, daß die $(mn)^{\text{te}}$ Potenz irgend eines Wertes der linken Seite gleich a, jeder ihrer Werte also sicher unter den Werten von $\sqrt[mn]{*a}$ enthalten ist. Andrerseits haben wir:

$$a = (\sqrt[mn]{*a})^{mn} = [(\sqrt[mn]{*a})^m]^n,$$

also

$$(\sqrt[mn]{*a})^m = \sqrt[n]{*a}$$

und

$$\sqrt[mn]{*a} = \sqrt[m]{*\sqrt[n]{*a}},$$

d. h., jeder Wert der rechten Seite von (V) kommt auch unter den Werten der linken Seite vor.

(VI) $$(\sqrt[np]{*a})^{mp} = (\sqrt[n]{*a})^m$$

ist eine vollkommene Gleichung. Beweis wie für (III) oder für (V).

Jeder Wert der linken Seite der Gleichung

(VII) $$(\sqrt[n]{*a})^m = \sqrt[n]{*a^m}$$

ist unter den Werten der rechten Seite enthalten. Vollkommen ist die Gleichung aber nur, wenn m, n relativ prim sind. Es ist nämlich:

$$(\sqrt[n]{*a})^m = (\sqrt[n]{A})^m \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} \left(\frac{m}{n}\alpha + \frac{2mk\pi}{n} \right) \right],$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

und

$$\sqrt[n]{*a^m} = \sqrt[n]{A^m} \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} \left(\frac{m}{n}\alpha + \frac{2h\pi}{n} \right) \right],$$
$$(h = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Zu jedem Werte von k gibt es einen Wert h, so daß

$$mk \equiv h \pmod{n},$$

zu jedem Werte von h einen diese Kongruenz befriedigenden Wert von k aber nur dann, wenn m, n relativ prim sind (vgl. Kap. I, § 12 A und Kap. V, § 4 D). Ist der größte gemeinsame Teiler t von m, n

von 1 verschieden, so entspricht ein Wert k nur den Werten von h, welche Vielfache von t sind.

Jeder Wert der linken Seite der Gleichung

$$\text{(VIII)} \qquad \sqrt[n]{*a^m} = \sqrt[np]{*a^{mp}}$$

ist unter den Werten der rechten Seite enthalten (Beweis wie bei (V)). Da die linke Seite n verschiedene, die rechte np verschiedene Werte besitzt, kann, wenn $p > 1$, Gleichung (VIII) niemals eine vollkommene sein.

Die Ausdrücke auf beiden Seiten der Formeln (III) bis (VIII) werden eindeutig, wenn für jede Wurzel ein bestimmter Wert, z. B. der vorher definierte Hauptwert ($k = 0$), gesetzt wird. Es fragt sich, ob die Formeln etwa sämtlich für diese Hauptwerte gültig sind. Indem man in dem Beweise für (III) jede der Zahlen h, k, l gleich Null setzt, erkennt man, daß (III) für die Hauptwerte der Wurzeln dann und nur dann gilt, wenn neben

$$-\pi < \alpha \leqq \pi, \quad -\pi < \beta \leqq \pi \quad \text{auch} \quad -\pi < \alpha + \beta \leqq \pi \quad \text{ist.}$$

Sind die Radikanden a, b z. B. reelle positive Zahlen, also $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so ist diese Bedingung erfüllt, aber nicht, wenn a, b reelle negative Zahlen ($\alpha = \pi$, $\beta = \pi$) sind.

Für die Formel (IV) lautet die entsprechende Bedingung

$$-\pi < \alpha - \beta \leqq \pi.$$

Die Formeln (V) und (VI) gelten für die Hauptwerte der Wurzeln, wie man unmittelbar sieht, wenn man die Richtungsfaktoren der beiden Seiten der Gleichungen aufschreibt.

(VII) und (VIII) sind dagegen im allgemeinen nicht für die Hauptwerte richtig. Es muß dazu je eine besondere Bedingung erfüllt sein, die man durch Vergleichung der Richtungsfaktoren beider Seiten der Gleichung erhält, deren Ableitung man auch in Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, XII. Abschnitt, Nr. 4 (S. 360 u. 361) findet.

Damit sind die Fragen erschöpfend erledigt, die wir Kap. IV, § 7 B, S. 172—174, im Gebiete der reellen relativen Zahlen nur unvollständig beantworten konnten.

Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Dehnen wir die Kap. II, § 5 B für eine Potenz mit gebrochenem Exponenten gegebene Definition $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$ auch auf den Fall einer

komplexen Basis a aus, so ist klar, daß die letzten Entwicklungen schon die Theorie dieser Potenzen enthalten. Für $a = A\left[{c \atop s}\,\alpha\right]$ wird

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{A})^m \left[{c \atop s}\left(\frac{m}{n}\alpha + 2\,\frac{m}{n}\,k\pi\right)\right].$$

Wenn m, n den größten gemeinsamen Teiler t haben, so liefern schon zwei solche Werte von k, die $\left(\operatorname{mod} \frac{n}{t}\right)$ einander kongruent sind, denselben Wert des Richtungsfaktors; es hat dann also die rechte Seite und damit auch $a^{\frac{m}{n}}$ genau $\frac{n}{t}$ voneinander verschiedene Werte. Ist $t = 1$, sind demnach m, n relativ prim, so besitzt $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ genau n voneinander verschiedene Werte, welche in diesem Falle nach (VII) dieselben sind wie die n Werte, die $\sqrt[n]{{}^*a^m}$ stets hat.

Irgend einen beliebigen Wert der Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ wollen wir von nun an nach Cauchy (Cours d'Analyse VII, § 1)[1]) mit $(\!(a)\!)^{\frac{m}{n}}$ bezeichnen, während $a^{\frac{m}{n}}$ stets den $k = 0$ entsprechenden Hauptwert der Potenz bedeuten soll. Für eine reelle positive Basis a ($\alpha = 0$) ist der Hauptwert $a^{\frac{m}{n}}$ der einzige reelle positive Wert unter den sämtlichen Werten von $(\!(a)\!)^{\frac{m}{n}}$. Die jetzt gegebene Definition des Hauptwertes steht also in Einklang mit der Kap. IV, § 7 B, S. 173, aufgestellten. Ist a eine reelle negative Zahl ($\alpha = \pi$) und n eine gerade Zahl, so ist unter der Bedingung, daß m, n relativ prim, keiner der Werte von $(\!(a)\!)^{\frac{m}{n}}$ reell; ist bei derselben Voraussetzung n eine ungerade Zahl, so ist einer der Werte von $(\!(a)\!)^{\frac{m}{n}}$ reell und negativ, aber nicht der Hauptwert, sondern der $k = \frac{n-1}{2}$ entsprechende.

C. Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Die rechten Seiten der zunächst für eine rationale Zahl x geltenden Gleichungen

$$(\!(a)\!)^x = A^x \left[{c \atop s}(x\alpha + 2xk\pi)\right]$$

und

$$a^x = A^x \left[{c \atop s}(x\alpha)\right]$$

1) Œuvres complètes, Série II, T. 3, p. 157.

behalten auch dann noch eine bestimmte Bedeutung, wenn statt x die irrationale Zahl $\xi = (x_n; X_n)$ eingesetzt wird. Wir dürfen deshalb definieren:

$$(\!(a)\!)^{\xi} = A^{\xi}\left[{}^{c}_{s}(\xi\alpha + 2\xi k\pi)\right]$$

und

$$a^{\xi} = A^{\xi}\left[{}^{c}_{s}(\xi\alpha)\right].$$

Um diese Definition zu rechtfertigen, haben wir uns davon zu überzeugen, daß, wenn $\xi - x_n$ (oder auch $X_n - \xi$) hinreichend klein gewählt wird, der absolute Betrag und der Richtungsfaktor von $(\!(a)\!)^{x_n}$ (bezüglich von $(\!(a)\!)^{X_n}$) sich beliebig wenig von dem absoluten Betrag beziehungsweise dem Richtungsfaktor von $(\!(a)\!)^{\xi}$ unterscheiden, selbstverständlich bei demselben Werte von k. Für den absoluten Betrag folgt die Richtigkeit dieser Behauptung schon aus der Kap. VI, § 7 D für die Potenz einer positiven Zahl mit irrationalem Exponenten gegebenen Definition. Wenn

$$\xi = x_n + \delta$$

und zur Abkürzung noch

$$\alpha + 2k\pi = \alpha'$$

gesetzt wird, so ist

$$\left[{}^{c}_{s}(\xi\alpha + 2\xi k\pi)\right] - \left[{}^{c}_{s}(x_n\alpha + 2x_n k\pi)\right] = \left[{}^{c}_{s}(x_n\alpha' + \delta\alpha')\right] - \left[{}^{c}_{s}(x_n\alpha')\right]$$

$$= (\cos(x_n\alpha' + \delta\alpha') - \cos(x_n\alpha'))$$

$$+ i(\sin(x_n\alpha' + \delta\alpha') - \sin(x_n\alpha'))$$

$$= -2\sin\left(x_n\alpha' + \frac{1}{2}\delta\alpha'\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta\alpha'\right)$$

$$+ 2i\cos\left(x_n\alpha' + \frac{1}{2}\delta\alpha'\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta\alpha'\right).$$

Durch hinreichend kleine Werte von δ kann man $\sin\left(\frac{1}{2}\delta\alpha'\right)$ und damit auch die Differenz der beiden Richtungsfaktoren beliebig klein machen. Der für $(\!(a)\!)^{\xi}$ angegebene Ausdruck ist also tatsächlich der Grenzwert, welchem sich $(\!(a)\!)^{x_n}$ (bezüglich $(\!(a)\!)^{X_n}$) nähert, wenn $\xi - x_n$ (bezüglich $X_n - \xi$) hinreichend klein wird.

Zwei den Werten k_1 und k_2 von k entsprechende Werte von $(\!(a)\!)^{\xi}$ können nur dann einander gleich sein, wenn

$$\xi\alpha + 2\xi k_1\pi = \xi\alpha + 2\xi k_2\pi + 2l\pi,$$

wo l irgend eine ganze Zahl ist, oder wenn

$$\xi (k_1 - k_2) = l.$$

Da ξ irrational, kann diese Gleichung nur für $k_1 - k_2 = l = 0$ bestehen; zwei verschiedenen Werten von k entsprechen also auch stets verschiedene Werte von $((a))^\xi$; d. h., die Potenz mit irrationalem Exponenten hat im komplexen Zahlgebiete unendlich viele Werte.

Ist die Basis a eine reelle positive Zahl $(\alpha = 0)$, so ist unter den unendlich vielen Werten von $((a))^\xi$ der Hauptwert a^ξ der einzige reelle Wert. Wenn a reell und negativ ist, so sind sämtliche Werte von $((a))^\xi$ imaginär, beispielsweise ist keiner der Werte von $(-1)^{\sqrt{2}}$ reell; indessen gibt es dann unter den unendlich vielen Werten von $((a))^\xi$ solche, deren imaginärer Bestandteil beliebig klein ist, die also bei der geometrischen Repräsentation Punkten entsprechen, welche zwar nicht auf der Achse der reellen Zahlen selbst, wohl aber in ihrer unmittelbaren Nähe liegen.

D. Die Potenz als Funktion des Exponenten.

Indem wir die Basis a zunächst auf reelle positive Werte beschränken, lassen wir jetzt den Exponenten x alle möglichen reellen, rationalen und irrationalen, Werte durchlaufen. Zu jedem dieser Werte von x gehört ein einziger bestimmter, reeller positiver Wert von a^x, der für rationale x Kap. VI, § 7 C und für irrationale x Kap. VI, § 7 D bereits definiert ist. Man nennt deshalb den Hauptwert a^x eine eindeutige Funktion von x. Da einer unendlich kleinen Änderung von x auch immer eine unendlich kleine Änderung dieser Funktion entspricht (siehe Kap. VI, § 7 D), bezeichnet man sie als eine stetige Funktion von x. Wenn $a > 1$, nimmt a^x mit wachsendem x beständig zu; wenn $a < 1$, nimmt a^x mit wachsendem x beständig ab (Kap. VI, § 7 D). Die Wertveränderung der Funktion a^x können wir uns durch eine Zeichnung veranschaulichen, indem wir auf einer unbegrenzten geraden Linie einen Punkt O willkürlich annehmen, der dem Werte $x = 0$ entsprechen soll, eine beliebige Strecke als Längeneinheit wählen, dann irgend einen Wert x durch den Punkt der Geraden repräsentieren, dessen Entfernung von O zur Einheitsstrecke das Verhältnis x hat (vgl. Kap. VI, § 8), und endlich auf dem in diesem Punkte auf der Geraden errichteten Lote die Strecke abtragen, deren Länge zur Längeneinheit das Verhältnis $y = a^x$ besitzt. Weil a^x eine stetige Funktion von x ist, schließen sich die Punkte zu einer stetigen Kurve zusammen, von welcher man beliebig viele Punkte in der angegebenen Weise wirklich finden kann.

Die nebenstehende Zeichnung, in welcher als Längeneinheit eine Strecke von 5 mm gewählt ist, entspricht den Werten $a = 1{,}5$ und $a = 0{,}8$. Hat man die Kurve einmal konstruiert, so kann man unmittelbar zu irgend einem Werte von x den zugehörigen Wert von $y = a^x$ und umgekehrt auch zu jedem Werte von $y = a^x$ das zugehörige x, d. h. den Logarithmus von y für die Basis a, näherungsweise ablesen.

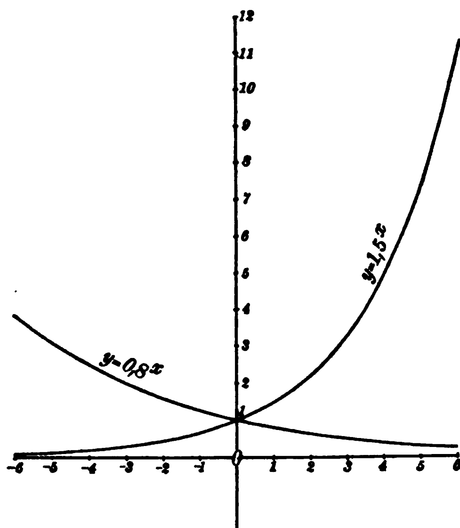


Fig. 9.

Die Funktion, welche die Abhängigkeit des Potenzwertes vom Exponenten bestimmt, kann aber auch durch einen Rechnungsausdruck, nämlich durch eine sogenannte „Potenzreihe" dargestellt werden, d. h. eine Summe von unbegrenzt vielen Gliedern, deren jedes das Produkt aus einer Potenz von x mit positivem, ganzzahligem Exponenten und einer bestimmten Zahl ist. Mit solchen Potenzreihen kann man wie mit ganzen rationalen Funktionen rechnen, vorausgesetzt nur, daß sie „konvergent" sind, d. h., daß die Summe der n ersten Glieder sich einem bestimmten, endlichen Grenzwert beliebig nähert, falls n über alle Grenzen wächst. Um die vorhin ausgesprochene Behauptung zu beweisen, müssen wir von einigen Eigenschaften einer besonders wichtigen Potenzreihe Gebrauch machen[1]).

1. Die unendliche Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots + \text{in inf.}$$

konvergiert[2]) für alle endlichen, reellen und komplexen, Werte von x; den Wert, welchem sich die Summe ihrer n ersten Glieder mit unbegrenzt wachsendem n nähert, wollen wir mit $E(x)$ bezeichnen.

1) Wir weichen an dieser einen Stelle von dem in dem Buche sonst durchgängig befolgten Prinzip ab, alle Sätze, die wir nötig haben, auch ausführlich zu beweisen, weil eine Darstellung der Analysis, welcher die Theorie der Potenzreihen angehört, ja nicht im Plane dieses Buches liegt. Die betreffenden Sätze sind aber unentbehrlich, um die Arithmetik zu einem Abschluß zu bringen; es mündet hier eben die Arithmetik gewissermaßen in die Analysis ein.

2) Der Beweis ist sehr leicht, wenn man die einfachsten Kriterien für die Konvergenz unendlicher Reihen schon abgeleitet hat.

2. $$E(xi) = \cos x + i \sin x$$ [1].

3. Für zwei beliebige Werte x_1 und x_2 von x ist immer

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) \cdot E(x_2)$$ [2].

Aus 1. folgt unmittelbar:

$$E(0) = 1$$

und

$$E(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$$= 2{,}718281828459 \cdots.$$

Diese Zahl, welche wir schon Kap. V, § 5 A, S. 235, zu erwähnen hatten, wird in der Mathematik allgemein mit dem Buchstaben e bezeichnet. Die Definition von $E(x)$ läßt unmittelbar erkennen, daß für jeden positiven Wert von x die Ungleichung $E(x) > 1$ gilt. Für irgend einen negativen Wert $(-x)$ folgt aus $E(-x) \cdot E(x) = E(0) = 1$, daß $E(-x)$ positiv und kleiner als 1 ist. Mit wachsendem (reellem) x nimmt $E(x)$ stets zu; denn, wenn

$$x_2 > x_1,$$

also

$$x_2 = x_1 + \delta, \quad \text{wo} \quad \delta > 0,$$

so ist

$$E(x_2) = E(x_1) \cdot E(\delta),$$

und da

$$E(\delta) > 1,$$

folgt

$$E(x_2) > E(x_1).$$

---

1) Diese von Euler (Introductio in analysin infinitorum, Bd. I, Kap. 8) herrührende Gleichung läßt sich beweisen, indem man in die Potenzreihe $E(x)$ für x die rein imaginäre Zahl zi einsetzt, die Reihe auf die Form $C(z) + i \cdot S(z)$ bringt und zeigt, daß die unendlichen Reihen $C(z)$ und $S(z)$ für alle reellen Werte von z mit den früher eingeführten Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ übereinstimmen. Wenn man dann für komplexe Werte von z diese Funktionen durch die Reihen $C(z)$ bezüglich $S(z)$ definiert, ergibt sich die Gültigkeit von Gleichung 2 für beliebige Werte von x.

2) Gleichung 3 kann z. B. bewiesen werden, indem man zeigt, daß der Differentialquotient von $\frac{E(x+y)}{E(x)\,E(y)}$ nach x wie nach y gleich Null ist, der Bruch also einen von x und y unabhängigen Wert hat, der, wie sich durch Einsetzen von $y = 0$ sofort ergibt, gleich 1 sein muß. Für rein imaginäre Werte von x_1 und x_2 folgt übrigens Gleichung 3 aus Gleichung 2, und dem für reelle Werte des Arguments bereits § 3 K, S. 379, bewiesenen Additionstheorem der Funktionen Kosinus und Sinus.

Für hinreichend kleine Werte von δ weicht dabei $E(\delta)$ beliebig wenig von 1, $E(x_2)$ also auch beliebig wenig von $E(x_1)$ ab, d. h., $E(x)$ ist eine stetige Funktion von x.

Aus Gleichung 3 ergibt sich für $x_1 = 1$, $x_2 = 1$:

$$E(2) = E(1) \cdot E(1) = e^2,$$

für

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1:$$

$$E(3) = E(2) \cdot E(1) = e^2 \cdot e = e^3.$$

Durch den Schluß von $m - 1$ auf m findet man leicht für jede ganze positive Zahl m:

$$E(m) = e^m.$$

Bedeutet $(-m)$ irgend eine negative ganze Zahl, so ist nach 3:

$$E(-m) \cdot E(m) = E(-m+m) = E(0) = 1,$$

also:

$$E(-m) = \frac{1}{E(m)} = \frac{1}{e^m} = e^{-m}.$$

Ferner wird nach 3, wenn m eine positive oder negative ganze Zahl, n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\overbrace{E\left(\frac{m}{n}\right) \cdot E\left(\frac{m}{n}\right) \cdots E\left(\frac{m}{n}\right)}^{(n \text{ Faktoren})} = E(m) = e^m;$$

also ist $E\left(\frac{m}{n}\right)$ unter den Werten von $((e))^{\frac{m}{n}}$ enthalten. Da nun $E\left(\frac{m}{n}\right)$ eine reelle positive Zahl ist, muß $E\left(\frac{m}{n}\right)$ gleich dem einzigen reellen positiven Werte von $((e))^{\frac{m}{n}}$, d. h. gleich dem Hauptwerte $e^{\frac{m}{n}}$ sein. Endlich bedeute

$$\mu = (m_n;\ M_n)$$

irgend eine reelle irrationale Zahl (m_n, M_n rational, siehe Kap. VI, § 1). Da nach der Definition der irrationalen Zahlen

$$m_n < \mu < M_n$$

und $M_n - m_n$ für hinreichend große Werte von n beliebig klein gemacht werden kann, so folgt, daß

1. $$E(m_n) < E(\mu) < E(M_n),$$

und unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $E(x)$, daß

2. $$E(M_n) - E(m_n)$$

für genügend große n beliebig klein wird. $(E(m_n); E(M_n))$ bildet also im Sinne von Kap. VI, § 7 A, S. 310, eine Doppelreihe, deren Wert $E(\mu)$ beträgt. Weil nun (nach Kap. VI, § 7 D, S. 315)

$$e^{\mu} = (e^{m_n};\ e^{M_n})$$

und, wie vorher bewiesen,

$$E(m_n) = e^{m_n} \quad \text{und} \quad E(M_n) = e^{M_n},$$

so erhalten wir auch für die irrationale Zahl μ

$$e^{\mu} = E(\mu).$$

Damit ist gezeigt, daß für alle reellen Werte von x der Hauptwert der Potenz e^x gleich dem Werte der durch die Potenzreihe 1 definierten Funktion $E(x)$ ist. Nachdem wir im Laufe unserer Untersuchungen den Potenzbegriff schrittweise auf immer neue Zahlformen des Exponenten ausgedehnt haben, sind wir nunmehr mittels der Funktion $E(x)$, die deshalb den Namen „Exponentialfunktion" erhalten hat, zu einer alle bisher einzeln behandelten Fälle umfassenden Definition der Potenz gelangt.

Ohne weiteres folgt nun auch für beliebige reelle Werte von x

$$(\!(e)\!)^x = E(x)\left[{}^{c}_{s}(2k\pi x)\right] = F_k(x).$$

Zwei verschiedenen Werten von k entsprechen zwei ganz verschiedene Funktionen $F_k(x)$. Das Symbol $(\!(e)\!)^x$ bezeichnet also nicht etwa eine einzige bestimmte Funktion, es ist vielmehr ein Zeichen für die unendlich vielen Funktionen $F_k(x)$, die allerdings für jeden ganzzahligen Wert von x denselben Wert und für $x = \frac{m}{n}$, wo m, n teilerfremde ganze Zahlen sind, im ganzen nur n voneinander verschiedene Werte haben, sonst aber nicht weiter zusammenhängen. Der einzige reelle positive Wert, den $(\!(e)\!)^x$ für irgend einen reellen Wert des Exponenten hat, ist stets der Hauptwert e^x, d. h. der Wert der Funktion $F_0(x)$. Falls aber $(\!(e)\!)^x$ überhaupt einen reellen negativen Wert besitzt, was eintritt, wenn x gleich einem Bruche ist, welcher in der reduzierten Form einen durch 2 teilbaren Nenner hat, so ist dieser reelle negative Wert durchaus nicht für jedes derartige x ein Wert derselben Funktion $F_k(x)$. Für $x = \frac{m}{2n}$, wo m relativ prim zu $2n$, wird vielmehr $(\!(e)\!)^x$ reell und negativ, wenn

$$2k\pi \cdot \frac{m}{2n} = l\pi,$$

wo l irgend eine ungerade ganze Zahl bedeutet, oder falls

$$k = n \cdot \frac{l}{m}$$

(weil m, n relativ prim, muß l durch m teilbar sein), d. h., wenn k gleich einem ungeraden Vielfachen von n ist. Der reelle negative Wert von $(\!(e)\!)^{\frac{m}{2n}}$ entspricht also den Funktionen $F_n(x)$, $F_{3n}(x)$, $F_{5n}(x)$, ..., wird also je nach dem Werte des Nenners $2n$ von verschiedenen Funktionen $F_k(x)$ geliefert. So erhält man den reellen negativen Wert $-E\left(\frac{1}{2}\right)$ der Potenz $(\!(e)\!)^{\frac{1}{2}}$ aus der Funktion

$$F_1(x) = E(x)\left[{c \atop s}(2\pi x)\right]$$

(und auch aus den Funktionen $F_3(x)$, $F_5(x)$, ...) für $x = \frac{1}{2}$, dagegen den reellen negativen Wert $-E\left(\frac{1}{4}\right)$ der Potenz $(\!(e)\!)^{\frac{1}{4}}$ aus der Funktion

$$F_2(x) = E(x)\left[{c \atop s}(4\pi x)\right]$$

(und auch aus den Funktionen $F_6(x)$, $F_{10}(x)$, ...) für $x = \frac{1}{4}$, den reellen negativen Wert $-E\left(\frac{1}{6}\right)$ der Potenz $(\!(e)\!)^{\frac{1}{6}}$ aus der Funktion

$$F_3(x) = E(x)\left[{c \atop s}(6\pi x)\right]$$

(und auch aus den Funktionen $F_9(x)$, $F_{15}(x)$, ...) für $x = \frac{1}{6}$ usw.

Jetzt erkennen wir auch den eigentlichen Grund, weshalb wir schon im Gebiete der relativen Zahlen (Kap. IV, § 8, S. 175) α den Logarithmus einer Zahl a für eine positive Basis e nur dann genannt haben, wenn der Hauptwert von e^{α} gleich a ist; denn nur unter dieser Bedingung ist der Logarithmus immer die Umkehrung einer und derselben Funktion $F_0(x)$, während, wenn wir etwa $\frac{1}{2}$ auch als Logarithmus von $-E\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{4}$ auch als Logarithmus von $-E\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{6}$ auch als Logarithmus von $-E\left(\frac{1}{6}\right)$ usw. für die Basis e auffassen wollten, der Logarithmus das eine Mal die Umkehrung der Funktion $F_1(x)$, das andere Mal die der Funktion $F_2(x)$, das dritte Mal die der Funktion $F_3(x)$ usw. wäre. Ist es natürlich an sich zulässig, auch bei von Null verschiedenem k die Umkehrung der Funktion $F_k(x)$ zu studieren,

d. h., die durch die Gleichung $y = F_k(x)$ definierte Abhängigkeit der Größe x von y in Betracht zu ziehen, so hat man doch kein Recht, auch diese Funktion x den Logarithmus von y zu nennen; man müßte für sie vielmehr eine andere, und zwar für jeden Wert von k eine besondere, Bezeichnung einführen. Die Nichtbeachtung dieser Überlegungen ist die Ursache, daß noch neuerdings wieder die falsche Behauptung ausgesprochen werden konnte[1]), auch negative Zahlen hätten bei positiver Basis reelle Logarithmen. Die Gleichung $y = F_0(x)$ ordnet jedem reellen x nur einen positiven Wert y zu; für $k > 0$ können der Gleichung $y = F_k(x)$ wohl aber Wertsysteme (x, y) genügen, in welchen x reell und y negativ ist.

Wir haben uns bisher bei der Untersuchung der Abhängigkeit des Potenzwertes vom Exponenten auf die Basis e beschränkt. Nach Kap. VI, § 7 E kann aber jede reelle positive Zahl a als Hauptwert einer Potenz der Basis e mit einem reellen, eindeutig bestimmten Exponenten dargestellt werden. Dieser Exponent, der Logarithmus von a für die Basis e, wird auch der „natürliche Logarithmus" von a genannt und soll im folgenden durch „$\operatorname{Ln} a$" bezeichnet werden. Aus

$$a = e^{\operatorname{Ln} a}$$

folgt für jeden reellen Wert von x:

$$a^x = e^{x \operatorname{Ln} a} = E(x \operatorname{Ln} a).$$

Wir sehen demnach, daß sich auch der Hauptwert a^x von $((a))^x$ für jede reelle positive Basis a durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellen läßt, in welcher x^n den Koeffizienten $\frac{(\operatorname{Ln} a)^n}{n!}$ besitzt. Die Reihe für e^x hat vor der für a^x also nur den Vorzug, daß ihre Koeffizienten besonders einfach sind.

1) Z. B. von Heymann in dem Aufsatze „Die Logarithmen negativer Zahlen und ihr Auftreten bei der Auflösung transzendenter Gleichungen", Zeitschrift f. mathem. u. naturwissensch. Unterricht, Bd. 32 (1901), S. 169—180. Die in dieser Arbeit behauptete Unstetigkeit des Logarithmus für negative Argumente erklärt sich auch daraus, daß man gar nicht bei ein und derselben Funktion bleibt, sondern beständig von einer zur andern übergeht. Dem Anfänger lassen sich diese Beziehungen vielleicht noch klarer machen, wenn man statt der Zahl e als Basis die Potenz einer ganzen Zahl, z. B. die Zahl 4096, wählt. Würde man für diese Basis $\frac{1}{2}$ auch ansehen als Logarithmus von -64, $\frac{1}{4}$ als Logarithmus von -8, $\frac{1}{6}$ als Logarithmus von -4, $\frac{1}{12}$ als Logarithmus von -2, so wäre jeder dieser „Logarithmen" die Umkehrung einer andern Funktion (nämlich der Reihe nach der Funktionen F_1, F_2, F_3, F_6), diese Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ also auch nicht Werte derselben Funktion.

E. Potenzen mit komplexen Exponenten und Logarithmen komplexer Zahlen.

I. Potenz der Basis e mit komplexem Exponenten.

Für alle reellen Werte von x haben wir unter D bewiesen, daß

$$e^x = E(x)$$

und

$$(\!(e)\!)^x = E(x)\left[{}^c_s\,(2k\pi x)\right] = E(x)\,E(2k\pi xi) = E(x + 2k\pi xi).$$

Da die Potenzreihe $E(x)$ auch für jeden endlichen komplexen Wert x noch einen Sinn und bestimmten Wert hat, definieren wir mittels der soeben angegebenen Gleichungen e^x und $(\!(e)\!)^x$ für die komplexen Werte des Exponenten. Ihre Rechtfertigung wird diese Definition unter F finden.

II. Natürliche Logarithmen einer komplexen Zahl.

Um nun auch für eine beliebige komplexe Basis $a = A\left[{}^c_s\,\alpha\right]$ die Bedeutung einer Potenz mit komplexem Exponenten feststellen zu können, suchen wir eine Zahl ζ so zu bestimmen, daß der Hauptwert

$$e^\zeta = a = A\left[{}^c_s\,\alpha\right]$$

wird. Für

$$\zeta = \xi + \eta i,$$

wo ξ und η reell, geht diese Gleichung über in

$$e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

woraus

$$e^\xi\cos\eta = A\cos\alpha \quad \text{und} \quad e^\xi\sin\eta = A\sin\alpha$$

folgt. Quadriert und addiert man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man:

$$e^{2\xi} = A^2.$$

Da e^ξ und A positive Zahlen sind, ergibt sich hieraus:

$$e^\xi = A,$$

also:

$$\xi = \operatorname{Ln} A$$

(im Sinne von Kap. VI, § 7 E, S. 317).

Aus den jetzt resultierenden Gleichungen

$$\cos\eta = \cos\alpha \quad \text{und} \quad \sin\eta = \sin\alpha$$

schließt man weiter, daß

$$\eta = \alpha + 2k\pi,$$

wo k Null oder irgend eine ganze Zahl ist.

Demnach finden wir als Lösung der Gleichung

$$e^{\zeta} = A\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\alpha$$

für ζ die unendlich vielen Werte

$$\zeta = \operatorname{Ln} A + \alpha i + 2k\pi i,$$

deren jeden wir einen „natürlichen Logarithmus“ von $a = A\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\alpha$ nennen und „$\ln a$“ schreiben. Der, dessen imaginärer Bestandteil zwischen $-\pi i$ und $+\pi i$ (die letztere Grenze eingeschlossen) liegt, heiße der „Hauptlogarithmus“ und werde durch „$\operatorname{Ln} a$“ bezeichnet. Wählen wir, was ja immer möglich ist, α so, daß

$$-\pi < \alpha \leqq \pi,$$

so entspricht der Hauptlogarithmus dem Werte $k = 0$; es ist dann also

$$\operatorname{Ln} a = \operatorname{Ln} A + \alpha i$$

und

$$\ln a = \operatorname{Ln} a + 2k\pi i = \operatorname{Ln} A + \alpha i + 2k\pi i.$$

Wenn a eine reelle positive Zahl, also $a = A$ und $\alpha = 0$ ist, wird

$$\operatorname{Ln} a = \operatorname{Ln} A$$

und

$$\ln a = \operatorname{Ln} A + 2k\pi i,$$

d. h., von den unendlich vielen Werten von $\ln a$ ist nur der $k = 0$ entsprechende Hauptwert reell, alle übrigen sind imaginär, z. B.

$$\operatorname{Ln} 1 = 0 \quad \text{und} \quad \ln 1 = 2k\pi i.$$

Ist a eine reelle negative Zahl, also $a = -A$ und $\alpha = \pi$, so erhalten wir:

$$\operatorname{Ln} a = \operatorname{Ln} A + \pi i$$

und

$$\ln a = \operatorname{Ln} A + (2k + 1)\pi i.$$

Sowohl der Hauptwert als auch die sämtlichen übrigen Werte des natürlichen Logarithmus einer negativen Zahl sind also imaginär;

denn $(2k+1)$ kann für keinen ganzzahligen Wert von k gleich Null werden; z. B. ist

$$\operatorname{Ln}(-1) = \pi i \quad \text{und} \quad \ln(-1) = (2k+1)\pi i.$$

Auch eine imaginäre Zahl hat nur imaginäre Logarithmen, z. B.

$$\operatorname{Ln}(i) = \frac{\pi}{2} i \quad \text{und} \quad \ln(i) = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i.$$[1]

III. Potenz einer komplexen Basis mit komplexem Exponenten.

Nunmehr sind wir imstande, auch für eine beliebige komplexe Basis und einen beliebigen komplexen Exponenten die Potenz zu definieren. Wenn

$$a = A\left[{c \atop s}\,\alpha\right], \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi),$$

und

$$x = u + iv,$$

wo u, v reell, so setzen wir:

$$\begin{aligned} (\!(a)\!)^x = e^{x \ln a} &= E(x \ln a) \\ &= E((u+iv)[\operatorname{Ln} A + (\alpha + 2k\pi) i]) \\ &= E(u \operatorname{Ln} A - v(\alpha + 2k\pi) + i[v \operatorname{Ln} A + u(\alpha + 2k\pi)]) \\ &= E(u \operatorname{Ln} A - v(\alpha + 2k\pi))\left[{c \atop s}(v \operatorname{Ln} A + u(\alpha + 2k\pi))\right] \end{aligned}$$

---

1) Die ersten Mathematiker, welche die Frage der Existenz von Logarithmen negativer und auch imaginärer Zahlen gründlich erörtert haben, waren Leibniz und Joh. Bernoulli, die in den Jahren 1712 u. 1713 über diesen Gegenstand lange korrespondierten, ohne jedoch zu einer Einigung gelangen zu können. Erst nachdem der Briefwechsel zwischen diesen beiden Männern 1745 veröffentlicht war, wurde die Frage durch L. Euler zur Entscheidung gebracht, der die Unendlichvieldeutigkeit des Logarithmus entdeckte und durch diese Erkenntnis alle Schwierigkeiten und Widersprüche in der Theorie der Logarithmen beseitigte. Seine Auffassung zum Ausdruck gebracht hat Euler zunächst in zwei Briefen an D'Alembert vom 15. April 1747 und 19. August 1747 und dann ausführlich entwickelt in der Abhandlung „De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires", Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1749, Bd. V, S. 139—179, gedruckt 1751. Vgl. M. Cantor, Vorlesungen III, S. 371 u. S. 722—726, und E. Lampe, „Zur Entstehung der Begriffe der Exponentialfunktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard Euler", in der Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers, Leipzig u. Berlin 1907.

und den Hauptwert

$$\begin{aligned} a^x = e^{x \operatorname{Ln} a} &= E(x \operatorname{Ln} a) \\ &= E((u + iv)(\operatorname{Ln} A + \alpha i)) \\ &= E(u \operatorname{Ln} A - v\alpha + i(v \operatorname{Ln} A + u\alpha)) \\ &= E(u \operatorname{Ln} A - v\alpha)\left[{}^c_s(v \operatorname{Ln} A + u\alpha)\right]; \end{aligned}$$

z. B.

$$((i))^i = E\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) \quad \text{und} \quad i^i = E\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Wenn x eine reelle Zahl, also $v = 0$ ist, stimmt diese Definition mit der schon unter C für die Potenz einer komplexen Zahl mit beliebigem reellen Exponenten gegebenen überein.

IV. Logarithmen einer beliebigen komplexen Zahl für eine beliebige komplexe Basis.

Wir nennen x einen Logarithmus der Zahl $a = A\left[{}^c_s\,\alpha\right]$ für die Basis $g = G\left[{}^c_s\,\gamma\right]$, wenn der Hauptwert

$$g^x = a,$$

d. h., wenn

$$e^{x \operatorname{Ln} g} = a = e^{\ln a}$$

ist, woraus sich ergibt:

$$x = \frac{\ln a}{\operatorname{Ln} g} = \frac{\operatorname{Ln} A + \alpha i + 2k\pi i}{\operatorname{Ln} G + \gamma i}.$$

Die Bestimmung von x wird unmöglich, wenn gleichzeitig

$$\operatorname{Ln} G = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = 0,$$

also

$$g = 1$$

ist. Der Zähler des für x gefundenen Bruches ist unendlichvieldeutig, der Nenner eindeutig. Wenn g reell und positiv, also $\gamma = 0$ ist, wird der Nenner reell, x demnach reell oder imaginär, je nachdem ob $\ln a$ reell oder imaginär ist. Eine reelle negative Zahl hat also für keine positive Basis einen reellen Logarithmus. Erweitern wir den Bruch mit der Differenz $\operatorname{Ln} G - \gamma i$, so erhalten wir:

$$x = \frac{\operatorname{Ln} A \cdot \operatorname{Ln} G + (\alpha + 2k\pi)\gamma + ((\alpha + 2k\pi)\operatorname{Ln} G - \gamma \operatorname{Ln} A)i}{(\operatorname{Ln} G)^2 + \gamma^2}.$$

Hinreichende und notwendige Bedingung für das Reellwerden von x ist das Bestehen der Gleichung

$$(\alpha + 2k\pi)\operatorname{Ln} G = \gamma \operatorname{Ln} A,$$

welche jedenfalls für keinen ganzzahligen Wert von k erfüllt sein kann, wenn g eine von 1 verschiedene reelle positive und a eine reelle negative Zahl ist.

F. Formeln für die allgemeinen natürlichen Logarithmen und die allgemeinen Potenzen im komplexen Zahlengebiete.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Gültigkeit der Formeln für das Rechnen mit Logarithmen und Potenzen zu prüfen, welche wir für die natürlichen Zahlen bereits Kap. I, § 7 B und § 8 C aufgestellt und in den folgenden Kapiteln auf beliebige reelle Zahlen ausgedehnt haben. Besondere Aufmerksamkeit erfordert der Umstand, daß wir es jetzt mit Gleichungen zu tun haben, deren beide Seiten unendlich viele Werte besitzen. Wir werden namentlich, wie bei den entsprechenden für die Wurzeln unter B, S. 386 ff., angestellten Untersuchungen, zu prüfen haben, ob jeder Wert der einen Seite unter den Werten der anderen enthalten ist oder nicht. Die wichtigsten Sätze und Formeln selbst teilen wir vollständig mit; bei den Beweisen beschränken wir uns der Kürze wegen zum Teil auf Andeutungen und verweisen im übrigen auf die ausführliche Darstellung von Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik (Leipzig 1902), XII. Abschnitt, Nr. 7 u. 9.

I. Sätze für die natürlichen Logarithmen.

Wenn

$$a_\mu = A_\mu \left[{}^c_s \alpha_\mu\right], \quad (-\pi < \alpha_\mu \leqq \pi),$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, m,$$

so ist die Gleichung

1. $$\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_m = \ln (a_1 a_2 \ldots a_m)$$

in dem Sinne eine vollkommene Gleichung (siehe B, S. 386), daß, wenn man für jeden Logarithmus auf der linken Seite irgend einen seiner unendlich vielen Werte beliebig wählt, die Summe links gleich einem alsdann bestimmten Werte der rechten Seite ist, und daß, wenn man für den Logarithmus des Produktes auf der rechten Seite irgend einen seiner Werte wählt, in $(m-1)$ Summanden links noch ein beliebiger Wert des Logarithmus genommen werden darf, für den übrigbleibenden m^{ten} Summanden dann aber ein bestimmter Wert zu nehmen ist. Für die Hauptwerte besteht die Gleichung

$$\operatorname{Ln} a_1 + \operatorname{Ln} a_2 + \cdots + \operatorname{Ln} a_m = \operatorname{Ln} (a_1 a_2 \ldots a_m)$$

dann und nur dann, wenn

$$-\pi < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \leqq \pi,$$

eine Bedingung, die z. B. erfüllt ist, wenn die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sämtlich reell und positiv sind.

Der Beweis ergibt sich sehr einfach, indem man

$$\ln a_\mu = \operatorname{Ln} A_\mu + \alpha_\mu i + 2k_\mu \pi i$$

setzt.

Die Gleichung

2. $$\ln a_1 - \ln a_2 = \ln (a_1 : a_2)$$

ist im selben Sinne eine vollkommene und gilt für die Hauptwerte der Logarithmen dann und nur dann, wenn

$$-\pi < \alpha_1 - \alpha_2 \leqq \pi .$$

Um die Richtigkeit der Gleichung

3. $$\ln \sqrt[n]{*a} = \frac{1}{n} \ln a,$$

wo n eine positive ganze Zahl sein soll, zu untersuchen, bilden wir

$$\sqrt[n]{*a} = \sqrt[n]{A} \left[{c \atop s} \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right],$$

wo k irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., $(n-1)$ bezeichnet, und

$$\ln \sqrt[n]{*a} = \operatorname{Ln} \sqrt[n]{A} + \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) i + 2\lambda\pi i,$$

wo λ Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Da nun andrerseits

$$\frac{1}{n} \ln a = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} A + \frac{\alpha}{n} i + \frac{2\mu\pi i}{n},$$

wo auch μ Null oder irgend eine ganze Zahl ist, so erhalten wir als hinreichende und notwendige Bedingung für das Bestehen der Gleichung 3:

$$\frac{2k\pi}{n} i + 2\lambda\pi i = \frac{2\mu\pi}{n} i$$

oder

$$k + \lambda n = \mu .$$

Wenn einer der Werte der linken Seite von 3, d. h. das Wertsystem k, λ, beliebig gewählt ist, läßt sich stets ein dieser Bedingung genügender Wert von μ finden. Umgekehrt kann man auch jede ganze Zahl μ auf die Form $k + \lambda n$ bringen, wo k und λ ganze Zahlen sind und k kleiner als n ist; also entspricht auch jedem Wert der rechten Seite ein Wert der linken, die Gleichung 3 ist demnach eine vollkommene.

Für die Hauptwerte der Wurzeln beziehungsweise der Logarithmen, d. h. für $k = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ ist die Bedingung $k + \lambda n = \mu$ erfüllt; also besteht die Gleichung

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} a .$$

Wir stellen jetzt dieselbe Untersuchung für die Gleichung

4. $$n \ln a = \ln(a^n)$$

an, wo n wieder eine positive ganze Zahl (größer als 1) ist. Es wird

$$n \ln a = n \operatorname{Ln} A + n\alpha i + n \cdot 2\mu\pi i$$

(μ Null oder eine ganze Zahl) und

$$a^n = A^n\left[{}^c_s(n\alpha)\right],$$

$$\ln(a^n) = \operatorname{Ln} A^n + n\alpha i + 2k\pi i$$

(k Null oder eine ganze Zahl).

Die Bedingung für die Richtigkeit von 4 ist also

$$n\mu = k.$$

Nun läßt sich zwar zu jedem ganzzahligen Werte μ ein diese Bedingung erfüllender ganzzahliger Wert von k finden, aber nicht umgekehrt zu jedem ganzzahligen k auch ein ganzzahliger Wert μ; d. h., es ist zwar jeder Wert der linken Seite von 4. unter den Werten der rechten enthalten, aber nicht jeder Wert der rechten Seite unter den Werten der linken. Gleichung 4 ist also eine unvollkommene.[1]) Dem Hauptwerte von $\ln a$ entspricht bei unserer stets gemachten Voraussetzung $-\pi < \alpha \leqq \pi$ der Wert $\mu = 0$. Für die Gültigkeit der Gleichung 4 ist dann zufolge der Relation $n\mu = k$ erforderlich, daß auch $k = 0$. Der Hauptwert von $\ln(a^n)$ gehört aber zu $k = 0$ nur dann, wenn $-\pi < n\alpha \leqq \pi$; also nur unter dieser letzteren Bedingung besteht 4 für die Hauptwerte.

II. Sätze für die allgemeinen Potenzen.

Die Gleichungen

1. $$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{und} \quad a^{x-y} = a^x : a^y$$

ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Hauptwertes der Potenz unter E, S. 401, und dem Additionstheorem der Exponentialfunktion.

1) Setzt man in Gleichung 4 $a = -e$ (also $A = e$, $\alpha = \pi$) und $n = 2$, so geht sie über in $2\ln(-e) = \ln((-e)^2)$. Diese (oder eine ähnliche) Gleichung hat man in älterer und neuerer Zeit wiederholt benutzen wollen, um die Realität des Logarithmus einer negativen Zahl zu beweisen. Nun ist ja einer der Werte von $\ln((-e)^2) = 2 + 2\pi i + 2k\pi i$ in der Tat reell, nämlich der $k = -1$ entsprechende. Gleich könnte ihm aber nur derjenige Wert der linken Seite sein, welcher zu dem aus der Relation $2\mu = k = -1$ zu bestimmenden ganzzahligen μ gehört. Da es aber eine solche ganze Zahl μ nicht gibt, ist der reelle Wert der rechten Seite unter den Werten der linken Seite gar nicht enthalten und der „Beweis" für die Realität von $\ln(-e)$ falsch.

Die Gleichungen

$$(\!(a)\!)^{x+y} = (\!(a)\!)^x \cdot (\!(a)\!)^y \quad \text{und} \quad (\!(a)\!)^{x-y} = (\!(a)\!)^x : (\!(a)\!)^y$$

sind im allgemeinen, d. h. bei beliebigen Werten von x, y, unvollkommen. Es ist nämlich zwar jeder Wert der linken Seiten unter denen der rechten enthalten; denn

$$(\!(a)\!)^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a} \cdot e^{y\ln a} = (\!(a)\!)^x \cdot (\!(a)\!)^y$$

und

$$(\!(a)\!)^{x-y} = e^{(x-y)\ln a} = e^{x\ln a} : e^{y\ln a} = (\!(a)\!)^x : (\!(a)\!)^y,$$

und wenn $(\!(a)\!)^x$ und $(\!(a)\!)^y$ mit demselben Wert von $\ln a$ gebildet werden, so ist auch $(\!(a)\!)^x \cdot (\!(a)\!)^y$, bezüglich $(\!(a)\!)^x : (\!(a)\!)^y$, gleich demjenigen Werte von $(\!(a)\!)^{x+y}$, bezüglich von $(\!(a)\!)^{x-y}$, der auch diesem selben Werte von $\ln a$ entspricht. Gehören aber $(\!(a)\!)^x$ und $(\!(a)\!)^y$ zu voneinander verschiedenen Werten von $\ln a$, so braucht bei beliebigen Werten von x, y ihr Produkt (Quotient) nicht unter den Werten von $(\!(a)\!)^{x+y}$ (bezüglich $(\!(a)\!)^{x-y}$) vorzukommen.

Die Gleichungen

2. $$(\!(a)\!)^x \cdot (\!(b)\!)^x = (\!(a \cdot b)\!)^x \quad \text{und} \quad (\!(a)\!)^x : (\!(b)\!)^x = (\!(a : b)\!)^x$$

sind vollkommen, gelten aber für die Hauptwerte nur dann, wenn entweder $-\pi < \alpha + \beta \leqq \pi$ (beziehungsweise $-\pi < \alpha - \beta \leqq \pi$) oder x eine ganze Zahl ist.

Der Beweis beruht auf I, 1 und 2, S. 402 u. 403.

Zur Prüfung der Gleichung

3. $$(\!(a)\!)^{xy} = (\!(\,(\!(a)\!)^x)\!)^y$$

bilden wir einerseits:

$$(\!(a)\!)^{xy} = e^{xy\ln a} = e^{xy(\mathrm{Ln}\,a + 2k\pi i)},$$

andrerseits:

$$(\!(a)\!)^x = e^{x\ln a} = e^{x(\mathrm{Ln}\,a + 2\lambda\pi i)}$$

und

$$(\!(\,(\!(a)\!)^x)\!)^y = e^{y(x(\mathrm{Ln}\,a + 2\lambda\pi i) + 2\mu\pi i)},$$

wo k, λ, μ Null oder irgend welche ganze Zahlen sein können.

Gleichung 3 ist erfüllt, wenn

$$xy(\mathrm{Ln}\,a + 2k\pi i) = y(x(\mathrm{Ln}\,a + 2\lambda\pi i) + 2\mu\pi i) + 2\nu\pi i,$$

wo auch ν Null oder eine ganze Zahl ist, oder wenn

$$xyk = xy\lambda + y\mu + \nu.$$

Ist ein bestimmter Wert von $(\!(a)\!)^{xy}$, d. h. k, gegeben, so lassen sich die Zahlen λ, μ, ν stets so bestimmen, daß diese Bedingung erfüllt ist; man braucht ja nur $\lambda = k$ und $\mu = 0$, $\nu = 0$ zu setzen. Jeder Wert von $(\!(a)\!)^{xy}$ ist demnach unter den Werten von $(\!(\,(\!(a)\!)^x)\!)^y$ enthalten.

Gehen wir aber von einem bestimmten Werte der rechten Seite aus, haben also λ, μ vorgeschriebene Werte, so lassen sich im allgemeinen, d. h. bei beliebigen Werten von x, y, nicht immer ganze Zahlen k, ν bestimmen, welche der Bedingungsgleichung genügen. Gleichung 3 ist folglich bei beliebigen Werten von x, y eine unvollkommene.

Es ist ferner der Hauptwert

$$a^x = e^{x \operatorname{Ln} a},$$

oder für

$$x = u + vi, \quad \operatorname{Ln} a = \operatorname{Ln} A + \alpha i$$

$$a^x = e^{u \operatorname{Ln} A - v\alpha + i(v \operatorname{Ln} A + u\alpha)}.$$

Der Exponent von e ist dann und nur dann gleich $\operatorname{Ln}(a^x)$, wenn

$$-\pi < v \operatorname{Ln} A + u\alpha \leqq \pi.$$

In jedem Falle können wir aber eine ganze, positive oder negative, Zahl m so bestimmen, daß

$$-\pi < v \operatorname{Ln} A + u\alpha + 2m\pi \leqq \pi.$$

Dann wird

$$\operatorname{Ln}(a^x) = u \operatorname{Ln} A - v\alpha + i(v \operatorname{Ln} A + u\alpha + 2m\pi)$$

$$= x \operatorname{Ln} a + 2m\pi i$$

und deshalb

$$(a^x)^y = e^{y(x \operatorname{Ln} a + 2m\pi i)}.$$

Da nun

$$a^{xy} = e^{xy \operatorname{Ln} a},$$

so besteht die Gleichung 3 für die Hauptwerte dann und nur dann, falls

$$y(x \operatorname{Ln} a + 2m\pi i) = xy \operatorname{Ln} a + 2k\pi i$$

(wo k gleich Null oder gleich einer ganzen Zahl ist), oder falls

$$my = k.$$

Dieser Bedingung entsprechend läßt sich k aber bestimmen erstens, wenn bei beliebigem y die Zahl $m = 0$, d. h., wenn $-\pi < v \operatorname{Ln} A + u\alpha \leqq \pi$, und zweitens, wenn bei von Null verschiedenem m das Produkt my eine ganze Zahl ist.

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

